Options, futures et autres actifs dérivés

10e ÉDITION

John Hull

Édition française dirigée par Patrick Roger
avec Christophe Hénot et Laurent Deville

Pearson

Le présent ouvrage est la traduction de OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES, 10th ed., de JOHN C. HULL, publié par Prentice Hall, Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, États-Unis.

Authorized translation from the English language edition, entitled Options futures and other derivatives, 10th Edition by HULL, JOHN C., published by Pearson Education Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2018, 2015, 2012, 2009 by Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 07458.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education Inc., French language edition published by Pearson France, Copyright © 2017

Mise en page LaTeX : Claire Cadet

© 2017 Pearson France.

Tous droits réservés. Toute reproduction, même partielle, par quelque procédé que ce soit, est interdite sans autorisation préalable. Une copie par xérographie, photographie, film, support magnétique ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi, du 11 mars 1957 et du 3 juillet 1995, sur la protection des droits d'auteur.

ISBN : 978-2-3260-5402-8

Table des matières

Liste des notes techniques xxi
Liste des encadrés xxiii
Préface à l'édition internationale xxv
Préface à l'édition francophone xxix

1 Introduction 1

1.1 Les marchés organisés 2
1.2 Les marchés de gré à gré 3
1.3 Les contrats forward 6
1.4 Les contrats futures 8
1.5 Les options 9
1.6 Les intervenants 12
1.7 Les opérateurs en couverture 13
1.8 Les spéculateurs 14
1.9 Les arbitragistes 16
1.10 Les dangers 17
Résumé 19
Références complémentaires 19
Problèmes et exercices 19
Questions complémentaires 22

2 Le fonctionnement des marchés de futures 25

2.1 Rappels 25
2.2 Les spécifications d'un contrat 27
2.3 La convergence des prix futures vers les prix au comptant 29

2.4 La régulation du marché et les appels de marge . . . 30
2.5 Les marchés OTC . . . 34
2.6 Les cotations de marché . . . 36
2.7 La livraison . . . 39
2.8 Les différents types d'intervenants . . . 39
2.9 Le contrôle des marchés . . . 40
2.10 Les contrats forward et les contrats futures . . . 42
Résumé . . . 43
Références complémentaires . . . 44
Problèmes et exercices . . . 44
Questions complémentaires . . . 46

3 Les stratégies de couverture par les contrats futures . . . 49

3.1 Les principes . . . 49
3.2 Les arguments pour ou contre la couverture . . . 51
3.3 Le risque de base . . . 54
3.4 La couverture croisée . . . 58
3.5 Les futures sur indices . . . 62
3.6 La couverture glissante . . . 67
Résumé . . . 69
Références complémentaires . . . 70
Problèmes et exercices . . . 71
Questions complémentaires . . . 73
Annexe : Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF ou CAPM) . . . 75

4 Les marchés de taux d'intérêt . . . 77

4.1 Les différents types de taux . . . 77
4.2 Les taux de swap . . . 79
4.3 Le taux sans risque . . . 81
4.4 La mesure des taux d'intérêt . . . 82
4.5 Les taux zéro-coupon . . . 84
4.6 L'évaluation des obligations . . . 84
4.7 La détermination des taux zéro-coupon . . . 86

4.8 Les taux forward 89
4.9 Les accords de taux futurs 92
4.10 La duration 94
4.11 La convexité 97
4.12 Les théories de la structure par termes des taux 98
Résumé 102
Références complémentaires 102
Problèmes et exercices 103
Questions complémentaires 105

5 La détermination des prix forward et des prix futures . . 107

5.1 Actifs d'investissement ou actifs de consommation 107
5.2 Les ventes à découvert 108
5.3 Hypothèses et notations 109
5.4 Le prix forward d'un actif d'investissement 110
5.5 Cas d'un flux intermédiaire connu 113
5.6 Cas d'un actif à rendement connu 115
5.7 L'évaluation des contrats forward 116
5.8 Les prix forward sont-ils égaux aux prix futures ? 118
5.9 Les prix futures des contrats sur indices 118
5.10 Les contrats futures et forward sur devises 121
5.11 Les contrats futures sur matières premières 124
5.12 Le coût de portage 126
5.13 Les options de livraison 126
5.14 Prix futures et espérance du prix spot futur 127
Résumé 129
Références complémentaires 129
Problèmes et exercices 130
Questions complémentaires 132

6 Les futures de taux d'intérêt 135

6.1 Conventions de décompte des jours et cotations 135
6.2 Les contrats futures sur obligations 137

6.3 Les contrats futures Eurodollar 143
6.4 Les stratégies de couverture fondées sur la duration 148
6.5 La couverture de portefeuilles d'actifs et de passifs 149
Résumé 150
Références complémentaires 151
Problèmes et exercices 151
Questions complémentaires 153

7 Les swaps 155

7.1 Le fonctionnement des swaps de taux 156
7.2 Les conventions de décompte des jours 161
7.3 La confirmation 161
7.4 L'avantage comparatif 163
7.5 L'évaluation des swaps de taux 165
7.6 Évolution de la valeur d'un swap au cours du temps 167
7.7 Les swaps de devises (fixe contre fixe) 168
7.8 L'évaluation des swaps de devises 171
7.9 Le risque de crédit 173
7.10 Les swaps de défaut (CDS) 175
Résumé 175
Références complémentaires 176
Problèmes et exercices 176
Questions complémentaires 179

8 Titrisation et crise financière de 2007 181

8.1 La titrisation 181
8.2 Le marché immobilier américain 185
8.3 L'origine des difficultés 189
8.4 Les conséquences 191
Résumé 193
Références complémentaires 194
Problèmes et exercices 194
Questions complémentaires 195

9 Problèmes de crédit et coûts de financement 197
9.1 Risque de crédit : CVA et DVA 197
9.2 FVA et MVA 199
9.3 Le KVA 202
9.4 Les questions de calcul 203
Résumé 204
Références complémentaires 204
Problèmes et exercices 205
Questions complémentaires 205

10 Le fonctionnement des marchés d'options 207
10.1 Les types d'options 207
10.2 Les positions en options 210
10.3 Les actifs sous-jacents 211
10.4 Définition des contrats d'options sur actions 213
10.5 Les transactions 219
10.6 Coûts de transaction 220
10.7 Les appels de marge 221
10.8 La chambre de compensation 223
10.9 Réglementation 223
10.10 Fiscalité 224
10.11 Warrants, bons de souscription, stock-options et obligations convertibles . 225
10.12 Les marchés de gré à gré (OTC) 226
Résumé 226
Références complémentaires 227
Problèmes et exercices 227
Questions complémentaires 229

11 Les propriétés des options sur actions 231
11.1 Les facteurs influençant le prix des options 231
11.2 Hypothèses et notations 235
11.3 Bornes supérieures et inférieures pour la valeur des options 236
11.4 La parité call-put 239

11.5 L'exercice anticipé d'une option d'achat sur action sans dividendes . . . 243
11.6 L'exercice anticipé d'une option de vente sur action sans dividendes . . . 245
11.7 L'effet des dividendes . . . 248
Résumé . . . 249
Références complémentaires . . . 250
Problèmes et exercices . . . 250
Questions complémentaires . . . 252

12 Les stratégies d'échanges impliquant des options . . . 255

12.1 Les placements à capital garanti . . . 256
12.2 Les stratégies impliquant une option et un actif sous-jacent . . . 258
12.3 Les spreads . . . 259
12.4 Les combinaisons . . . 269
12.5 Les autres profils de gains . . . 272
Résumé . . . 273
Références complémentaires . . . 273
Problèmes et exercices . . . 274
Questions complémentaires . . . 275

13 Les arbres binomiaux . . . 277

13.1 Le modèle binomial à une période et l'argument d'absence d'opportunité d'arbitrage . . . 277
13.2 L'évaluation risque-neutre . . . 281
13.3 Les arbres binomiaux à deux périodes . . . 284
13.4 Un exemple avec une option de vente . . . 287
13.5 Les options américaines . . . 288
13.6 Le delta . . . 289
13.7 La relation liant u, d et la volatilité . . . 290
13.8 Les formules des arbres binomiaux . . . 292
13.9 L'augmentation du nombre de périodes . . . 293
13.10 L'utilisation de DerivaGem . . . 294
13.11 Les options portant sur d'autres sous-jacents . . . 295

Résumé 298
Références complémentaires 299
Problèmes et exercices 299
Questions complémentaires 301
Annexe : Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton à partir d'un arbre binomial 303

14 Processus de Wiener et lemme d'Itô 307

14.1 La propriété de Markov 308
14.2 Les processus stochastiques en temps continu 308
14.3 Le processus de cours des actions 313
14.4 Les paramètres 317
14.5 Les processus corrélés 317
14.6 Le lemme d'Itô 318
14.7 La propriété de log-normalité 319
Résumé 320
Références complémentaires 321
Problèmes et exercices 322
Questions complémentaires 323
Annexe : Démonstration du lemme d'Itô 325

15 Le modèle de Black, Scholes et Merton 327

15.1 Propriétés de la loi log-normale appliquée au cours des actions 328
15.2 Distribution du taux de rentabilité 330
15.3 L'espérance de rentabilité 331
15.4 La volatilité 332
15.5 Les concepts sous-jacents à l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton 337
15.6 Démonstration de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton 339
15.7 L'évaluation risque-neutre 342
15.8 Les formules d'évaluation de Black-Scholes-Merton 344
15.9 La fonction de répartition de la loi normale 346

15.10 Les warrants émis par une société sur ses propres titres 347
15.11 Les volatilités implicites 350
15.12 Les dividendes 351
Résumé 355
Références complémentaires 356
Problèmes et exercices 357
Questions complémentaires 360
Annexe : Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton 362

16 Les stock-options 365

16.1 Les dispositions contractuelles 366
16.2 Les stock-options permettent-elles d'accorder les intérêts des actionnaires et des salariés ? 367
16.3 Questions de comptabilité 368
16.4 L'évaluation 370
16.5 Le scandale des options antidatées 375
Résumé 376
Références complémentaires 377
Problèmes et exercices 377
Questions complémentaires 378

17 Les options sur indices et devises 381

17.1 Les options sur indices 381
17.2 Les options de change 384
17.3 Les options sur actions versant un taux de dividende connu 386
17.4 L'évaluation des options européennes sur indices 389
17.5 L'évaluation des options sur devise 391
17.6 Les options américaines 393
Résumé 394
Références complémentaires 395
Problèmes et exercices 395
Questions complémentaires 397

18 Les options sur contrats futures 399

18.1 La nature des options sur futures 399

18.2 Les raisons de la popularité des options sur futures 402

18.3 Options sur futures *versus* options sur le sous-jacent 403

18.4 La parité call-put 403

18.5 Les bornes des options sur futures 405

18.6 Le taux de croissance des prix futures dans l'univers risque-neutre . . . 405

18.7 Le modèle de Black pour évaluer les options sur futures 407

18.8 L'utilisation du modèle de Black au lieu de la formule de Black-Scholes-Merton 407

18.9 L'évaluation des options sur futures par les arbres binomiaux 408

18.10 Options américaines sur futures *versus* options américaines sur le sous-jacent 411

18.11 Les options de style futures 412

Résumé 413

Références complémentaires 413

Problèmes et exercices 413

Questions complémentaires 415

19 Les lettres grecques 417

19.1 Exemple introductif 417

19.2 Les positions nues et les positions couvertes 418

19.3 Le calcul des lettres grecques 421

19.4 La couverture par le delta 421

19.5 Le thêta 428

19.6 Le gamma 430

19.7 Les relations entre le delta, le thêta et le gamma 434

19.8 Le vega 435

19.9 Le rhô 437

19.10 Les réalités de la couverture 438

19.11 L'analyse de scénario 439

19.12 L'extension des formules 440

19.13 L'assurance de portefeuille 442
19.14 La volatilité du marché d'actions 446
Résumé 446
Références complémentaires 447
Problèmes et exercices 447
Questions complémentaires 450
Annexe : Développements limités en série de Taylor et paramètres de couverture . 452

20 Les courbes de volatilité 453

20.1 Pourquoi le smile de volatilité est le même pour calls et puts 453
20.2 Les options de change 455
20.3 Les options sur actions 458
20.4 Approches alternatives pour caractériser le smile de volatilité 460
20.5 Structure par termes des volatilités et surface de volatilité 461
20.6 Les grecques 462
20.7 Cas de l'anticipation d'une seule variation extrême 463
Résumé 465
Références complémentaires 465
Problèmes et exercices 466
Questions complémentaires 467
Annexe : Détermination de la distribution risque-neutre implicite à partir de smiles de volatilité 469

21 Les procédures numériques 473

21.1 Les arbres binomiaux 473
21.2 L'évaluation des options sur indices, sur devises et contrats futures à partir des arbres binomiaux 481
21.3 Le modèle binomial pour les actions versant des dividendes 483
21.4 Les procédures alternatives de construction d'arbres 488
21.5 Les paramètres dépendant du temps 491
21.6 La simulation de Monte-Carlo 491
21.7 Les procédés de réduction de la variance 499
21.8 Les méthodes de différences finies 502

Résumé . . . 513
Références complémentaires . . . 514
Problèmes et exercices . . . 514
Questions complémentaires . . . 517

22 Value at Risk et expected shortfall . . . 519

22.1 Les mesures de VaR et d'ES . . . 519
22.2 La simulation historique . . . 522
22.3 L'approche variance-covariance . . . 526
22.4 Le modèle linéaire . . . 529
22.5 Le modèle quadratique . . . 534
22.6 La simulation de Monte-Carlo . . . 537
22.7 Comparaison des différentes approches . . . 537
22.8 Stress tests et *back-testing* . . . 538
22.9 L'analyse en composantes principales (ACP) . . . 538
Résumé . . . 542
Références complémentaires . . . 543
Problèmes et exercices . . . 543
Questions complémentaires . . . 545

23 L'estimation des volatilités et des corrélations . . . 547

23.1 L'estimation de la volatilité . . . 547
23.2 Le modèle de moyenne mobile à pondération exponentielle . . . 550
23.3 Le modèle GARCH(1,1) . . . 551
23.4 Le choix du modèle . . . 553
23.5 Les méthodes du maximum de vraisemblance . . . 554
23.6 L'utilisation du GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future . . . 559
23.7 Les corrélations . . . 563
23.8 Une application du modèle EWMA à un cas à quatre indices . . . 566
Résumé . . . 568
Références complémentaires . . . 569
Problèmes et exercices . . . 569
Questions complémentaires . . . 571

24 Le risque de crédit 573
24.1 Les notations 573
24.2 Les probabilités de défaut historiques 574
24.3 Les taux de recouvrement 575
24.4 L'estimation des probabilités de défaut à partir des prix d'obligations . . 576
24.5 La comparaison des estimations de probabilités de défaut 579
24.6 L'utilisation du prix des actions pour estimer les probabilités de défaut . . 583
24.7 Le risque de crédit dans les transactions sur actifs dérivés 585
24.8 La réduction du risque de crédit 587
24.9 La corrélation des défauts 590
24.10 La VaR (*Value at Risk*) de crédit 593
Résumé 596
Références complémentaires 596
Problèmes et exercices 597
Questions complémentaires 599

25 Les dérivés de crédit 601
25.1 Les swaps de défaut 602
25.2 L'évaluation des CDS 606
25.3 Les indices de crédit 610
25.4 L'utilisation de coupons fixes 611
25.5 Les CDS forward et les options sur CDS 612
25.6 Les swaps de défaut sur panier d'obligations 612
25.7 Les swaps de rentabilité totale 612
25.8 Les CDO 614
25.9 Rôle de la corrélation dans les CDS sur panier d'obligations et les CDO . 616
25.10 L'évaluation des CDO synthétiques 616
25.11 Les alternatives au modèle standard 623
Résumé 625
Références complémentaires 625
Problèmes et exercices 626
Questions complémentaires 627

26 Les options exotiques 629

26.1 Les packages 630

26.2 Les options américaines perpétuelles 630

26.3 Les options américaines non standard 631

26.4 Les options gap 632

26.5 Les options à déclenchement différé (*forward start options*) 633

26.6 Les options cliquet 634

26.7 Les options composées (*compound options*) 634

26.8 Les options au choix (*chooser options*) 635

26.9 Les options barrières 636

26.10 Les options digitales 639

26.11 Les options lookback 640

26.12 Les options shout 642

26.13 Les options asiatiques 643

26.14 Les options d'échange d'un actif contre un autre 645

26.15 Les options sur paniers (*basket options*) 646

26.16 Les swaps de variance et de volatilité 647

26.17 La réplication statique d'options 650

Résumé 653

Références complémentaires 654

Problèmes et exercices 654

Questions complémentaires 657

27 Modèles et méthodes numériques avancés 661

27.1 Les alternatives au modèle de Black et Scholes 662

27.2 Les modèles à volatilité stochastique 668

27.3 La fonction de volatilité implicite 670

27.4 Les obligations convertibles 671

27.5 Les actifs dérivés dépendant de la trajectoire du support 674

27.6 Les options barrières 677

27.7 Les options sur deux actifs corrélés 679

27.8 Simulation de Monte-Carlo et options américaines 682

Résumé 687
Références complémentaires 688
Problèmes et exercices 689
Questions complémentaires 691

28 Martingales, changements de mesure et de numéraire . . 693

28.1 Le prix de marché du risque 694
28.2 Le cas de plusieurs variables d'état 697
28.3 Les martingales 698
28.4 Le choix du numéraire 700
28.5 Extension au cas de plusieurs facteurs indépendants 703
28.6 Retour sur le modèle de Black 704
28.7 L'option d'échange d'un titre contre un autre 705
28.8 Changement de numéraire 706
Résumé 708
Références complémentaires 708
Problèmes et exercices 709
Questions complémentaires 710

29 Les dérivés de taux : les modèles de marché standard . . 713

29.1 Les options sur obligations 713
29.2 Caps et floors de taux 718
29.3 Options de swap européennes 724
29.4 La couverture des dérivés de taux 728
Résumé 729
Références complémentaires 730
Problèmes et exercices 730
Questions complémentaires 731

30 Ajustements de convexité, ajustements temporels et quantos 733

30.1 Les ajustements de convexité 733
30.2 Les ajustements temporels 737
30.3 Les quantos 739

Résumé 742
Références complémentaires 743
Problèmes et exercices 743
Questions complémentaires 744
Annexe : Démonstration de la formule d'ajustement de convexité 746

31 Les dérivés de taux : la modélisation du taux court 747

31.1 Rappels 748
31.2 Les modèles à un facteur 749
31.3 Univers réel *versus* univers risque-neutre 754
31.4 L'estimation des paramètres 756
31.5 Quelques modèles plus sophistiqués 757
Résumé 758
Références complémentaires 758
Problèmes et exercices 758
Questions complémentaires 760

32 Les modèles de taux court fondés sur l'absence d'arbitrage 761

32.1 Extensions des modèles d'équilibre 762
32.2 Les options sur obligations 766
32.3 Les structures de volatilité 767
32.4 Les arbres de taux 768
32.5 Une méthode générale de construction des arbres 770
32.6 Le calibrage du modèle 780
32.7 La couverture dans un modèle à un facteur 782
Résumé 782
Références complémentaires 782
Problèmes et exercices 783
Questions complémentaires 784

33 Les modèles HJM, LMM et les courbes de taux zéro-coupon . . . 787

33.1 Le modèle de Heath, Jarrow et Morton . . . 788

33.2 Le modèle de marché LIBOR . . . 791

33.3 Les courbes de taux multiples . . . 800

33.4 Les créances hypothécaires . . . 802

Résumé . . . 804

Références complémentaires . . . 805

Problèmes et exercices . . . 805

Questions complémentaires . . . 806

34 Retour sur les swaps . . . 807

34.1 Variations sur le swap vanille . . . 807

34.2 Les swaps composés . . . 809

34.3 Les swaps de devises . . . 810

34.4 Les swaps plus complexes . . . 811

34.5 Les swaps sur actions ou indices (*equity swaps*) . . . 814

34.6 Les swaps contenant des options . . . 816

34.7 Quelques autres swaps . . . 818

Résumé . . . 820

Références complémentaires . . . 820

Problèmes et exercices . . . 820

Questions complémentaires . . . 821

35 Les dérivés climatiques, d'énergie et d'assurance . . . 823

35.1 Les matières premières agricoles . . . 823

35.2 Les métaux . . . 824

35.3 Les dérivés d'énergie . . . 825

35.4 Le prix des matières premières . . . 827

35.5 Les dérivés climatiques . . . 833

35.6 Les dérivés assuranciels . . . 834

35.7 Évaluation des dérivés climatiques et assuranciels . . . 835

35.8 Comment un producteur d'énergie couvre-t-il son risque ? . . . 837

Résumé . . . 837
Références complémentaires . . . 838
Problèmes et exercices . . . 839
Questions complémentaires . . . 840

36 Les options réelles . . . 841

36.1 L'évaluation des investissements . . . 841
36.2 Extension du modèle d'évaluation risque-neutre . . . 842
36.3 L'estimation du prix de marché du risque . . . 844
36.4 Application à l'évaluation d'une nouvelle activité . . . 845
36.5 Évaluation des options incluses dans une opportunité d'investissement . . . 847
Résumé . . . 853
Références complémentaires . . . 853
Problèmes et exercices . . . 854
Questions complémentaires . . . 854

37 Les mésaventures des marchés d'actifs dérivés t les leçons à en tirer . . . 857

37.1 Leçons pour tous les utilisateurs d'actifs dérivés . . . 858
37.2 Leçons pour les institutions financières . . . 863
37.3 Leçons pour les entreprises non financières . . . 869
Résumé . . . 870
Références complémentaires . . . 871

Glossaire . . . 873

Le logiciel DerivaGem . . . 889

Les principaux marchés organisés de futures et d'options dans le monde . . . 895

Tableau pour $N(x)$ quand x négatif . . . 896

Tableau pour $N(x)$ quand x positif . . . 897

Index . . . 898

Liste des notes techniques

Ces compléments sont disponibles à l'adresse www.pearson.fr.

1. Ajustement de convexité pour les contrats futures Eurodollar
2. Propriétés de la loi log-normale
3. Évaluation des warrants quand la valeur des actions (warrants inclus) est log-normale
4. Calcul exact des valeurs de calls américains sur des actions versant des dividendes
5. Calcul de la fonction de répartition d'une loi normale bivariée
6. Équation aux dérivées partielles satisfaite par un produit dérivé sur une action versant un taux de dividende connu
7. Équation aux dérivées partielles satisfaite par un produit dérivé sur contrat futures
8. Approximation analytique pour l'évaluation des options américaines
9. Procédure générale de construction d'arbres
10. Développement de Cornish-Fisher pour estimer la VaR
11. Manipulation des matrices de transition de rating
12. Calcul de la fonction de répartition de la loi de χ^2 décentrée
13. Procédure efficace d'évaluation des options lookback américaines
14. Modèle de Hull et White à deux facteurs
15. Évaluation des options européennes sur obligations à coupons
16. Construction d'un arbre de taux avec pas de temps et paramètres non constants
17. Processus de taux court dans un modèle de type HJM
18. Évaluation d'un swap composé
19. Évaluation d'un swap sur indices d'actions
20. Généralisation de la procédure d'évaluation risque-neutre
21. Polynômes d'Hermite et intégration
22. Évaluation d'un swap de variance

23. Le modèle de Black, Derman et Toy

24. Démonstration de l'égalité des prix forward et futures quand les taux sont constants

25. Procédure de « cash-flow mapping »

26. Mesure binomiales de la corrélation de défaut

27. Calcul des moments pour l'évaluation des options asiatiques

28. Calcul des moments pour l'évaluation des options sur paniers

29. Extension du lemme d'Itô

30. Rentabilité d'un actif dépendant de plusieurs sources d'incertitude

Liste des encadrés

Encadré 1.1 La faillite de Lehman Brothers **4**
Encadré 1.2 Le risque systémique **5**
Encadré 1.3 Les hedge funds **12**
Encadré 1.4 La perte historique de la Société Générale en 2008 **18**
Encadré 2.1 La livraison non anticipée d'un contrat futures **26**
Encadré 2.2 Les pertes de Long Term Capital Management **35**
Encadré 3.1 La stratégie de couverture des compagnies minières (sur l'or) **54**
Encadré 3.2 Metallgesellschaft : quand la couverture tourne mal **69**
Encadré 4.1 Orange County joue la courbe des taux **91**
Encadré 4.2 Liquidité et crise financière de 2007-2009 **101**
Encadré 5.1 Kidder Peabody **111**
Encadré 5.2 Une erreur d'informatique ? **117**
Encadré 5.3 Le contrat futures sur l'indice Nikkei **119**
Encadré 5.4 L'arbitrage sur indices en octobre 1987 **120**
Encadré 6.1 Le décompte des jours peut être surprenant **136**
Encadré 6.2 La Wild Card **142**
Encadré 6.3 L'ALM (*Asset-Liability Management*) vu par les banques **149**
Encadré 7.1 Extrait d'une confirmation pour un swap entre Apple et Citigroup **162**
Encadré 7.2 L'histoire de Hammersmith et Fulham **174**
Encadré 8.1 Le comité de Bâle **192**
Encadré 10.1 L'important versement de dividendes du Groupe Gucci **217**
Encadré 10.2 L'optimisation fiscale à l'aide d'options **225**
Encadré 11.1 Relation de parité call-put et structure du capital **242**
Encadré 12.1 Comment perdre de l'argent avec des box spreads **264**
Encadré 12.2 Comment gagner de l'argent avec un straddle ? **270**
Encadré 15.1 Les rentabilités affichées par les fonds peuvent être trompeuses… **332**
Encadré 15.2 Les origines de la volatilité **336**
Encadré 15.3 Warrants, stock-options et dilution **348**

Encadré 17.1 Peut-on garantir sur le long terme un rendement des fonds aussi élevé que celui des obligations d'État ? **391**

Encadré 19.1 La couverture dynamique en pratique **438**

Encadré 19.2 L'assurance de portefeuille est-elle en cause dans le krach du 19 octobre 1987 ? **445**

Encadré 20.1 Faire de l'argent avec les options de change **457**

Encadré 20.2 Krachophobie **460**

Encadré 21.1 Calcul de π par une simulation de Monte-Carlo **492**

Encadré 21.2 Tester le modèle de Black et Scholes **494**

Encadré 22.1 Comment le régulateur utilise-t-il la VaR ? **520**

Encadré 24.1 Les downgrade triggers : le cas d'AIG **588**

Encadré 25.1 Qui supporte le risque de crédit ? **602**

Encadré 25.2 Le marché des CDS **604**

Encadré 26.1 La couverture en delta est-elle plus facile ou plus difficile avec des options exotiques ? **650**

Encadré 29.1 La parité call-put pour les caps et les floors **720**

Encadré 29.2 Le lien avec les options sur obligations **725**

Encadré 30.1 Le paradoxe de Siegel **742**

Encadré 33.1 La décomposition en intérêt et principal **803**

Encadré 34.1 Extrait d'une confirmation pour un swap hypothétique non standard **808**

Encadré 34.2 Extrait d'une confirmation pour un swap composé entre Microsoft et Goldman Sachs **809**

Encadré 34.3 Extrait d'une confirmation pour un swap sur indices entre Microsoft et Goldman Sachs **815**

Encadré 34.4 L'étrange contrat de Procter & Gamble **819**

Encadré 36.1 L'évaluation d'Amazon.com **846**

Encadré 37.1 Pertes importantes d'institutions financières **858**

Encadré 37.2 Pertes importantes d'entreprises non financières **860**

Préface à l'édition internationale

La première édition de ce livre comptait seulement 13 chapitres et 330 pages. C'est toujours pour moi un souvenir surprenant. Les marchés d'actifs dérivés se sont considérablement développés depuis quarante ans et ce livre cherche à tenir compte des derniers développements à chaque nouvelle édition.

Comme les précédentes, cette édition vise des publics variés. Elle est adaptée aux étudiants de master et de doctorat en économie, en sciences de gestion et plus particulièrement en finance. Elle peut être utilisée en troisième année de licence par les étudiants ayant des bases solides en techniques quantitatives. De même, les praticiens qui souhaitent approfondir leur compréhension des mécanismes gouvernant les marchés d'actifs dérivés y trouveront un intérêt.

L'auteur d'un ouvrage sur ce domaine doit prendre une décision capitale quant à l'usage des mathématiques. Si le degré de sophistication retenu est trop élevé, le risque est grand de perdre en chemin une proportion non négligeable d'étudiants et de praticiens. S'il est trop faible, des thèmes essentiels seront traités de manière superficielle. J'ai essayé d'être très prudent quant à l'usage des mathématiques et au choix des notations. Ce qui est secondaire a été soit supprimé, soit reporté dans des annexes en fin de chapitre ou dans des notes techniques sur Internet. Les notions, éventuellement nouvelles pour bon nombre de lecteurs, sont expliquées en détail, et de nombreux exemples numériques les illustrent.

Ce livre couvre à la fois les actifs dérivés et la gestion du risque qu'ils impliquent. Il suppose que le lecteur a suivi un cours introductif en finance ainsi qu'en probabilité et statistique. Il n'y a pas, en revanche, de pré-requis concernant les options, les contrats à terme ou encore les swaps. Il n'est pas non plus indispensable que les étudiants aient suivi un cours sur les choix d'investissement avant d'aborder l'étude de ce livre.

Cet ouvrage peut être utilisé de diverses manières dans le cadre de l'enseignement. Un cours d'introduction aux actifs dérivés se concentrera sur la première moitié alors qu'un cours plus avancé s'appuiera sur tout ou partie de la seconde moitié. Le chapitre 37 permet aussi bien de conclure un cours introductif qu'un cours avancé.

Quoi de neuf dans cette édition ?

Le contenu a été mis à jour et amélioré. L'actualisation aux taux OIS est maintenant utilisée dans la plupart des chapitres. Cela rend la présentation générale plus simple et plus adéquate d'un point de vue théorique. L'évaluation des instruments tels que les swaps et les FRA exige l'estimation (a) des taux forward pour calculer les paiements (habituellement LIBOR) et (b) de la courbe des taux zéro-coupon sans risque, utilisée pour l'actualisation (taux OIS). Les méthodes présentées peuvent être étendues aux situations où les paiements dépendent d'un taux risqué. Les modifications essentielles de cette édition sont les suivantes.

- Le chapitre 7 sur les swaps est partiellement réorganisé pour améliorer la présentation et refléter les pratiques de marché.
- Le chapitre 9 traite des ajustements d'évaluation, notés XVA pour adopter une notation générique (CVA, DVA, FVA, MVA et KVA). Les financiers émettent des réserves à propos des ajustements FVA, MVA et KVA (nous expliquons ces réserves), mais les XVA sont devenus importants dans l'évaluation des actifs dérivés, et il est indispensable d'aborder ce thème.
- Dans différents chapitres, nous évoquons la façon dont on peut tenir compte de taux négatifs dans les modèles d'évaluation. L'hypothèse d'absence d'arbitrage habituellement posée dans les modèles semble en effet peu compatible avec des taux négatifs. Pourtant, aujourd'hui, les taux négatifs sont devenus une réalité dans plusieurs pays européens ou au Japon.
- Les modèles d'équilibre de la structure par termes des taux d'intérêt font l'objet d'un chapitre à part entière (chapitre 31). Ces modèles sont importants, à la fois sur le plan pédagogique et pour élaborer des analyses de scénarios à long terme.
- La présentation du calcul des grecques et des courbes de volatilité est plus détaillée.
- Certaines mesures de risque sont approfondies (*expected shortfall* et mesures incluant des scénarios de stress) de sorte à tenir compte de leur rôle croissant dans la gestion du risque et la régulation.
- Nous abordons le modèle SABR.
- De nouveaux éléments sont ajoutés sur la régulation des marchés OTC et les contreparties centralisées.
- Les chapitres sur les martingales ou les méthodes de bootstrap ont été améliorés.
- Un certain nombre d'exemples ont été actualisés pour tenir compte des conditions de marché.
- De nouveaux exercices ont été ajoutés ou des exercices existant ont été amendés.
- Une nouvelle version de DerivaGem est disponible.

Le logiciel DerivaGem

La version 4.00 de DerivaGem est fournie avec l'ouvrage. Elle compte deux applications Excel : le calculateur d'options et le développeur d'applications. Le calculateur

d'options permet d'évaluer très facilement une large gamme d'options. Le développeur d'applications comprend un ensemble de fonctions Excel, qui servent à construire des applications autonomes. Plusieurs exemples sont fournis, pour que les étudiants puissent explorer plus facilement les propriétés des options et des méthodes numériques.

La version 4.00 du logiciel comprend de nombreux nouveaux modèles d'évaluation (Heston, SABR, Bachelier normal, etc.). Le programme DerivaGem est décrit en détail après le glossaire, à la fin du livre. Il peut être téléchargé sur le site américain de l'éditeur :

www.pearsonhighered.com/hull

grâce au code d'accès personnel qui vous est fourni en fin d'ouvrage.

Corrigés des exercices et réponses aux questions

Comme dans les éditions précédentes, les problèmes de fin de chapitre sont divisés en deux groupes : Problèmes et exercices et Questions complémentaires.

Les solutions des problèmes et exercices sont fournies dans *Options, futures et autres actifs dérivés, 10e édition, Corrigés* (Pearson France, novembre 2017).

Notes techniques

Cette édition compte des notes techniques, disponibles sur le site de l'éditeur. Elles constituent un complément aux éléments techniques traités dans le texte. Elles peuvent être téléchargées à l'adresse www.pearson.fr.

Remerciements

De nombreuses personnes ont participé à l'élaboration de ce livre. Des enseignants, des étudiants et des professionnels m'ont fait des suggestions pertinentes et utiles. La liste est maintenant si longue qu'il est impossible de les remercier individuellement. Les neuf premières éditions ont rencontré beaucoup de succès auprès des professionnels, et leurs commentaires ont aussi permis des améliorations significatives. Les étudiants qui suivaient mes cours sur les marchés d'actifs dérivés à l'université de Toronto ont de même influencé l'évolution de cet ouvrage. Eddie Mizzi, de Geometric press, a fait un travail d'édition remarquable sur le manuscrit. Je suis aussi reconnaissant à Emilio Barone, de l'université Luis Guido Carli de Rome, pour ses commentaires détaillés.

Alan White, mon collègue de l'université de Toronto, mérite des remerciements particuliers. Pendant les trente années qui viennent de s'écouler, Alan et moi avons mené des recherches en commun sur les actifs dérivés. Pendant ces années, nous avons passé un nombre incalculable d'heures à discuter de ce sujet. Une grande part des idées nouvelles développées dans ce livre et des méthodes récentes de présentation des idées anciennes

sont à mettre autant au crédit d'Alan qu'au mien. Il a lu très méticuleusement la version originale du livre et a proposé de nombreuses améliorations. Il a aussi réalisé la plupart des développements du logiciel DerivaGem.

J'ai une pensée particulière pour les nombreuses personnes travaillant chez Pearson. Je souhaite remercier tout spécialement Donna Battista, Neeraj Bhalla, Nicole Suddeth et Alison Kalil, pour leur enthousiasme, leurs conseils et leurs encouragements. Les commentaires sur cette version sont les bienvenus. Mon adresse email est la suivante : hull@rotman.utoronto.ca.

John Hull
Joseph L. Rotman School of Management
université de Toronto

Préface à l'édition francophone

Traduire *Options, Futures and Other Derivatives* de John Hull est un défi à la fois intimidant et excitant. La raison en est simple : il s'agit sans aucun doute de l'ouvrage le plus complet traitant des actifs dérivés actuellement sur le marché.

Deux questions essentielles se posent au début de ce genre d'aventure. La première concerne les termes techniques. Faut-il opter pour une traduction intégrale des mots comme *call*, *put*, *swap*, *spread*, etc. ou est-il préférable de garder les expressions anglo-saxonnes ? Nous avons, sans hésiter, opté pour la seconde solution, car à la fois les professionnels, dans leur pratique quotidienne, et les universitaires, dans leurs enseignements, utilisent les termes anglo-saxons. Cela est probablement dû au pragmatisme des professionnels (*put* est bien plus rapide à prononcer qu'option de vente), et au fait que l'anglais est la langue des marchés financiers. On peut éventuellement le regretter, mais il faut en tenir compte.

La question suivante concerne les exemples. Faut-il systématiquement les adapter au contexte européen ou n'opérer qu'une adaptation partielle ? Ici encore, notre choix s'est porté sur la seconde solution. Force est de reconnaître le caractère international de l'univers des actifs dérivés et le leadership de certains marchés nord-américains, comme le Chicago Board Options Exchange sur les options. Par conséquent, un certain nombre d'exemples sont ceux de l'édition originale, d'autres ont été remplacés par des exemples de contrats cotés sur des marchés européens comme l'Eurex.

Les erreurs de frappe qui s'étaient glissées dans l'édition originale, mentionnées dans un document d'errata sur le site de l'auteur, ont été corrigées. Nous espérons ne pas en avoir introduit d'autres, même si, sur un ouvrage de ce volume, c'est un objectif pratiquement impossible à atteindre.

Au terme de ce travail, long et parfois difficile, je suis reconnaissant à Christophe Hénot et Laurent Deville pour la traduction des chapitres 10 à 13, 15 à 19, 21, 23, 26 et 27.

Je tiens à remercier mes collègues du Laboratoire de recherche en gestion et économie de l'EM Strasbourg, et plus particulièrement Maxime Merli et Marie-Hélène Broihanne. J'exprime ma reconnaissance à Danielle Genevé pour sa gentillesse et pour sa compétence dans la dactylographie de certaines parties.

Claire Cadet a fait un travail remarquable de mise en page sous LaTeX et de relecture. Je tiens à la remercier pour son professionnalisme et sa réactivité. De même, je remercie Caroline Durocher qui a efficacement dirigé le travail d'édition.

Comme il est d'usage de le rappeler, les erreurs qui pourraient cependant subsister relèvent de mon entière responsabilité.

Patrick Roger
Professeur de finance,
EM Strasbourg Business School, université de Strasbourg

Chapitre 1
Introduction

Depuis une quarantaine d'années, l'importance des produits dérivés sur les marchés financiers s'est accrue de manière pratiquement continue. Les contrats futures et les options font l'objet de transactions considérables sur de nombreux marchés organisés. Les contrats forward, les swaps et différents types d'options sont régulièrement échangés sur les marchés de gré à gré par les institutions financières, les gérants de fonds et les trésoriers d'entreprise.

Des actifs dérivés sont parfois intégrés à des titres classiques comme les actions ou les obligations. Ils apparaissent aussi dans l'étude des projets d'investissement en actifs réels, comme par exemple des immeubles ou des capacités de production (on parle alors d'options réelles). Ils sont utilisés comme moyens de transfert des risques contenus dans des portefeuilles de prêts immobiliers. Nous avons maintenant atteint un stade où tous ceux qui travaillent dans la finance, et même ceux qui évoluent en dehors de ce domaine, doivent comprendre comment ces actifs sont utilisés et évalués.

Que vous aimiez les produits dérivés ou que vous les détestiez, vous ne pouvez les ignorer. Ce marché est colossal, bien plus important que le marché actions, en termes de valeur des actifs sous-jacents. La valeur de ces derniers représente plusieurs fois le PNB mondial. Comme nous le verrons dans ce chapitre, les actifs dérivés sont utilisés pour la couverture, la spéculation et l'arbitrage. Ils jouent un rôle fondamental quand il s'agit de transférer des risques d'une entité économique à une autre.

Un actif dérivé (ou plus simplement un « dérivé ») est un actif dont la valeur dépend d'autres variables plus fondamentales comme les prix d'autres actifs négociés sur les marchés, les taux d'intérêt, les taux de change ou encore les températures, la hauteur de neige dans une station de sports d'hiver, etc.

Depuis la première édition de ce livre en 1988, les marchés de dérivés ont connu un développement très rapide. Aujourd'hui sont régulièrement échangés des dérivés de crédit, d'électricité, des dérivés climatiques ou d'assurance. De nouveaux produits dérivés sur taux, actions ou changes ont aussi été créés. La présente édition reflète tous ces nouveaux développements.

Les marchés d'actifs dérivés ont été sous le feu de la critique du fait de leur rôle dans la crise du crédit qui a débuté en 2007. Des produits dérivés ont été élaborés à partir de portefeuilles de prêts immobiliers aux États-Unis par un processus appelé « titrisation ». Nombre de ces produits ont perdu toute valeur quand les prix de l'immobilier ont chuté. De grandes institutions financières ont perdu des sommes faramineuses et les pays développés sont entrés dans une des plus sévères périodes de récession de leur histoire.

Le chapitre 8 explique comment fonctionne la titrisation et pourquoi de telles pertes ont été subies. Une des conséquences de cette crise est le renforcement de la régulation des marchés d'actifs dérivés. Par exemple, les banques font maintenant face à des exigences en capital plus importantes et la nécessité de se préoccuper de la liquidité des actifs détenus a été introduite dans la réglementation.

La façon dont les actifs dérivés sont évalués a aussi évolué. La question du risque de crédit est maintenant considérée très attentivement et les mécanismes de garantie (*collateral*) se sont développés. Bien qu'il ne soit pas possible de le justifier d'un point de vue théorique, de nombreuses banques ont changé leur mesure du taux sans risque de façon à refléter leurs coûts de financement. Le chapitre 9 est consacré à la façon dont les ajustements d'évaluation fonctionnent et étudie dans quelle mesure ceux-ci reposent sur des bases théoriques solides.

Dans ce chapitre introductif, nous jetons un premier regard sur les contrats forward et futures, les marchés d'options, et nous montrons comment ces actifs financiers peuvent être utilisés pour la couverture, la spéculation ou l'arbitrage. Les chapitres suivants approfondissent et développent les points effleurés ici.

1.1 Les marchés organisés

Un marché organisé d'actifs dérivés est un marché sur lequel sont échangés des contrats standardisés, élaborés par les autorités de marché. Le Chicago Board of Trade (CBOT) a été créé en 1848 pour confronter les offres et demandes de grains des fermiers et des négociants. Au départ, l'objectif essentiel était de standardiser quantités et qualités de grains échangés. Quelques années plus tard, le premier contrat futures a été mis en place. Rapidement, les spéculateurs ont trouvé plus attractif de spéculer sur le contrat que sur le grain lui-même. Le principal concurrent nord-américain, le Chicago Mercantile Exchange (CME), a ouvert ses portes en 1919. Le CME et le CBOT sont maintenant regroupés au sein du CME Group (www.cmegroup.com), qui inclut aussi le New York Mercantile Exchange (NYMEX). Aujourd'hui, des marchés organisés de contrats futures existent dans le monde entier (voir la liste en fin d'ouvrage).

Le Chicago Board Options Exchange (CBOE, www.cboe.com) a proposé des contrats d'options d'achat sur actions (calls) à partir de 1973. Les options existaient bien avant cela, mais le CBOE a rencontré un grand succès en proposant des contrats clairement définis aux caractéristiques standardisées. La négociation d'options de vente (puts) a débuté en 1977. Ce sont aujourd'hui des milliers d'actions et de nombreux indices qui sont supports de contrats d'options.

Sur les marchés européens, Eurex, résultat de l'association de la Deutsche Terminbörse (DTB) et de la Soffex SA suisse (www.eurexchange.com), est l'un des acteurs essentiels dans la négociation de produits dérivés. Le LIFFE (*London International Financial Futures Exchange*), absorbé par Euronext en 2001 (devenu ensuite NYSE-Euronext), est l'autre marché de référence (www.euronext.com).

Sur le marché français, les options sont échangées sur Euronext, l'appellation d'origine du marché étant MONEP (Marché d'options négociables de Paris). Il s'est ouvert en 1987 et on y traite aujourd'hui des options sur des centaines d'actions et sur plusieurs indices français et européens.

Comme les contrats futures, les options se sont développées à un rythme soutenu à travers le monde et les supports se sont diversifiés ; en plus des actions et des indices, on trouve maintenant des options sur de nombreuses devises et des options sur contrats futures.

Sur les marchés organisés, la bonne réalisation des transactions est assurée par une chambre de compensation qui se porte intermédiaire de toutes les transactions. Les opérateurs n'ont donc pas à s'inquiéter de la qualité de leurs contreparties. La chambre de compensation instaure un mécanisme d'appel de marge qui permet de gérer ce risque de défaut. Ces éléments sont détaillés au chapitre 2.

Les marchés électroniques

Alors que, traditionnellement, les traders négociaient en un lieu unique, à la criée, à l'aide d'un jeu de signes complexe, l'évolution technologique a conduit à l'émergence de la négociation (ou *trading*) électronique qui est la norme aujourd'hui. Les ordres sont donc passés directement par ordinateur et transférés sur un système central qui apparie acheteurs et vendeurs. Quoique les marchés à la criée aient leurs défenseurs, ils sont progressivement remplacés par le trading électronique. De plus, ce développement a donné naissance au trading algorithmique, qui consiste à utiliser des programmes informatiques déclenchant des ordres d'achat et de vente pratiquement sans intervention humaine.

1.2 Les marchés de gré à gré

Tous les échanges ne sont pas réalisés sur des marchés organisés. Le marché de gré à gré (noté OTC dans la suite pour *over the counter*) constitue une alternative importante en termes de volumes de transactions. Les transactions sont des contrats bilatéraux, mais ceux-ci peuvent être présentés à un organisme de contrepartie centralisateur (dont l'acronyme est CCP pour *central counterparty*) qui fonctionne comme une chambre de compensation. Quand les deux contreparties n'utilisent pas ce mécanisme, elles conviennent en général d'agréger toutes leurs transactions dans un accord-cadre, qui définit de manière précise la façon dont les transactions seront dénouées, même en cas de défaut d'une des contreparties. Ces questions sont développées au chapitre 2.

Les échanges sont conclus par téléphone ou par l'intermédiaire de réseaux informatiques entre deux institutions financières ou entre une institution et l'un de ses clients. Ces

institutions jouent souvent le rôle de teneurs de marché, ou *market-makers*, pour les produits les plus courants, c'est-à-dire qu'elles cotent des prix auxquels elles sont prêtes à acheter (prix demandé ou *bid*) et des prix auxquels elles acceptent de vendre (prix offert ou *ask*).

Avant la crise qui a débuté en 2007 et que nous discutons au chapitre 8, le marché OTC était très peu régulé. Après la faillite de Lehman Brothers (voir encadré 1.1), de nouvelles réglementations ont été mises en place sur les marchés OTC. L'objectif est d'accroître la transparence des transactions et l'efficience des marchés, et de réduire le risque systémique (voir l'encadré 1.2). En bref, les marchés OTC sont obligés de se rapprocher des modes de fonctionnement des marchés organisés. Les trois changements importants sont les suivants.

1. Aux États-Unis, les transactions doivent être réalisées, dès que c'est possible, au travers de plateformes appelées *swap execution facilities* (SEF). Les participants proposent des prix d'achat et de vente et les transactions sont réalisées en fonction de ces prix bid et ask.
2. Dans de nombreux pays, il est maintenant de plus en plus souvent exigé de passer par une CCP.
3. Toutes les transactions doivent être consignées dans un registre central.

Encadré 1.1 La faillite de Lehman Brothers

Le 15 septembre 2008, Lehman Brothers se mettait sous la protection du chapitre 11 de la loi sur les faillites. Il s'agissait de la faillite la plus importante de l'histoire des États-Unis ; elle a eu des conséquences sur tous les marchés d'actifs dérivés. Jusqu'au dernier moment, il a semblé que Lehman Brothers pourrait survivre, puisqu'un certain nombre de grandes institutions (Korean Development Bank, Barclays Bank au Royaume-Uni, Bank of America) avaient manifesté la volonté de racheter l'entreprise, sans que le processus aille toutefois à son terme. Beaucoup pensaient que Lehman Brothers faisait partie de ces institutions « *too big to fail* » et que le gouvernement américain viendrait finalement à sa rescousse. Cela n'a pas été le cas. Comment cette faillite historique a-t-elle pu survenir ? C'est le résultat de la combinaison de trois éléments : un effet de levier important, des investissements très risqués et des problèmes de liquidité.

Les banques commerciales qui reçoivent les dépôts des clients sont sujettes à une régulation sévère en termes de capital requis. Lehman, qui était une banque d'investissement, n'était pas dans cette situation. En 2007, par exemple, son levier était de 31 : 1, signifiant qu'une baisse de 3 à 4 % de la valeur des actifs suffisait à balayer le capital !

Dick Fuld, le CEO de Lehman, encourageait cette culture de la prise de risque. On lui attribue la phrase suivante adressée à ses collaborateurs : « Chaque jour est une bataille pendant laquelle il faut tuer l'ennemi. » Le responsable du contrôle

des risques de Lehman était compétent, mais n'avait pas vraiment voix au chapitre (il ne faisait plus partie du comité exécutif depuis 2007).

Les risques pris par Lehman incluaient notamment des positions très importantes sur les actifs dérivés liés aux fameux prêts subprimes que nous décrirons au chapitre 8. De plus, la plupart des financements étaient à court terme. Quand la confiance du marché s'est érodée, les prêteurs ont refusé de renouveler leurs concours, entraînant rapidement la faillite. Lehman était très actif sur les marchés dérivés de gré à gré et détenait des centaines de milliers de positions, avec plus de 8 000 contreparties. Ces dernières devaient en général fournir des dépôts de garantie et Lehman utilisait souvent ces fonds pour d'autres opérations. On imagine bien à quel point il peut être difficile ensuite de retrouver qui doit combien à qui… et quand !

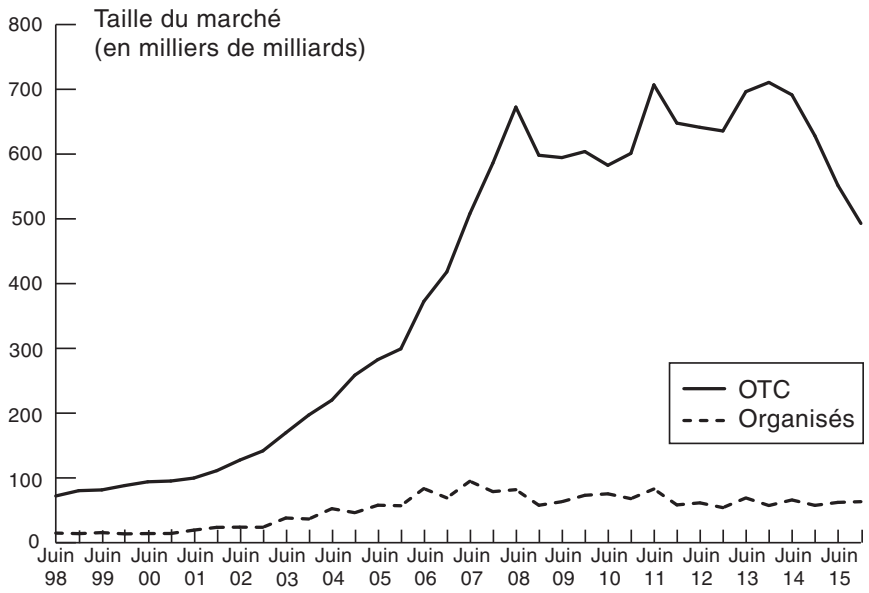
La taille du marché

Les montants échangés sur les actifs dérivés sont énormes, que ce soit sur les marchés organisés ou sur les marchés de gré à gré. Bien que les statistiques provenant des deux types de marchés ne soient pas exactement comparables, il est clair que le marché de gré à gré dans sa globalité est beaucoup plus important que le marché organisé. La Banque des règlements internationaux (www.bis.org) a commencé à collecter des statistiques en 1998. Le graphique 1.1 compare (a) le montant estimé de sous-jacent correspondant aux contrats sur le gré à gré entre juin 1998 et décembre 2015 et (b) les montants correspondants sur les marchés organisés pendant la même période. On voit qu'en décembre 2015 le gré à gré atteint un montant de 492 900 milliards de dollars US (approximativement cinq fois le PIB mondial), alors que sur les marchés organisés, le montant atteint « seulement » 63 300 milliards de dollars US. Le graphique 1.1 montre que la croissance a cessé depuis 2007. Une des raisons est la pratique de la *compression*, qui consiste, pour deux ou plusieurs contreparties, à restructurer des transactions entre elles de sorte à réduire le montant du principal sous-jacent.

Encadré 1.2 Le risque systémique

Le risque systémique est le risque que le défaut d'une institution financière ait un effet boule de neige conduisant aux défauts d'autres institutions financières, et menace ainsi la stabilité du système financier dans son ensemble. Les montants des transactions de gré à gré entre banques sont colossaux. Si une banque A fait défaut sur une transaction avec une banque B, cette dernière peut enregistrer une perte importante qui peut la conduire au défaut sur ses transactions avec une autre banque C, etc.

Le système financier a survécu aux faillites de Drexel en 1990 et de Lehman Brothers en 2008, mais les régulateurs continuent d'être vigilants. Pendant la crise de 2007 à 2008, de nombreux établissements ont été sauvés par les gouvernements (et donc par les contribuables) car ceux-ci craignaient la réalisation d'un risque systémique.



Graphique 1.1 : Tailles respectives des marchés organisés et de gré à gré

Pour interpréter ces chiffres, il faut garder à l'esprit que le montant de sous-jacent associé à un contrat ne représente pas la valeur du contrat. Considérons par exemple un contrat engageant une entreprise britannique à acheter 100 millions de dollars US dans un an à un taux de change fixé. Le montant de sous-jacent de la transaction est de 100 millions de dollars US, alors que la valeur du contrat peut n'être que de 1 million de dollars US à un instant donné.

La BRI estime que la valeur totale des contrats sur le marché de gré à gré en décembre 2015 était de l'ordre de 14 500 milliards de dollars US[1].

1.3 Les contrats forward

Un contrat forward est un actif dérivé très simple. C'est un engagement ferme à acheter ou à vendre un actif (appelé sous-jacent) à une date future donnée pour un prix convenu. Il se distingue d'un contrat au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement. Un contrat forward est échangé sur un marché OTC, le plus souvent entre deux établissements financiers ou entre un établissement financier et un client. La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite *longue*, alors que celle qui s'engage à le vendre prend une position dite *courte*. Les contrats forward sont très prisés sur le marché des changes. Les plus grandes banques ont souvent une équipe spécialisée sur ces contrats au sein de leur département de change.

Le tableau 1.1 donne un exemple de cotation de ces contrats sur le taux de change euro/dollar US. La cotation donne la valeur d'un euro en dollar US. La première colonne indique l'horizon du contrat, c'est-à-dire le délai entre la prise de position et la réalisation de l'achat ou la vente de devises. La deuxième donne les taux de change auxquels

1. Un contrat qui vaut 1 million de dollars pour une des parties et −1 million pour l'autre est compté pour un million de dollars.

la banque est prête à acheter les euros, et la troisième les taux de change auxquels elle est prête à vendre.

Tableau 1.1 : Exemple de taux de change spot et forward euro/dollar US

	Bid	**Ask**
Spot	1,3531	1,3535
Forward 1 mois	1,3520	1,3525
Forward 3 mois	1,3498	1,3503
Forward 6 mois	1,3465	1,3471
Forward 1 an	1,3399	1,3405

Par exemple, pour une transaction spot (mise à disposition immédiate de l'actif), l'institution est prête à acheter 1 € en payant 1,3531 \$, ou prête à vendre immédiatement 1 € contre paiement de 1,3535 \$. Pour une transaction forward à 6 mois, la banque est prête à acheter l'euro 1,3465 \$, etc. Ces cotations sont valides pour des transactions de montants très élevés. Tout particulier ayant voyagé sait qu'au guichet des banques l'écart entre le prix d'achat et le prix de vente est beaucoup plus important.

Les contrats forward peuvent être utilisés pour couvrir le risque de change. Supposons que le trésorier d'une entreprise américaine sache que, dans six mois, il devra décaisser 1 million d'euros et qu'il souhaite se protéger contre les variations du taux de change. À l'aide des cotations du tableau 1.1, il peut s'engager à acheter un euro dans six mois 1,3471 \$. L'entreprise a alors une position longue sur un forward à 6 mois au taux de 1,3471. Elle s'est donc engagée auprès de la banque qui cote ces taux de change à payer 1,3471 million de dollars US pour recevoir 1 million d'euros. Symétriquement, la banque a une position courte sur un forward 6 mois l'engageant à livrer 1 million d'euros et elle recevra en contrepartie 1,3471 million de dollars US.

Les flux des contrats forward

Considérons la position prise par l'entreprise dans la transaction précédente. Le contrat oblige l'entreprise à acheter 1 million d'euros dans six mois pour 1,3471 million de dollars US. Si le taux de change monte, par exemple à 1,36 à la fin des six mois, la valeur du contrat forward sera $12\,900\ \$ = 1\,360\,000\ \$ - 1\,347\,100\ \$$. De la même façon, si le taux de change passe à 1,34, le contrat forward a une valeur négative pour l'entreprise égale à $-7\,100\ \$$, puisqu'en achetant 1 million d'euros, elle paiera $1\,347\,100\ \$$, alors que sur le marché au comptant, elle aurait payé $1\,340\,000\ \$$.

De manière générale, le flux (on dit aussi payoff) engendré par une position longue sur un forward s'écrit :

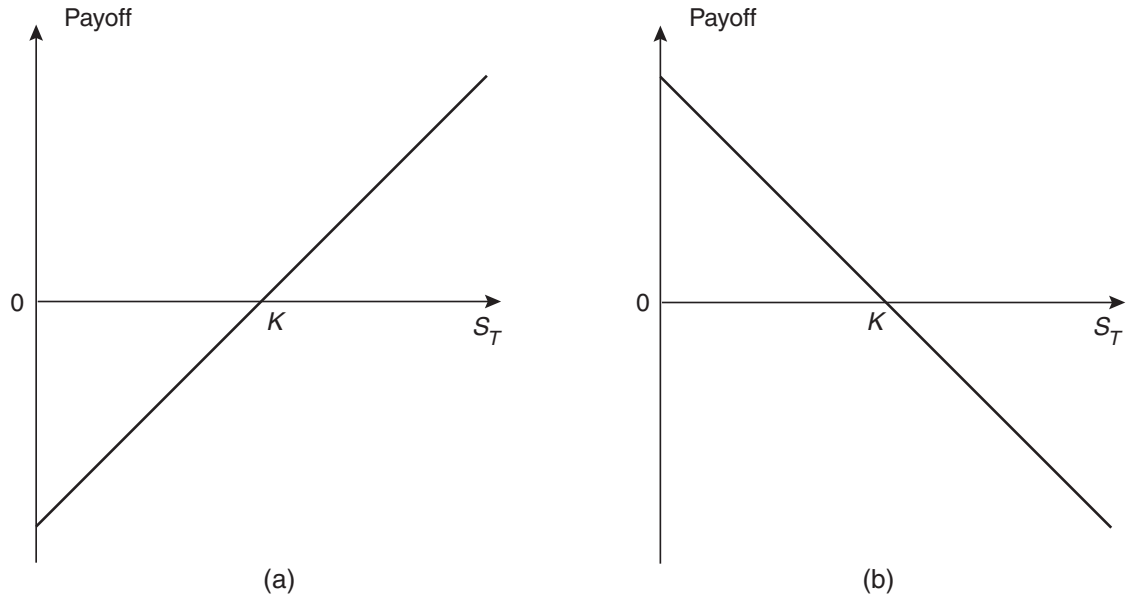
$$S_T - K$$

où K est le prix de livraison de l'actif sous-jacent et S_T le prix spot de cet actif à la date T, échéance du contrat.

De la même façon, le payoff d'une position courte sur un forward s'écrit :

$$K - S_T$$

Dans les deux situations, les payoffs peuvent être positifs ou négatifs. Ils sont illustrés dans le graphique 1.2. Comme un contrat forward n'engendre pas de flux initial, le payoff terminal représente aussi le gain ou la perte du trader sur le contrat.



Graphique 1.2 : Payoffs d'un contrat forward : (a) position longue, (b) position courte ; prix de livraison K, prix de l'actif à l'échéance du contrat S_T

Prix forward et prix spot

La relation entre prix spot et prix forward sera examinée plus en détail au chapitre 5. Dans cette section, nous montrons simplement pourquoi ces deux prix sont liés, en considérant l'exemple d'une action qui ne paie pas de dividende et cote 60 €. Vous pouvez emprunter à 5 % pour un an. Quel doit être le prix forward de cette action ?

La réponse est simple : 60 € capitalisés sur un an au taux de 5 %, c'est-à-dire 63 €. Si le prix forward était plus élevé, par exemple 67 €, il vous suffirait d'emprunter 60 €, d'acheter une action et de la revendre par l'intermédiaire d'un contrat forward au prix de 67 € dans un an. Après le remboursement de l'emprunt, le profit serait de 4 €, sans aucun risque ! Symétriquement, si le prix forward était de 58 €, il suffirait de vendre l'action à découvert, de placer pendant un an les 60 € ainsi obtenus, de racheter l'action à 58 € par l'intermédiaire du contrat forward et de récupérer le fruit du placement, soit 63 €. Le profit serait cette fois de 5 €.

1.4 Les contrats futures

Un contrat futures est, à l'instar d'un contrat forward, un accord entre deux parties pour acheter ou vendre un actif donné à une date future fixée et pour un prix convenu. Les

contrats futures sont négociés sur des marchés organisés, contrairement aux contrats forward. Les autorités de marché définissent des contrats standardisés pour assurer la liquidité. Comme, dans ce cas, les deux parties prenantes d'un contrat ne se connaissent pas, il existe un mécanisme qui permet d'assurer à l'acheteur et au vendeur la bonne fin des opérations.

Aux États-Unis, les marchés de contrats futures les plus importants sont le Chicago Board of Trade (CBOT) et le Chicago Mercantile Exchange (CME). Ils sont maintenant regroupés au sein du CME Group. En Europe, les marchés importants sont Euronext.Liffe et l'Eurex. Sur ces marchés et sur bien d'autres à travers le monde, une très large palette de contrats est proposée, contrats portant sur des matières premières ou des actifs financiers. Les matières premières vont de l'or aux carcasses de porc, en passant par le sucre, le cuivre ou la laine. Les actifs financiers peuvent être des indices d'actions, des devises, des obligations du Trésor, etc.

Des détails sur le système d'appels de marge, les procédures de compensation quotidienne, le rôle de la chambre de compensation, les prix offerts et demandés, sont donnés au chapitre 2.

1.5 Les options

La majorité des options négociées sur les marchés organisés sont aujourd'hui de type américain. Il en existe de deux types. Une option d'achat (appelée *call* par la suite) donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu. Une option de vente (*put*) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. Ce prix est appelé prix d'exercice (*strike*) ; la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance. Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine. En revanche, si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne [2]. La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain. Le plus souvent, si le sous-jacent est une action, un contrat d'option donne le droit d'acheter ou de vendre 100 actions sur les marchés américains et 10 sur le marché français.

Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites de celles des options européennes.

Aux États-Unis, le marché organisé le plus important est le Chicago Board Options Exchange (www.cboe.com). Sur ce marché, un contrat donne le droit d'acheter ou de vendre 100 actions au prix d'exercice spécifié. Cette quotité semble raisonnable car les actions s'échangent le plus souvent par multiples de 100. La quantité de titres sous-jacents par contrat dépend cependant du prix de ce sous-jacent. En effet, si une action française cote 0,50 €, les contrats d'options porteront sur un nombre plus élevé de titres sous-jacents que si l'action cote 150 €.

2. Il n'y a aucun lien entre ces appellations et les lieux de cotation. Des options européennes sont cotées sur les marchés américains et des options américaines sur les marchés européens.

Les tableaux 1.2 (calls) et 1.3 (puts) donnent les prix bid et ask des options sur Google le 3 mai 2016 (Le ticker est GOOG et l'action s'appelle aujourd'hui Alphabet Inc.). Les prix correspondants pour l'action sous-jacente sont 695,86 $ – 696,25 $. Les prix d'exercice vont de 660 $ à 740 $ et les maturités proposées sont juin 2016, septembre 2016 et décembre 2016.

Tableau 1.2 : Prix des options d'achat sur Alphabet Inc. (Google) le 3 mai 2016. L'action traite à 695,86 $ (bid) – 696,25 $ (ask).

Prix	Juin 2016		Septembre 2016		Décembre 2016	
d'exercice ($)	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
660	43,40	45,10	60,80	62,70	72,70	76,70
680	29,20	30,60	47,70	50,70	60,90	64,70
700	18,30	18,90	37,00	39,20	49,70	52,50
720	9,90	10,50	27,50	29,50	40,10	42,80
740	4,70	5,20	19,80	21,60	31,40	34,40

Source : CBOE

Tableau 1.3 : Prix des options de vente sur Alphabet Inc. (Google) le 3 mai 2016. L'action traite à 695,86 $ (bid) – 696,25 $ (ask).

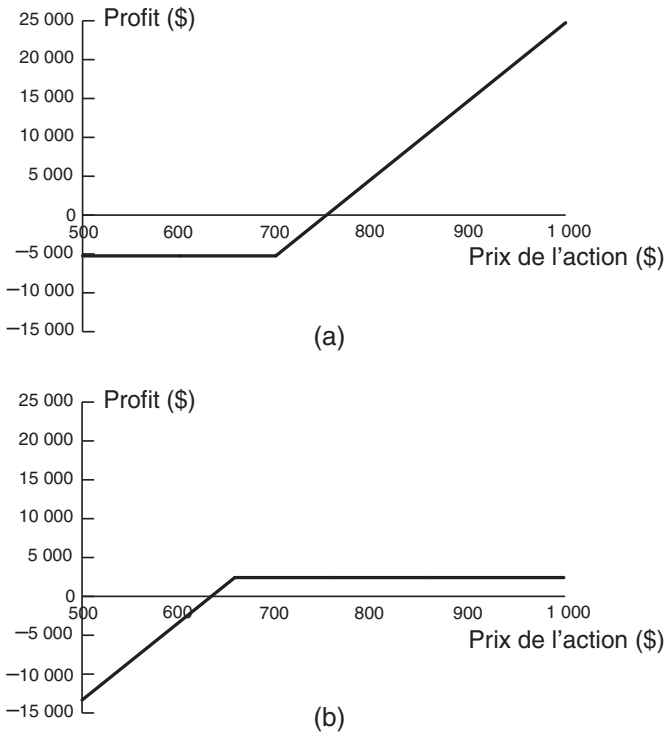
Prix	Juin 2016		Septembre 2016		Décembre 2016	
d'exercice ($)	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
660	7,50	8,20	24,20	26,20	35,60	38,10
680	13,30	14,00	31,90	33,80	43,40	46,00
700	21,70	23,00	40,80	42,70	52,40	55,20
720	33,10	34,80	51,10	53,20	62,60	65,20
740	47,70	49,60	63,10	65,20	74,10	76,70

Source : CBOE

On peut d'ores et déjà insister sur le fait qu'une option donne à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre. C'est ce qui distingue de manière fondamentale les options des contrats forward ou futures. Bien sûr, cela signifie que s'il ne coûte rien de prendre position sur un contrat futures, il y a un coût initial à l'acquisition d'un contrat d'option.

Par ailleurs, les tableaux 1.2 et 1.3 permettent d'illustrer quelques propriétés des options qui seront détaillées au chapitre 11. On constate que les prix des calls (puts) sont décroissants (croissants) par rapport au prix d'exercice et que les prix des deux types d'options augmentent avec la maturité (des cas particuliers peuvent cependant apparaître).

Comme il existe deux types d'options (calls et puts) et que chaque transaction fait intervenir un acheteur et un vendeur, il y a quatre positions possibles. Le graphique 1.3 représente les gains (pertes) des acheteurs de calls (a) et des vendeurs de puts (b) en fonction du prix du support. Le prix d'exercice du call (put) est de 700 $ (660 $) et son échéance est décembre (septembre) 2016.



Graphique 1.3 : Profit net pour (a) l'achat d'un call sur 100 actions Google, avec un prix d'exercice de 700 $ et une échéance décembre et (b) la vente d'un put sur 100 actions Google, avec un prix d'exercice de 660 $ et une échéance septembre

L'acheteur du call va payer le prix ask, soit 52,50 $ par unité de sous-jacent, c'est-à-dire 5 250 $ pour le contrat. La contrepartie (inconnue de l'acheteur sur un marché organisé) est alors en position courte sur ce même contrat. Si le prix de l'action Google ne dépasse pas 700 $ à l'échéance, l'acheteur n'aura pas intérêt à exercer son droit et il perdra ses 5 250 $.

En revanche, si le titre atteint par exemple 900 $, l'acheteur exerce l'option, paie 700 $ par titre et peut revendre à 900 $, soit un gain de 20 000 $, desquels il faut déduire le coût initial de 5 250 $ pour aboutir à un profit net de 14 750 $ [3].

Considérons maintenant un investisseur qui vend le put de prix d'exercice 660 $ et d'échéance septembre.

Il reçoit le prix bid, soit 2 420 $ pour les 100 unités de sous-jacent au contrat. Si l'action se maintient au-dessus de 660 $, l'acheteur n'exerce pas l'option et notre vendeur conserve

3. On néglige ici l'actualisation. En théorie, les 20 000 $ devraient être actualisés de la date d'échéance à la date de départ, c'est-à-dire le 3 mai, lorsqu'on calcule le profit.

les 3 100 $. En revanche, si l'action chute en deçà de 660 $, le vendeur est obligé d'acheter Google à 660 $ l'unité. Si le prix coté est par exemple de 600 $, la perte s'élève à 6 000 $, de laquelle il faut déduire les 2 420 $ encaissés pour obtenir une perte nette de 3 580$.

Ce sujet sera approfondi plus loin, mais on peut déjà remarquer qu'il y a quatre positions de base sur un marché d'options :

1. L'achat de call ;
2. L'achat de put ;
3. La vente de call.
4. La vente de put.

On emploie, comme pour les contrats forward et futures, les expressions *position longue* pour les acheteurs et *position courte* pour les vendeurs.

1.6 Les intervenants

Le succès considérable des marchés d'options trouve son origine dans la capacité de ces derniers à attirer diverses catégories d'investisseurs. La liquidité, conséquence de ce succès, permet à tout investisseur souhaitant prendre une position en options de trouver une contrepartie.

Nous distinguerons trois catégories d'intervenants : les opérateurs en couverture, encore appelés *hedgers*, les spéculateurs et les arbitragistes. Les hedgers utilisent les contrats forward, les futures ou les options pour réduire leur exposition au risque de variation de la valeur des actifs sous-jacents à ces contrats. Les spéculateurs, quant à eux, prennent des positions qui sont des paris sur l'évolution future de ces sous-jacents. Les arbitragistes cherchent à profiter, en prenant position sur plusieurs contrats ou actifs, des incohérences momentanées dans les cotations. Les prochaines sections examinent les activités de ces trois catégories d'intervenants. L'encadré 1.3 illustre le fait que les hedge funds sont devenus des acteurs essentiels des marchés d'actifs dérivés.

Encadré 1.3 Les hedge funds

Les hedge funds figurent aujourd'hui parmi les plus gros consommateurs d'actifs dérivés, qu'ils utilisent aussi bien pour la couverture que pour la spéculation ou l'arbitrage. Contrairement aux fonds mutuels, ils sont peu réglementés et disposent d'importantes marges de manœuvre dans l'utilisation de ces produits. Les commissions exigées par les managers de ces fonds dépendent de la performance du fonds, mais peuvent atteindre 1 % à 2 % du montant investi, auxquels s'ajoutent 20 % des profits réalisés. Il y a environ 1 000 milliards de dollars US investis dans les hedge funds et des « fonds de fonds » ont même été créés pour construire des portefeuilles constitués de parts de différents hedge funds.

Les stratégies suivies par les hedge funds requièrent le plus souvent l'utilisation d'actifs dérivés pour construire une position de spéculation ou d'arbitrage.

Une fois le type de stratégie défini, le gérant du fonds doit :

1. Évaluer les risques auxquels expose la stratégie envisagée ;
2. Définir les risques qui sont acceptables et ceux qui doivent être couverts ;
3. Construire les stratégies de couverture des risques inacceptables.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de stratégies, avec leur dénomination en anglais (employée sur tous les marchés).

Long/Short equities : achats d'actions considérées comme sous-évaluées et vente à découvert d'actions considérées comme surévaluées, de sorte à neutraliser (ou considérablement atténuer) l'exposition au sens d'évolution du marché.

Convertible arbitrage : achat d'obligations convertibles et vente à découvert de l'action sous-jacente. La position sur l'action est gérée de manière dynamique en fonction de l'évolution du cours.

Distressed securities : achat de titres d'entreprises sous le coup d'une procédure de faillite (ou proches de cette situation).

Emerging markets : investissement dans la dette et les actions d'entreprises de pays émergents et/ou investissement dans la dette souveraine de ces pays.

Global macro : utilisation d'actifs dérivés pour spéculer sur l'évolution des taux d'intérêt et des taux de change.

Merger arbitrage : achat d'actions qui sont l'objet d'une offre publique de façon à faire un profit (modéré) si la transaction aboutit, au risque de réaliser une perte importante si elle n'est pas conclue.

1.7 Les opérateurs en couverture

Illustrons tout d'abord la façon dont un hedger peut réduire son risque en prenant une position sur un forward ou une option.

Un exemple de couverture avec des contrats forward

L'entreprise Importco, basée aux États-Unis, prévoit un décaissement de 10 millions d'euros dans trois mois pour des marchandises achetées en France. Les taux de change spot et forward cotés par une grande banque sont ceux du tableau 1.1. L'entreprise peut prendre une position longue sur un forward 3 mois au taux de 1,3503 \$/€. Ce choix fixerait le prix à payer pour les marchandises à 13,503 millions de dollars US. Notez que choisir de ne pas se couvrir peut donner un meilleur résultat ; si à la fin des trois mois, le taux de change spot est de 1,34 \$, l'absence de couverture entraîne un décaissement de 13,4 millions, inférieur à 13,503 millions. À l'inverse, si le taux de change spot est passé à 1,37 \$, les 10 millions d'euros coûtent 13,7 millions de dollars US et l'entreprise regrettera l'absence de couverture.

Considérons maintenant l'entreprise Exportco, qui exporte ses produits vers la France et doit recevoir 10 millions d'euros dans trois mois. Elle peut couvrir son risque de change par une position courte sur le forward 3 mois avec un taux de change de 1,3498 $, fixant ainsi sa recette en dollars US à 13,498 millions. La situation d'Exportco est symétrique de celle d'Importco ; si l'euro s'apprécie contre le dollar US, Exportco regrettera peut-être de s'être couverte, alors que si l'euro se déprécie, la recette de la position couverte sera supérieure à celle qui est obtenue en l'absence de couverture.

Cet exemple illustre un point essentiel de la couverture. La recette et la dépense sont connues d'avance, mais *a posteriori* rien ne dit que la solution retenue se révélera la meilleure.

Un exemple de couverture avec des options

Les options peuvent aussi être utilisées pour se couvrir. Considérons un investisseur qui détient 1 000 actions Total alors que l'action cote 53 €. L'investisseur craint qu'un ralentissement économique pénalise le cours. Il peut acheter 100 contrats de puts (10 unités de sous-jacent par contrat) avec un prix d'exercice de 45 € sur le marché d'options. Cela lui donne le droit de vendre 1 000 titres à 45 € par titre. Si l'option cote 2,50 €, chaque contrat coûte 25 €, soit un décaissement total de 2 500 €.

La stratégie coûte 2 500 € mais garantit que les titres pourront être revendus à un prix supérieur à 45 € pendant la durée de vie de l'option. Si le cours de Total chute sous ce seuil, les options seront exercées de façon que la vente rapporte 45 000 €. Si l'on tient compte du coût de l'option, l'encaissement net est de 42 500 €. En revanche, si le cours est supérieur à 45 €, l'option n'est pas exercée et expire sans valeur. Dans ce cas, la valeur des titres est supérieure à 45 000 € (ou 42 500 € si l'on tient compte du coût initial des options).

Une comparaison

Il y a donc une différence fondamentale entre une couverture par des contrats forward et une couverture par des options. Les forward sont conçus pour neutraliser le risque, en définissant un prix auquel le hedger achètera ou vendra. Les options, en revanche, procurent une assurance. Elles offrent aux investisseurs un moyen de se protéger contre des mouvements défavorables des cours, tout en leur laissant la possibilité de profiter des mouvements favorables. La contrepartie de cet avantage est le coût d'achat de l'option.

1.8 Les spéculateurs

Considérons maintenant l'usage des futures et des options par les spéculateurs. Alors que les hedgers cherchent à éliminer le risque lié aux variations de prix du sous-jacent, les spéculateurs vont, au contraire, prendre position pour parier sur le sens d'évolution du marché.

Un exemple de spéculation avec des futures

Supposons qu'un spéculateur américain pense, en février, que la livre sterling va se renforcer par rapport au dollar US dans les deux mois à venir, alors que le taux de change actuel est de 1,4470 \$/£. Il est prêt à miser l'équivalent de 250 000 £ sur cette anticipation. La stratégie la plus simple serait d'acheter 250 000 £ au cours de change d'aujourd'hui et d'attendre l'appréciation de la devise britannique. La livre sterling, une fois achetée, pourrait être placée au taux sans risque britannique. La seconde solution consiste à prendre une position longue sur quatre contrats cotés sur le CME Group, permettant d'acheter fin avril 250 000 £ (chaque contrat porte sur 62 500 £). Le prix futures est 1,4410 \$/£. Si, fin avril, le taux de change est passé à 1,5000, le contrat à terme engendre un profit de $(1{,}5000-1{,}4410)\times 250\,000 = 14\,750$ \$. La solution consistant à acheter la devise immédiatement aurait conduit à un profit de $(1{,}5000-1{,}4470)\times 250\,000 = 13\,250$ \$. En revanche, si le spéculateur s'est trompé et que le taux de change chute à 1,4000, la perte est de $(1{,}4000 - 1{,}4410) \times 250\,000 = -10\,250$ \$, alors qu'elle aurait été de $(1{,}4000 - 1{,}4470) \times 250\,000 = 11\,750$ \$ sur l'opération au comptant. Il apparaît que les deux opérations engendrent des profits et pertes différents, à l'avantage de l'opération sur les contrats futures. Nous verrons au chapitre 5 que, si l'on tient compte de l'intérêt payé en dollars US et reçu en livres sterling dans l'opération au comptant, les profits et pertes sont identiques dans les deux situations.

Quelle est alors la différence entre les deux opérations ? La première nécessite une mise initiale de 361 750 \$ (250 000 £ au taux de change initial) alors que, comme nous le verrons au chapitre 2, la seconde n'implique qu'une faible mise initiale (de l'ordre de 20 000 \$) qui doit être déposée par le spéculateur sur un compte de deposit (ou compte de marge). Le marché des futures autorise donc à bénéficier d'un effet de levier. Avec une mise modique, l'investisseur peut prendre une position spéculative importante.

Un exemple de spéculation avec des options

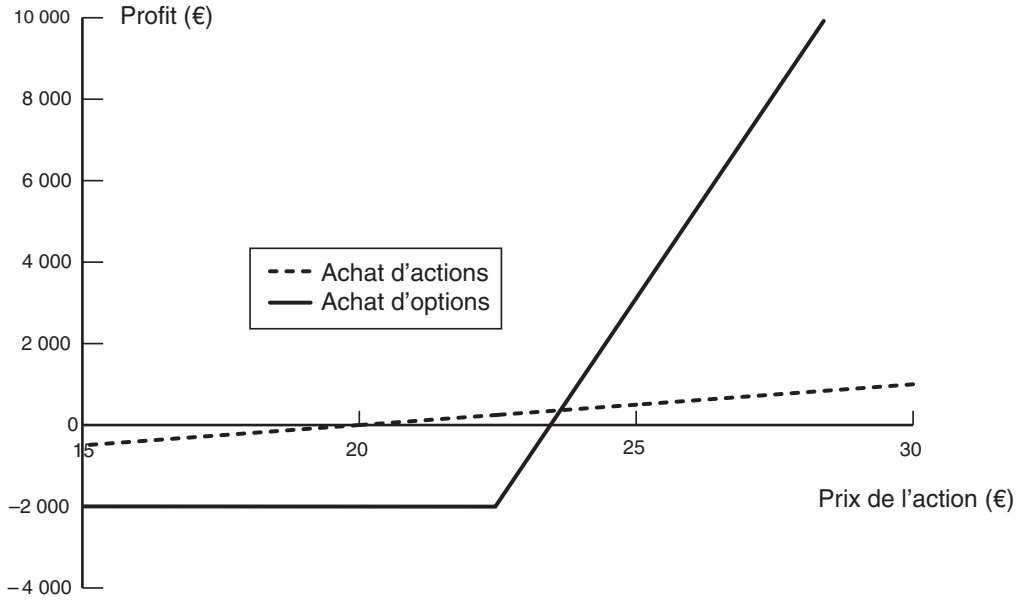
Considérons maintenant le cas d'une spéculation sur les options. En octobre, un spéculateur pense que le cours de Carrefour est susceptible d'augmenter dans les deux mois. Le prix actuel est de 20 €, et un call de prix d'exercice 22,50 € est actuellement coté 1 € pour l'échéance décembre. Le tableau 1.4 illustre deux possibilités de spéculation, en supposant que l'investisseur soit prêt à engager 2 000 €. La première consiste à acheter 100 actions, la seconde à acheter 2 000 options.

Tableau 1.4 : Comparaison des profits des deux stratégies, en investissant 2 000 € en octobre

	Prix de l'action fin décembre	
Stratégie	**15 €**	**27 €**
Achat des actions	−500 €	700 €
Achat des calls	−2 000 €	7 000 €

Si l'anticipation est correcte et si le cours de Carrefour passe à 27 €, la première opération engendre un profit de $(27-20)\times 100 = 700$ €. La seconde opération est beaucoup plus profitable, puisque l'option, à l'échéance du contrat, vaut $(27-22{,}5) = 4{,}50$ €. L'investisseur reçoit 9 000 €, desquels il faut déduire l'investissement initial, soit 2 000 € ; le profit net est donc de 7 000 €, soit dix fois plus qu'avec la première stratégie.

Les options entraînent aussi une perte plus élevée si l'anticipation ne se vérifie pas. En effet, si Carrefour vaut 15 € fin décembre, les options ont une valeur nulle et la perte est de 2 000 €, soit la totalité de l'investissement initial. La première stratégie entraîne, quant à elle, une perte de $(15-20)\times 100 = -500$ €. Le tableau 1.4 montre en fait que les options, comme les contrats futures, ont un effet de levier important.



Graphique 1.4 : Perte/profit net pour les stratégies alternatives de spéculation sur l'action et sur l'option. Le prix actuel de l'action est 20 €.

Une comparaison

Options et contrats futures se ressemblent car ils engendrent tous deux un effet de levier important. Il existe cependant une différence essentielle entre les deux. Quand un spéculateur utilise les contrats futures, pertes et gains potentiels sont très importants. Quand il a recours à l'achat d'options, la perte est limitée au montant payé pour acquérir ces options.

1.9 Les arbitragistes

La troisième catégorie d'opérateurs sur ces marchés est celle des arbitragistes. Leur objectif est d'assurer un profit en prenant simultanément position soit sur plusieurs actifs dérivés différents, soit sur un actif dérivé et son sous-jacent. Il s'agit, pour eux, de profiter d'éventuelles incohérences temporaires de prix entre différents titres ou contrats. Dans

les chapitres suivants, nous verrons plus en détail comment fonctionnent ces stratégies, mais pour le moment, nous allons illustrer cette démarche par un exemple simple.

Une action est simultanément cotée sur le London Stock Exchange (www.stockex.co.uk) et sur le New York Stock Exchange (www.nyse.com). Le titre vaut 100 £ à Londres et 140 $ à New York, alors que le taux de change est de 1,4300 $/£. Un arbitragiste peut simultanément acheter 100 unités du titre à New York et vendre la même quantité à Londres. Il obtient ainsi un profit immédiat égal à :

$$100 \times (1{,}43\ \$ \times 100 - 140\ \$) = 300\ \$$$

en dehors des coûts de transaction. Pour un investisseur individuel, les coûts de transaction rendraient ce type d'opération inintéressant, mais pour les grandes institutions financières supportant des coûts très faibles sur les marchés d'actions et de change, ce genre d'opportunités, quand elles se présentent, est évidemment très attractif. Notre exemple a une simple vertu pédagogique ; les opportunités d'arbitrage sur les marchés réels sont en général moins flagrantes !

Il est clair que ce type d'opportunités ne peut survivre très longtemps, du fait même de l'existence d'arbitragistes. La demande excédentaire du titre à New York va faire monter le prix sur le NYSE, et l'offre excédentaire à Londres va faire chuter le prix sur le London Stock Exchange. Très rapidement, les prix vont redevenir équivalents, compte tenu du taux de change en vigueur.

De manière générale, même si cela paraît paradoxal, l'existence d'arbitragistes implique que les opportunités d'arbitrage sont rares, mais surtout éphémères. Par conséquent, dans ce livre, la plupart des raisonnements sur les prix futures, forward ou sur les prix d'options font l'hypothèse de l'absence d'opportunités d'arbitrage.

1.10 Les dangers

Les actifs dérivés peuvent conduire à des résultats spectaculaires. Comme nous l'avons mentionné, ils peuvent être utilisés pour la couverture, la spéculation ou l'arbitrage. Certains traders qui sont normalement des arbitragistes peuvent devenir (consciemment ou non) des spéculateurs. Le résultat peut se révéler désastreux. L'exemple de Jérôme Kerviel, employé de la Société Générale, en est une illustration emblématique (voir encadré 1.4).

Pour éviter ce genre de problème, il est très important de mettre en place un contrôle des risques efficace, de façon à s'assurer que les actifs dérivés sont utilisés de la manière prévue. Les limites de risque doivent être clairement définies et contrôlées quotidiennement.

Cependant, des erreurs importantes peuvent être commises sans intention de fraude. Les activités et les risques pris par les traders dans la période précédant la crise de 2007 en sont une illustration. La plupart n'envisageaient pas une chute brutale des prix de l'immobilier, ni une telle augmentation de la corrélation des défauts sur les prêts immobiliers. Certains risk managers avaient pourtant tiré le signal d'alarme à propos

du marché immobilier. Mais dans les périodes d'euphorie, les Cassandre sont rarement écoutées. La leçon à tirer est que les institutions financières devraient toujours se poser la question suivante : « Que peut-il arriver de pire ? » suivie de : « Et si cela arrive, combien va-t-on perdre ? »

Encadré 1.4 La perte historique de la Société Générale en 2008

Les actifs dérivés peuvent être dangereux. Un des risques auxquels s'exposent les institutions financières est que des employés chargés de couvrir des positions ou d'arbitrer se transforment en spéculateurs.

Jérôme Kerviel a débuté sa carrière au middle office à la Société Générale en 2000. En 2005, il devient trader junior dans l'équipe « Delta One » de la banque. Il travaille essentiellement sur les indices DAX30, CAC40, EuroStoxx50 et leurs dérivés, afin d'exploiter les opportunités d'arbitrage pouvant survenir sur ces contrats (voir chapitre 5).

Jérôme Kerviel en vient à utiliser ses connaissances des procédures de contrôle des risques pour faire apparaître des opérations de spéculation comme des opérations d'arbitrage (normalement peu risquées). En fait, il prend des positions directionnelles importantes en créant des positions fictives dans l'autre sens pour donner l'illusion d'une absence de risque. Ces positions spéculatives portent sur plusieurs dizaines de milliards d'euros.

En janvier 2008, le pot aux roses est découvert. En trois jours, la banque liquide les positions, ce qui entraîne une perte de 4,9 milliards d'euros.

C'était, à cette date, la perte la plus importante due à des activités frauduleuses dans l'histoire de la finance.

Des pertes dues à des traders indélicats étaient déjà connues avant 2008. Par exemple, dans les années 1990, Nick Leeson, un employé de la banque Barings, avait le même genre de mission que Jérôme Kerviel. Son travail consistait à réaliser des arbitrages sur le contrat futures Nikkei 225 à Singapour et Osaka. Il en vint à transformer cette activité d'arbitrage en spéculation sur le Nikkei 225 en utilisant des futures et des options, perdant 1 milliard de dollars US et conduisant une banque bicentenaire à la faillite. En 2002, John Rusnack perdit 700 millions de dollars US au sein de Allied Irish Bank par des transactions sur le marché des changes. Ces exemples montrent qu'il est essentiel de fixer des limites strictes et d'exercer un contrôle sans faille pour veiller à ce qu'elles soient respectées.

Résumé

La croissance des marchés de produits dérivés a constitué un des faits marquants du monde financier des trente dernières années. Dans de nombreux cas, hedgers et spéculateurs préfèrent intervenir sur les dérivés plutôt que sur les sous-jacents. Certains actifs dérivés sont échangés sur des marchés organisés alors que d'autres le sont de gré à gré par des institutions financières et leurs clients, ou encore ajoutés à des émissions d'actions ou d'obligations.

Une grande partie de ce livre est consacrée à l'évaluation de ces produits. Il s'agit, en particulier, de présenter une approche unifiée et une méthodologie générale qui permettent d'évaluer tous les actifs dérivés, pas seulement les futures et les options.

Dans ce chapitre, nous avons jeté un premier regard sur les contrats forward, futures et sur les options. Un contrat forward ou futures est un engagement à acheter ou vendre une quantité donnée de sous-jacent à une date future spécifiée pour un prix donné. Une option donne le droit, mais pas l'obligation, d'acheter ou de vendre un sous-jacent. Un call (put) est le droit d'acheter (de vendre) une quantité donnée d'un actif sous-jacent à une date future spécifiée, pour un prix convenu. Les trois catégories, forward, futures et options, portent sur une grande variété de supports.

Trois grands types d'intervenants peuvent être identifiés, les hedgers ou opérateurs en couverture, les spéculateurs, et enfin les arbitragistes. Les hedgers supportent un risque lié à l'actif sous-jacent ; ils utilisent alors les marchés dérivés pour transférer ce risque à d'autres opérateurs. Les spéculateurs souhaitent parier sur l'évolution du sous-jacent et tentent de profiter de l'effet de levier fourni par les actifs dérivés. Les arbitragistes cherchent, quant à eux, à profiter des incohérences des prix relatifs de plusieurs actifs.

Références complémentaires

Chancellor E., *Devil Take the Hindmost – A History of Financial Speculation*, Farra Straus Giroux, New York, 1999.

Merton R. C., "Finance Theory and Future Trends : The Shift to Integration", *RISK*, 12 (7), juillet 1999, 48-51.

Miller M. H., "Financial Innovation : Achievements and Prospects", *Journal of Applied Corporate Finance*, 4, hiver 1992, 4-11.

Zingales L., "Causes and Effects of the Lehman Bankruptcy", *Testimony before the Committee on Oversight and Government Reform*, United States House of Representatives, October 6, 2008.

Problèmes et exercices

1.1 Quelle est la différence entre une position longue et une position courte sur un forward ?

1.2 Expliquez précisément la différence entre hedgers, spéculateurs et arbitragistes.

1.3 Quelle est la différence entre (a) prendre une position longue sur un forward avec un prix forward de 50 € et (b) acheter un call de prix d'exercice 50 € ?

1.4 Expliquez la différence entre une vente de call et un achat de put.

1.5 Un investisseur américain prend une position courte pour vendre 100 000 livres sterling au taux de 1,5000 dollar US par livre sterling. Combien gagne-t-il ou perd-il si à l'échéance du contrat le taux de change est de (a) 1,4900 dollar par livre, (b) 1,5200 dollar par livre.

1.6 Un trader prend une position courte sur un contrat futures sur le coton avec un prix futures de 50 cts la livre. La quantité sous-jacente au contrat est de 50 000 livres. Combien gagne ou perd le trader si le prix du coton à la fin du contrat est (a) 48,20 cts ou (b) 51,30 cts par livre ?

1.7 Vous vendez un put sur Carrefour au prix d'exercice 25 € avec une durée de vie de trois mois. Carrefour cote aujourd'hui 22 € et le contrat porte sur 10 titres. À quoi vous êtes-vous engagé ? Combien pouvez-vous gagner ou perdre ?

1.8 Quelle est la différence entre un marché organisé et un marché de gré à gré ? Que représentent les prix bid et ask cotés par un market maker sur un marché de gré à gré ?

1.9 Vous souhaiteriez spéculer sur la hausse d'une certaine action. Son prix est aujourd'hui de 29 € et un call à trois mois de prix d'exercice 30 € cote aujourd'hui 2,90 €. Vous avez 5 800 € à investir. Définissez deux stratégies conformes à vos anticipations, la première sur l'action, la seconde sur l'option. Quels sont vos gains (pertes) potentiels sur chacune des deux stratégies ?

1.10 Vous avez en portefeuille 5 000 actions cotant 25 € chacune. Comment l'achat de puts peut-il vous procurer une assurance contre la baisse des cours dans les quatre mois qui viennent ?

1.11 Quand une entreprise émet des actions, elle obtient des fonds. En est-il de même lorsqu'un contrat d'option sur cette action est créé ? Justifiez votre réponse.

1.12 Expliquez pourquoi un contrat futures peut être utilisé pour se couvrir ou pour spéculer.

1.13 Un call, échéance mars et prix d'exercice 50 €, cote 2,50 €. Il est détenu jusqu'à l'échéance. Dans quelles circonstances le détenteur fera-t-il un profit et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

1.14 Un put, échéance juin et prix d'exercice 60 €, cote 4 €. Dans quelles circonstances le vendeur de cette option fera-t-il un profit à l'échéance et dans quels cas l'option sera-t-elle exercée ? Construisez le graphe des profits du vendeur du put à l'échéance du contrat en fonction du prix du support.

1.15 Un call, échéance septembre, de prix d'exercice 20 € est vendu par un investisseur. Nous sommes en mai, le prix du support est de 18 € et le call cote 2 €. Décrivez les flux de fonds de l'investisseur s'il conserve le call jusqu'à l'échéance et si le cours de l'action est de 25 € à cette date.

1.16 Un investisseur vend 4 € un put, échéance décembre, de prix d'exercice 30 €. Dans quelles circonstances réalise-t-il un gain ?

1.17 Une entreprise sait qu'elle recevra un certain montant de devise étrangère dans quatre mois. Quel type d'option est approprié pour couvrir le risque de change ?

1.18 Une entreprise française s'attend à recevoir 1 million de dollars US dans six mois. Expliquez comment elle peut couvrir le risque de change avec (a) un contrat forward et (b) une option.

1.19 Un trader prend une position courte sur un forward de 100 millions de yens. Le taux de change forward est de 0,0080 € par yen. Combien gagne ou perd le trader si le taux de change à la fin du contrat est (a) 0,0074 € ou (b) 0,0091 € par yen ?

1.20 Le CME Group propose un contrat futures sur obligations du Trésor. Quels sont les types d'opérateurs susceptibles d'utiliser ce contrat ?

1.21 « Options et contrats futures sont des jeux à somme nulle. » Qu'entend-on par cette affirmation ?

1.22 Décrivez le profit engendré par le portefeuille suivant : une position longue sur un contrat forward et sur un put européen, les deux portant sur le même sous-jacent et ayant même maturité. Le prix d'exercice du put est égal au prix forward du contrat au moment où le portefeuille est constitué.

1.23 Dans les années 1980, la Bankers Trust a développé un produit appelé ICON (*Index Currency Option Note*). Il s'agit d'obligations pour lesquelles le souscripteur reçoit à l'échéance un montant dépendant d'un taux de change. Considérons par exemple le cas d'un contrat passé avec la Long Term Credit Bank of Japan. Le contrat stipulait que si le taux de change yen/dollar US était supérieur à 169 ¥/$, le souscripteur recevait 1 000 $. Si le taux de change était inférieur à ce seuil, le paiement final était défini (en dollars US) par :

$$1\,000 - \max\left[0\,;1\,000\left(\frac{169}{S_T} - 1\right)\right]$$

où S_T désigne le taux de change à la date de maturité T. Lorsque ce taux descend en deçà de 84,5 ¥/$, le souscripteur ne reçoit rien. Montrez que cette obligation est la combinaison d'une obligation classique et de deux options.

1.24 Le 1er juillet 2017, une entreprise prend une position longue sur un forward pour acheter 10 millions de yens le 1er janvier 2018. Le 1er septembre 2017, elle prend une position courte sur le même type de contrat, c'est-à-dire pour vendre 10 millions de yens au 1er janvier 2018. Décrivez les payoffs de cette stratégie.

1.25 Supposons que les taux de change spot et forward (en dollar US/euro) soient les suivants :

Spot	: 1,3580
Forward 90 jours	: 1,3556
Forward 180 jours	: 1,3518

Quelles sont les opportunités d'arbitrage dans les cas suivants :

a. un call d'échéance 6 mois permettant d'acheter un euro pour 1,32 $ cote 2 cts ?

b. un put à 90 jours permettant de vendre un euro pour 1,39 $ cote 2 cts ?

1.26 Un investisseur achète pour 3 € un call de prix d'exercice 30 €. Peut-il, à la fois, décider rationnellement d'exercer l'option, et perdre de l'argent ? Justifiez votre réponse.

1.27 Un investisseur vend pour 5 € un put de prix d'exercice 40 €. Quels sont les gains et pertes maximaux possibles sur cette stratégie ? Votre réponse est-elle modifiée si l'option est un call ?

1.28 « L'achat d'un put sur une action quand on possède l'action est une forme de police d'assurance. » Commentez cette affirmation.

Questions complémentaires

1.29 Le 3 mai 2016, un investisseur envisage soit d'acheter 100 titres Google, soit de prendre une position longue sur un contrat de call (portant sur 100 actions) échéance septembre. Comme indiqué dans le tableau 1.2, le prix ask de l'action est de 696,25 $ et celui du call de prix d'exercice 700 $ est égal à 39,20 $. Pour chacune des deux stratégies déterminez (a) le coût initial, (b) le gain total si le prix final de l'action est de 800 $ et (c) la perte si le prix final est de 600 $. Supposez que l'option n'est pas exercée avant l'échéance et que, si c'est l'action qui est achetée, elle est revendue à l'échéance du contrat d'option.

1.30 Qu'est-ce que l'arbitrage ? Expliquez l'opportunité d'arbitrage sous-jacente à la situation suivante. Une entreprise est cotée 50 € à Paris et 55 $ à New York. Le taux de change est de 1,3 $ pour 1 €. Expliquez comment vont évoluer ces prix quand les arbitragistes vont intervenir.

1.31 Un trader A prend une position longue sur un contrat forward l'engageant à acheter une action pour 1 000 $ dans un an. Un trader B achète un call sur cette même action, de prix d'exercice 1 000 $ et d'échéance un an. Quelle est la différence de position entre A et B ? Montrez graphiquement l'évolution du profit de chacun des deux traders dans un an en fonction du prix de l'action à cette date.

1.32 En mars, un investisseur donne instruction à son intermédiaire financier de vendre un put sur action d'échéance juillet. L'action cote 42 € et le prix d'exercice est de 42 €. L'option coûte 3 €. Qu'a accepté l'investisseur en passant cet ordre ? Dans quel cas de figure cette stratégie sera-t-elle profitable ? Quels sont les risques encourus ?

1.33 Une entreprise française sait qu'elle devra payer 3 millions de dollars US dans trois mois. Le taux de change spot est de 1,4000 $/€. Expliquez comment futures et options peuvent être utilisés pour couvrir cette exposition au risque de change.

1.34 Une action cote 29 €. Un investisseur achète un call sur cette action dont le prix d'exercice est 30 € et vend un autre call sur cette même action avec un prix d'exercice de 32,5 €. Les deux options coûtent respectivement 2,75 € et 1,50 €. Ces deux options ont même maturité. Décrivez la position détenue par l'investisseur.

1.35 L'or cote 1 200 $ l'once, et le prix forward pour livraison dans un an est de 1 300 $ l'once. Un arbitragiste peut emprunter à 3 % par an. Que doit-il faire ? Vous supposerez que le coût de stockage de l'or est nul et que l'or ne rapporte pas de revenus intermédiaires.

1.36 Une action cote aujourd'hui 94 € et les calls à 3 mois avec un prix d'exercice de 95 € valent 4,70 €. Un investisseur pense que le cours va monter dans les

trois mois. Il décide d'acheter soit 100 actions, soit 2 000 options. Les deux imposent d'engager 9 400 €. Quels conseils lui donneriez-vous ? À partir de quel prix d'action la stratégie d'option devient-elle profitable ?

1.37 Le 3 mai 2016, un investisseur possède 100 titres Google. Comme indiqué dans le tableau 1.2, le prix de l'action est proche de 696 $, et un put d'échéance décembre et de prix d'exercice 660 $ cote 38,10 $. L'investisseur compare deux solutions pour limiter son risque de perte. La première consiste en l'achat du put décembre de prix d'exercice 660 $, la seconde consiste à passer un ordre de vente de ses actions dès que le prix passe sous les 660 $. Discutez les avantages et inconvénients de ces deux stratégies.

1.38 Une obligation émise par Standard Oil fonctionne de la manière suivante. Le souscripteur ne reçoit pas d'intérêt. Cependant, à la date d'échéance, l'émetteur lui promet de recevoir 1 000 $ auxquels s'ajoute un montant qui dépend du prix du pétrole à cette date. Ce montant est défini comme 170 fois la différence (si elle est positive) entre le prix du baril et 25 $. Le paiement maximal est limité à 2 250 $ (ce qui correspond à un prix du baril à 40 $). Montrez que cette obligation est la combinaison d'une obligation classique et de deux options ; une position longue sur un call (sur le baril de pétrole) de prix d'exercice 25 $ et une position courte sur un call de même support, de prix d'exercice 40 $.

1.39 Un investisseur achète pour 3 € un call européen de prix d'exercice 45 € et, pour 4 €, un put européen de prix d'exercice 40 €. Les deux options ont la même maturité. Construisez le graphe des profits à l'échéance en fonction du prix du support.

1.40 Sachant que le taux de change dollar US/livre sterling est de 1,5543 $/£ aujourd'hui :

a. comment une entreprise américaine importatrice nommée Importco peut-elle, en utilisant des options de change, se garantir un taux de change inférieur à 1,57 ?

b. comment une entreprise exportatrice peut-elle s'assurer un taux de change supérieur à 1,53 ?

Utilisez DerivaGem pour calculer le coût de mise en place de ces couvertures dans chaque cas, en supposant que la volatilité du taux de change est de 12 %, le taux d'intérêt US de 2 % et le taux britannique de 1 %. L'horizon de couverture est de 3 mois.

1.41 Un trader achète un call européen et vend un put européen. Les options ont même sous-jacent, même prix d'exercice et même maturité. Décrivez la position prise par le trader. Dans quel cas le prix du call est-il égal au prix du put ?

Chapitre 2

Le fonctionnement des marchés de futures

Au chapitre 1, nous avons décrit les forward et les futures comme des engagements à acheter ou vendre un actif à une date future donnée, pour un prix convenu. Les contrats futures sont négociés sur des marchés organisés, et leurs caractéristiques sont standardisées. À l'inverse, les contrats forward sont des accords bilatéraux entre deux institutions financières ou entre une institution et une entreprise.

Ce chapitre décrit plus précisément le fonctionnement des marchés de futures, notamment la définition des contrats, le fonctionnement des appels de marge, l'organisation des transactions ou encore les cotations. Nous comparons aussi les séquences de flux engendrées par les contrats forward et futures. Nous expliquons également comment certains principes développés par les marchés organisés s'appliquent maintenant aux marchés de gré à gré.

2.1 Rappels

Nous avons vu au chapitre 1 que les contrats futures sont aujourd'hui échangés sur de nombreux marchés à travers le monde. Les deux marchés les plus importants aux États-Unis sont le Chicago Board of Trade et le Chicago Mercantile Exchange, réunis dans le CME Group (www.cmegroup.com). En Europe, les deux plus grands marchés sont le London International Financial Futures and Options Exchange, racheté par Euronext depuis 15 ans (www.euronext.com), et Eurex (www.eurexchange.com), résultat de l'association des Bourses allemande et suisse. Les autres marchés importants sont le Bolsa de Mercadorias y Futuros (www.bmfbovespa.com.br) et le Tokyo Financial Exchange (www.tfx.co.jp). Pour une liste plus détaillée, reportez-vous au tableau des principaux marchés organisés fourni à la fin de cet ouvrage.

Nous allons concentrer notre attention sur un exemple, afin de décrire précisément comment opèrent ces marchés. Supposons qu'à une date t_1 (le 5 juin par exemple), un investisseur localisé dans la ville V appelle son intermédiaire financier (appelé aussi *bro-*

ker), pour lui demander d'acheter 5 000 boisseaux de maïs, livraison en septembre de la même année (date T). Le broker transmet immédiatement cet ordre à un membre de marché ou trader sur le parquet du marché adéquat (le CME Group par exemple). Il s'agit donc de prendre une position longue sur un contrat de maïs portant sur 5 000 boisseaux, dont l'échéance est le mois de septembre. Au même moment, un autre investisseur, situé dans la ville W, passe l'ordre de vente d'un contrat du même type sur le même marché. Les deux ordres de sens opposé sont confrontés sur le marché et un prix d'équilibre, pour la livraison du maïs en septembre, résulte de la confrontation de l'offre et de la demande. L'investisseur de V a donc pris une position longue sur le contrat futures, et l'investisseur de W une position courte.

Le prix auquel les deux investisseurs conviennent d'échanger à l'échéance est appelé « prix futures ». Supposons que ce soit 600 cts le boisseau. Ce prix, comme n'importe quel autre, est déterminé par la confrontation de l'offre et de la demande. Si, à une date quelconque, il existe un plus grand nombre d'investisseurs souhaitant vendre plutôt qu'acheter à cette date, le prix futures baissera. Cela incitera de nouveaux acheteurs à acheter sur le marché, de sorte qu'un équilibre sera finalement trouvé entre acheteurs et vendeurs. Un raisonnement symétrique s'applique si le nombre d'acheteurs est plus important que le nombre de vendeurs à un moment donné.

Le dénouement d'une position

La grande majorité des contrats futures est dénouée avant la livraison du produit sous-jacent, car les traders préfèrent souvent fermer leur position sur le marché avant la date de livraison. Pour fermer une position, il suffit de prendre la position inverse sur le marché. Par exemple, l'investisseur V qui avait pris une position longue sur un contrat à la date t_1 peut prendre une position courte sur ce même contrat six semaines plus tard (date t_2). L'investisseur W qui était court sur un contrat peut prendre une position longue pour fermer sa position. Dans les deux cas, le gain ou la perte sont déterminés par la différence entre les prix futures aux deux dates t_1 et t_2.

La livraison physique est très rare, si bien que certains traders en oublient les modalités (voir encadré 2.1). Néanmoins, nous les détaillerons car c'est la possibilité de ce dénouement du contrat qui induit un lien entre le prix futures et le prix au comptant, ou prix spot [1].

Encadré 2.1 La livraison non anticipée d'un contrat futures

Cette histoire a été racontée à l'auteur de ce livre par un manager d'institution financière. Elle concerne un jeune trader inexpérimenté. Un des clients de l'institution financière avait pris une position longue sur un contrat dont le sous-jacent était du bétail vivant. Lorsqu'il décida de déboucler la position, le jeune trader fut chargé de l'opération.

1. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, le prix spot correspond au prix associé à une livraison (presque) immédiate.

Il commit l'erreur de prendre une position longue au lieu d'une position courte pour dénouer l'opération initiale. L'institution se retrouva en position longue sur deux contrats à l'échéance. Le trader dut alors s'informer sur les conditions de livraison du bétail, ce qu'il n'avait jamais fait, ni même envisagé, auparavant. Le bétail pouvait être livré en différents endroits des États-Unis. Il ne pouvait qu'attendre la notice d'intention de livraison de l'investisseur contrepartie de la transaction. Il la reçut finalement et apprit que le bétail serait livré à plus de 3 000 kilomètres de là le mardi suivant. Il se rendit sur place et apprit qu'il y avait une vente aux enchères de bétail chaque mardi. La contrepartie acheta le bétail sur place pour le livrer immédiatement mais il fallait attendre le mardi suivant pour revendre à nouveau les animaux. Le jeune trader dut alors se préoccuper de loger et nourrir le bétail pendant une semaine. C'est ce qu'on appelle un bon début dans la carrière financière.

2.2 Les spécifications d'un contrat

Les autorités de marché doivent, quand elles mettent en œuvre un nouveau contrat, spécifier les obligations des deux parties (acheteur et vendeur). Cela suppose de préciser la taille du contrat (quantité d'actif sous-jacent échangée à l'échéance), le lieu et la période de livraison, etc. Dans certains cas, plusieurs qualités de produit peuvent être livrées, avec des ajustements de prix convenus à l'avance. Le choix du produit livré est alors du ressort de celui qui effectue la livraison, c'est-à-dire le vendeur. Il envoie aux autorités de marché une notice d'intention de livraison qui précise les éléments que nous venons d'évoquer (lieu de livraison, date précise, qualité).

L'actif sous-jacent

Quand il s'agit d'une matière première, la qualité peut être variable selon les disponibilités sur le marché physique. Par conséquent, les autorités spécifient dans les contrats les qualités acceptables pour la livraison.

Dans certains cas, un ajustement de prix est réalisé pour tenir compte des différences de qualité. Par exemple, sur le contrat de maïs du CME Group, la qualité standard est du maïs « jaune, n° 2 », mais certaines substitutions sont autorisées avec des variations de prix.

Lorsque le sous-jacent du contrat est un actif financier, ce problème ne se pose pas ou du moins pas de la même façon. En effet, s'il s'agit d'un contrat sur le yen, point n'est besoin de spécifier le type de yen ! En revanche, lorsque le sous-jacent est une obligation, celle-ci est souvent « notionnelle », c'est-à-dire fictive, avec des caractéristiques bien précises (en termes de durée de vie, de taux de coupon, etc.).

Les obligations, bien réelles, livrables dans ce contrat, ne vérifient jamais exactement les conditions. Par conséquent, les autorités de marché donnent une liste d'obligations livrables, ayant par exemple une durée de vie résiduelle entre 8,5 et 10,5 ans au moment

de la livraison. Dans ce cas, des correspondances sont établies entre les différents titres livrables pour ajuster les prix selon le titre choisi par le vendeur. Ce point est examiné au chapitre 6.

La taille du contrat

Elle précise la quantité d'actifs sous-jacents livrable pour un contrat. Le choix de la taille de contrat est une décision commerciale importante. Si la quantité à livrer est trop élevée, de nombreux investisseurs, qui supportent une faible exposition au risque, ne pourront se couvrir sur le marché, ou encore les « petits » spéculateurs ne pourront intervenir si la taille du contrat est trop conséquente. À l'inverse, si le contrat porte sur une quantité très faible, le coût d'intervention devient prohibitif dans la mesure où un coût fixe est supporté (indépendant de la taille du contrat).

Certains marchés comme le CME Group ont néanmoins introduit des « mini » contrats comme le Mini Nasdaq100, dont la taille est cinq fois inférieure à celle d'un contrat normal ; il s'agit ici d'attirer les « petits » investisseurs. Les futures sur indices seront présentés plus en détail au chapitre 3.

La livraison

Les autorités de marché spécifient le ou les lieux de livraison lorsque c'est nécessaire. Ce point est crucial pour les marchandises ou matières premières dont le coût de transport est élevé. Quand plusieurs lieux de livraison sont possibles, des variations de prix peuvent être imposées. Pour le contrat sur jus d'orange congelé de l'ICE (*InterContinental Exchange*), la livraison peut se faire en Floride, dans le New Jersey ou dans le Delaware. Pour le contrat de maïs du CME Group, la livraison peut se faire à Chicago, Burns Harbor, Toledo ou Saint Louis, mais le prix par boisseau variera selon la distance par rapport aux sources essentielles de la matière première en question.

Les mois de livraison

Un contrat futures est aussi identifié par son mois de livraison. La période du mois pendant laquelle la livraison est possible est prévue par le contrat, mais cette période est souvent le mois entier. Les mois de livraison varient d'un contrat à l'autre ; ils sont fixés en fonction des besoins des opérateurs du marché. Un contrat sur devises peut proposer des échéances mars, juin, septembre, décembre, alors qu'un contrat sur matières premières pourra être coté sur des échéances janvier, mars, mai, juillet, septembre et novembre.

Cependant, à toute date se négocient sur le marché l'échéance la plus proche et une ou plusieurs échéances ultérieures. Les règles de fonctionnement précisent aussi la date à laquelle une échéance commence à être cotée et la date à laquelle la cotation cesse. Cette dernière se situe en général quelques jours avant la fin de la période de livraison.

Les cotations

Le prix futures est, si possible, coté d'une manière facile à comprendre. Par exemple, le contrat futures sur le pétrole du New York Mercantile Exchange est coté en dollars US (et cts) par baril, et les contrats sur indices sont cotés en points d'indice, avec un équivalent monétaire par point d'indice. Les variations minimales (ticks) dépendent elles aussi de l'unité de cotation. Dans les exemples ci-dessus, la variation minimale est de 1 cent pour le pétrole et de 0,01 point pour l'indice, mais pour le contrat sur obligations du Trésor américain, coté en dollars US et en 1/32 de dollar US, 1/32 de dollar US constitue la variation minimale. En Europe, les contrats futures sur obligations sont cotés, comme les obligations, en pourcentage du nominal, avec deux chiffres après la virgule. Pour un tick correspondant à 1 point de base et un nominal du contrat de 100 000 €, la variation minimale est donc de 10 €.

Les variations journalières maximales

Pour la plupart des contrats, des variations maximales journalières sont fixées par les autorités de marché. En principe les transactions cessent jusqu'au lendemain quand ces limites sont atteintes (*limit up* ou *limit down*), mais dans certains cas les autorités de marché peuvent décider de modifier la limite et de reprendre les cotations dans la même journée. L'existence de ces limites est justifiée par la volonté de freiner les mouvements de cours dus à une spéculation excessive. Mais ces freins peuvent aussi handicaper le fonctionnement du marché quand le prix du sous-jacent du contrat est très volatil. De ce fait, l'intérêt économique de l'existence de ces limites de variation est toujours une question controversée.

Les limites de positions sont les quantités maximales de contrats que peut détenir un spéculateur. Ici encore, il s'agit de limiter l'influence que peuvent avoir les spéculateurs sur le marché et d'éviter les manipulations. Les opérateurs en couverture (qui détiennent le sous-jacent) ne sont pas concernés par ces limites.

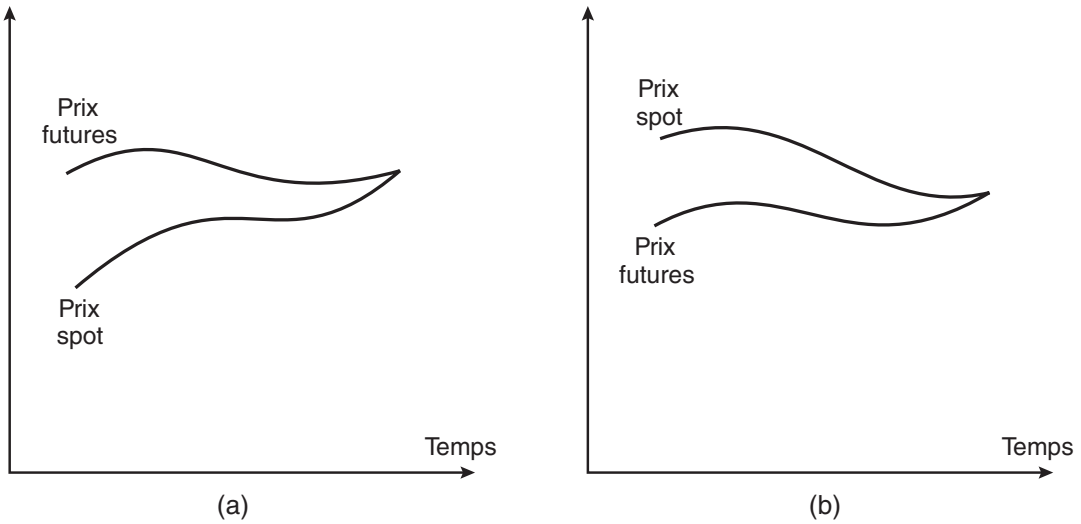
2.3 La convergence des prix futures vers les prix au comptant

À l'approche de l'échéance, le prix futures d'un contrat converge vers le prix de l'actif sous-jacent. Quand la période de livraison est atteinte, les deux prix sont égaux, ou du moins très proches.

Si ce n'était pas le cas, par exemple si le prix futures était supérieur au prix spot, un arbitragiste pourrait :

1. Prendre une position courte sur un contrat ;
2. Acheter l'actif ;
3. Livrer.

Il pourrait ainsi encaisser la différence entre le prix futures et le prix spot. Si une telle opportunité existait, elle serait exploitée, le prix futures chuterait, le prix spot monterait jusqu'à rétablir l'égalité. Le graphique 2.1 illustre cette convergence selon que le prix futures se situe au-dessus ou en dessous du prix spot. Au chapitre 5, nous verrons dans quelles circonstances chacune des deux situations 2.1a ou 2.1b prévaut.



Graphique 2.1 : Relation entre prix futures et prix spot à l'approche du mois de livraison. (a) Le prix futures est supérieur au prix spot ; (b) le prix futures est inférieur au prix spot.

2.4 La régulation du marché et les appels de marge

Lorsque deux investisseurs se mettent d'accord pour procéder à une transaction future, il existe des risques évidents. L'un des deux peut « regretter » et tenter de faire marche arrière. Plus simplement, il peut arriver qu'un des deux investisseurs n'ait pas les ressources financières nécessaires pour faire face à ses engagements au moment de l'échange. L'une des missions essentielles d'un marché organisé est d'organiser les transactions de façon à éviter le risque de défaut au moment du dénouement des contrats. C'est à ce stade qu'entrent en jeu les appels de marge.

Le fonctionnement des appels de marge

Considérons un investisseur qui veut prendre à une date donnée (appelée jour 1) une position longue sur deux contrats sur l'or, échéance décembre, cotés sur le New York Commodity Exchange (COMEX). Le prix futures est 1 250 $ l'once. Chaque contrat porte sur 100 onces, ce qui équivaut à un achat à terme de 200 onces d'or. L'investisseur doit déposer en garantie des fonds sur un compte de déposit. Cette garantie constitue la marge initiale qui est, pour l'exemple, de 6 000 $ par contrat. À la fin de chaque journée, le compte de l'investisseur est ajusté pour refléter ses gains ou pertes journaliers. On parle de compensation journalière (*daily settlement*) et de *marking to market.*

Supposons qu'au soir du jour 1, le prix futures soit 1 241 $; l'investisseur a perdu :

$$9 \times 200 = 1\,800 \text{ \$}$$

La marge déposée initialement est donc passée à $12\,000 - 1\,800 = 10\,200$ \$. Les 1 800 $ viennent augmenter le compte d'un investisseur qui avait pris une position courte sur deux contrats. Si le cours était passé à 1 259 $, le compte de marge aurait augmenté de 1 800 $. Lorsque la baisse est trop importante, l'acheteur des contrats fait alors l'objet d'un appel de marge ; en d'autres termes, il doit apporter des fonds pour reconstituer la marge initiale.

Dans certains cas, le montant requis sur le compte, après la prise de position, est inférieur à la marge initiale. L'investisseur ne fera l'objet d'un appel de marge que si son crédit descend au-dessous de ce niveau requis (appelé marge de maintenance ou marge à maintenir). Il doit alors reconstituer la marge initiale. Réciproquement, le vendeur, qui a réalisé un gain dans notre exemple, est autorisé à en disposer.

Lorsque l'investisseur ne peut répondre à un appel de marge, sa position est soldée. Dans notre exemple, l'intermédiaire du client serait obligé de passer un ordre de vente de deux contrats. La marge initiale assure que cette opération peut être dénouée dans de bonnes conditions.

Ce *marking to market* n'est pas un arrangement entre un broker et son client. Quand le prix futures baisse, de sorte que le crédit du compte de marge d'un investisseur en position longue devient insuffisant, le broker doit payer au marché (en fait à la chambre de compensation décrite plus loin) le montant manquant. Ce montant est reversé au broker d'un investisseur en position courte qui bénéficie de la baisse du prix futures. Les fonds qui sont ainsi demandés ou restitués aux investisseurs pendant la durée de vie du contrat sont les variations de marge. Si un investisseur est incapable de fournir la variation de marge requise, sa position est soldée.

Le tableau 2.1 présente l'évolution du compte de deposit de notre exemple. La marge de maintenance nécessaire en cours d'opération est fixée à 4 500 $ par contrat. On constate qu'au jour 7, le niveau de la marge chute à 7 980 $, soit 1 020 $ de moins que la marge de maintenance (4 500 $ $\times$ 2). L'investisseur fait l'objet d'un appel de marge de $12\,000 - 7\,980 = 4\,020$ \$. Il dépose les fonds, ce qui explique les 12 180 $ du jour 8, lorsque le prix futures a augmenté de 90 cts ($0{,}9 \times 200 = 180$ \$) et que le crédit du compte a été ramené à 12 000 $. Au jour 11, un nouvel appel de marge de 3 780 $ est réalisé et la position est finalement close au jour 16, alors que le prix futures est à 1226,90 $. La perte s'élève à :

$$\begin{aligned} 4\,620 \text{ \$} &= 200\,(1\,250 - 1\,226{,}90) \\ &= -(15\,180 - 12\,000) + 4\,020 + 3\,780 \end{aligned}$$

Détails complémentaires

La plupart des brokers rémunèrent les montants figurant sur les comptes de deposit. Il n'y a donc pas de véritable coût lié à l'immobilisation des fonds, tant que le taux servi est comparable à ce qui pourrait être obtenu sur un placement sans risque. Le deposit

Tableau 2.1 : Appels de marge sur une position longue sur deux contrats futures sur l'or. La marge initiale est de 6 000 $ par contrat et 4 500 $ ensuite. La position est prise au jour 1 à 1 250 $ et close au jour 16 à 1 226,90 $. Les nombres de la seconde colonne, sauf le premier et le dernier, sont des prix futures de compensation. Toutes les sommes sont en dollars US et les nombres entre parenthèses sont négatifs.

Jour	Prix futures	Gain du jour	Gain cumulé	Solde du compte de deposit	Appel de marge
1	1 250,00			12 000	
1	1 241,00	(1 800)	(1 800)	10 200	
2	1 238,30	(540)	(2 340)	9 660	
3	1 244,60	1 260	(1 080)	10 920	
4	1 241,30	(660)	(1 740)	10 260	
5	1 240,10	(240)	(1 980)	10 020	
6	1 236,20	(780)	(2 760)	9 240	
7	1 229,90	(1 260)	(4 020)	7 980	4 020
8	1 230,80	180	(3 840)	12 180	
9	1 225,40	(1 080)	(4 920)	11 100	
10	1 228,10	540	(4 380)	11 640	
11	1 211,00	(3 420)	(7 800)	8 220	3 780
12	1 211,00	0	(7 800)	12 000	
13	1 214,30	660	(7 140)	12 660	
14	1 216,10	360	(6 780)	13 020	
15	1 223,00	1 380	(5 400)	14 400	
16	1 226,90	780	(4 620)	15 180	

(marge initiale) est, dans certains cas, constitué de titres. Les bons du Trésor sont en général acceptés et comptés pour 90 % de leur valeur. Les actions peuvent elles aussi être acceptées, mais ne seront comptabilisées qu'à 50 % de leur valeur (cette décote est appellée *haircut*). Ces pourcentages peuvent toutefois varier d'un marché à l'autre.

Le *marking to market* est en quelque sorte une remise des compteurs à zéro chaque jour. C'est comme si on liquidait les contrats chaque jour pour reprendre position sur un nouveau contrat de valeur nulle.

Les deposits et les règles gouvernant les appels de marge sont fixés par les autorités de marché. Les intermédiaires peuvent majorer les deposits pour leurs clients mais en aucun cas les minorer. Ce deposit dépend de la volatilité des prix de l'actif sous-jacent, qui se répercute sur les prix futures. Lorsque les prix sont très volatils, le deposit est élevé ; en effet, le rôle économique de ce système est d'assurer la bonne fin des contrats. Il faut donc qu'à tout instant les fonds du compte de deposit permettent la liquidation de la position sans qu'il y ait défaut de l'investisseur. En général, la marge de maintenance est de l'ordre de 75 % de la marge initiale.

Le niveau de marge requis dépend de ce fait de la nature de l'investisseur. Si une entreprise produit la marchandise sous-jacente à un contrat futures, le deposit requis sur une vente de contrat (opération de couverture) sera plus faible que pour un spéculateur. Le

risque de défaut est en effet bien moins important. De même, sur une position de spread (achat d'un contrat de maturité T_1 et vente d'un contrat de maturité T_2), la marge nécessaire est plus faible du fait de la forte corrélation des variations de prix des deux contrats qui portent sur le même sous-jacent.

Il faut noter que positions longues et courtes sont traitées selon les mêmes règles, en termes de deposit et d'appels de marge. Contrairement au marché au comptant, où il est toujours plus difficile de vendre à découvert (ce point sera discuté au chapitre 5), il est aussi facile d'acheter un contrat futures que de le vendre.

La chambre de compensation et ses membres

C'est l'existence de la chambre de compensation et le rôle qu'elle joue dans l'organisation des transactions qui permettent d'assurer la bonne fin des contrats sur un marché organisé. En France, le Code monétaire et financier définit les chambres de compensation comme suit (article L440-1) :

« Les chambres de compensation assurent la surveillance des positions, l'appel des marges et, le cas échéant, la liquidation d'office des positions. Elles doivent avoir la qualité d'établissement de crédit. Leurs règles de fonctionnement doivent avoir été approuvées par l'Autorité des marchés financiers. »

La chambre de compensation (CC) comporte un certain nombre de membres (des institutions financières le plus souvent), et les intermédiaires non membres doivent, pour réaliser une transaction, passer par un membre de la CC. La CC enregistre et gère toutes les transactions, tient les comptes des membres et réalise les appels de marge auprès de ceux-ci.

Les membres répercutent ces appels de marge auprès de leurs clients, des brokers par exemple, qui eux-mêmes vont les répercuter sur leurs clients, entreprises ou investisseurs individuels. La CC peut calculer les appels de marge en brut ou en net. En brut, les positions longues et courtes sont ajoutées et le deposit est multiplié par le nombre total de contrats. Comme les variations d'une position longue sont exactement compensées par les variations d'une position courte d'un volume équivalent, la position nette est simplement la valeur absolue de la différence entre positions longues et positions courtes sur un contrat donné. La plupart des CC fonctionnent en net.

Le risque de crédit

Toute cette organisation est destinée à éviter le défaut des contreparties. Jusqu'à présent elle a très bien fonctionné puisqu'il n'y a pratiquement jamais eu de tels défauts. Les marchés de futures ont cependant subi un test important le 19 octobre 1987, quand l'indice américain S&P500 a chuté de 20 % dans la journée. Les investisseurs en position longue sur les contrats futures ayant cet indice comme sous-jacent se retrouvèrent avec un niveau de marge négatif. Certains durent abandonner leurs positions sans satisfaire à leurs obligations et quelques brokers firent faillite, puisqu'ils n'étaient plus en mesure de répondre aux appels de marge. Cependant, tous ceux qui avaient une position courte ont fini par être payés.

2.5 Les marchés OTC

Les marchés OTC ont été évoqués au chapitre 1. Ce sont des marchés sur lesquels les transactions sont réalisées en dehors d'une structure de marché organisé. De ce fait, le risque de crédit est une préoccupation majeure sur ces marchés. La probabilité n'est jamais nulle qu'une contrepartie d'un contrat fasse défaut. Il est intéressant de noter que, pour réduire ce risque, les marchés OTC se sont mis à adopter des règles proches de celles des marchés organisés pour garantir la bonne fin des contrats. Ces fonctionnements alternatifs sont décrits dans la suite de cette section.

Les contreparties centralisées (CCP)

Les CCP ont été brièvement évoquées à la section 1.2. Ce sont des chambres de compensation adaptées aux marchés OTC, mais qui appliquent des principes analogues à ceux des chambres de compensation des marchés organisés. En particulier, les membres des CCP doivent fournir des deposits pour initier des positions et répondre aux appels de marge le cas échéant.

Quand une transaction OTC est conclue entre deux parties A et B, elle peut être présentée à la CCP. Si celle-ci accepte la transaction, elle devient contrepartie de A et de B pour ladite transaction. Par exemple, si la transaction porte sur un contrat forward à un an, A étant en position longue et B en position courte, la CCP accepte :

1. D'acheter l'actif sous-jacent à B dans un an au prix convenu dans la transaction OTC ;
2. De vendre l'actif à A dans un an au prix convenu.

Par conséquent, la CCP accepte de supporter les risques de crédit de A et de B.

Tous les membres de la CCP doivent fournir un deposit à l'initiation des transactions et ces dernières sont évaluées chaque jour. De ce fait, il y a des appels de marge journaliers auxquels les membres doivent répondre. Lorsqu'un intervenant n'est pas membre de la CCP, la transaction doit passer par l'intermédiaire d'un membre. Le fonctionnement est donc très similaire à celui des chambres de compensation sur les marchés organisés.

Suite à la crise de 2007, le risque systémique est devenu un sujet de préoccupation important des régulateurs (voir encadré 1.2). Une conséquence, mentionnée dans la section 1.2, est que le régulateur exige maintenant qu'un certain nombre de transactions passent par les CCP.

Le dénouement bilatéral des transactions

Les transactions OTC qui ne sont pas dénouées par une contrepartie centralisée sont dénouées bilatéralement. Considérons deux contreparties A et B nouant des relations contractuelles sur le marché OTC. A et B peuvent conclure un accord-cadre pour l'ensemble de leurs transactions [2]. Cet accord contient une annexe appelée *Credit Support*

2. L'accord le plus courant est l'*International Swaps and Derivatives Association (ISDA) Master Agreement.*

Annex ou CSA, qui spécifie les garanties que les deux parties doivent fournir dans le cadre des transactions bilatérales réalisées par ces deux entités.

Les accords décrits dans la CSA supposent une évaluation quotidienne des contrats pour organiser le paiement quotidien des variations de marge, c'est-á-dire l'équivalent des appels de marge des marchés organisés. Si d'un jour à l'autre la valeur du contrat augmente pour A, B paie à A le montant de la variation, et réciproquement. Cette démarche réduit de façon importante le risque de crédit sur les marchés OTC (ce point sera développé au chapitre 24).

Ce genre d'accord avait été utilisé dans les années 1990 par un hedge fund, Long Term Capital Management (LTCM). Cela lui permettait de profiter d'un effet de levier important. Même si ces accords procuraient une protection contre le risque de crédit, l'important effet de levier rendait le fonds très vulnérable à d'autres risques (voir encadré 2.2).

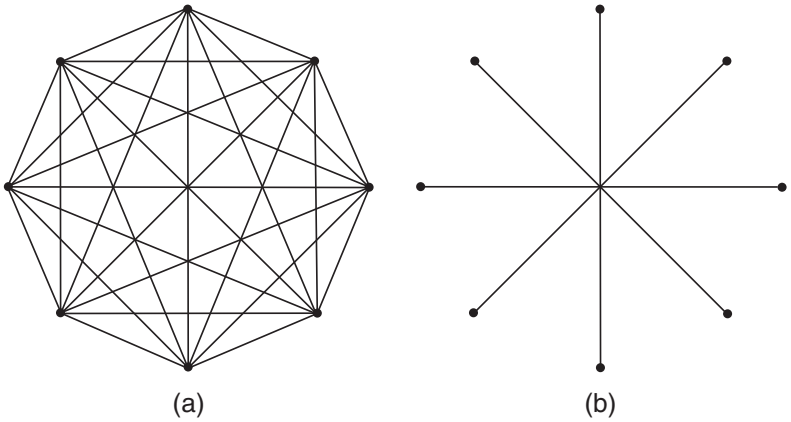
Encadré 2.2 Les pertes de Long Term Capital Management

LTCM, un hedge fund créé dans les années 1990, garantissait toujours ses transactions. La stratégie employée par ce fonds s'appelle « arbitrage de convergence ». On peut en donner un exemple très simple. Supposez que vous trouviez sur le marché deux obligations, X et Y, émises par la même société et présentant les mêmes caractéristiques, mais ne présentant pas la même liquidité. Par exemple, X est beaucoup moins liquide que Y. Comme le marché accorde toujours de la valeur à la liquidité, X vaut moins cher que Y. Dans ce cas, achetez X et vendez Y, en attendant qu'il y ait convergence à une date future (au plus tard à l'échéance !).

Quand les taux augmentent, on peut s'attendre à ce que les prix des deux obligations diminuent de la même manière, de sorte que les marges (*collateral*) payées sur X soient identiques à celles reçues sur Y. Le raisonnement symétrique s'applique en cas de baisse des taux. En conséquence, on ne s'attend pas à ce que des sorties de fonds importantes soient nécessaires du fait du système de garantie.

En août 1998, la Russie a fait défaut sur sa dette souveraine et cela a conduit à une « fuite vers la qualité » sur les marchés. L'écart de prix entre les obligations liquides et les obligations non liquides a augmenté, entraînant une dégradation importante de la position de LTCM. Le prix des obligations achetées par le fonds baissait alors que celui des obligations vendues à découvert augmentait. Du fait de l'effet de levier important de la position détenue par LTCM, il était impossible de faire face aux paiements nécessités par les accords de garantie. Il fallut donc déboucler la position avec une perte de 4 milliards de dollars US. Si l'effet de levier avait été moins important, il est probable que LTCM aurait pu surmonter cette crise en attendant que l'écart de prix entre les deux types d'obligations se réduise.

Le marché OTC est, à l'origine, un marché de contrats bilatéraux illustré au graphique 2.2.a. Si tous ces contrats venaient à passer par une CCP, la situation deviendrait celle du graphique 2.2.b. En pratique, les deux schémas coexistent, puisqu'un grand nombre de transactions OTC ne passe pas encore par une CCP [3].



Graphique 2.2 : (a) Manière traditionnelle d'opérer pour les marchés OTC : une série d'arrangements bilatéraux ; (b) Comment les marchés OTC fonctionneraient avec une chambre de compensation

Transactions sur contrats futures *versus* contrats forward

Indépendamment de la façon dont une transaction est dénouée, la marge initiale est rémunérée par un taux d'intérêt. En revanche, les variations de marge journalières que les traders versent aux chambres de compensation ne sont pas rémunérées, car il s'agit de régularisations de positions. Les transactions sur les marchés OTC, qu'elles soient gérées par l'intermédiaire de CCP ou de manière bilatérale ne font pas, en général, l'objet de régularisations journalières. Par conséquent, lorsqu'un trader verse une variation de marge en cash à une CCP du fait d'une CSA, il reçoit une rémunération sous forme d'un taux d'intérêt.

2.6 Les cotations de marché

Les prix des contrats sont diffusés par les marchés eux-mêmes et par un certain nombre de sources en ligne. Le tableau 2.2 montre les cotations du 3 mai 2016 pour plusieurs contrats sur matières premières cotés au CME Group. De nombreux journaux présentent aussi les cotations des contrats futures. Les cotations correspondantes pour les contrats sur indices, changes et taux d'intérêt seront présentées aux chapitres 3, 5 et 6.

En début de chaque section, on trouve le nom du sous-jacent, la taille du contrat et l'unité dans laquelle le contrat est coté. Le premier sous-jacent est l'or, traité sur le COMEX

3. L'impact des CCP sur le risque de crédit dépend de leur nombre et de la proportion des transactions OTC qu'elles traitent. Le lecteur peut consulter D. Duffie et H. Zhu, "Does a Central Clearing Counterparty Reduce Counterparty Risk ?", *Review of Asset Pricing Studies*, 1, 2011, 74-95.

(département du NYMEX). La taille du contrat est de 100 onces et la cotation se fait en dollars US/once. Le mois d'échéance du contrat apparaît dans la première colonne.

Les prix

Les trois premiers nombres d'une ligne sont le prix d'ouverture, le plus haut et le plus bas de la journée. Les prix d'ouverture sont représentatifs des transactions réalisées dès le début de séance. Pour l'échéance juin 2016 du contrat sur l'or, le prix d'ouverture était de 1 293,40 $ l'once, et les transactions de la journée ont été réalisées dans la fourchette 1 284,00 $ – 1 303,00 $.

Le prix de compensation

Le quatrième nombre est le prix de compensation, qui est utilisé pour calculer les appels de marge. C'est en général le prix auquel se sont échangés les derniers contrats de la journée avant la clôture. Le dernier prix coté apparaît sur la cinquième colonne. Il est de 1 288,10 $, en baisse de 7,7 $ par rapport à la veille (sixième colonne). Un investisseur détenant une position longue sur ce contrat verrait le solde de son compte de marge diminuer de $100 \times 7{,}7 = 770$ $. Symétriquement, l'investisseur en position courte verrait le solde de son compte de marge augmenter de 770 $.

Position ouverte et volume de transactions

La dernière colonne du tableau 2.2 indique le *volume de transactions*. Il est à distinguer de la position ouverte, égale au nombre de contrats vivants à la clôture du jour précédent. Comme une position peut être soldée en prenant la position inverse, la position ouverte varie de jour en jour. Il peut d'ailleurs arriver que le volume de transactions d'un jour donné soit supérieur à la position ouverte en fin de journée. C'est souvent le signe d'un nombre important de transactions conclues et débouclées dans la journée, augmentant le volume de transactions, mais restant sans effet sur la position ouverte.

Les prix futures en fonction de l'échéance

Les prix futures peuvent être croissants ou décroissants en fonction de la maturité du contrat. Par exemple, le prix futures du blé croît avec la maturité le 3 mai 2016, si on se réfère au tableau 2.2, puisque les prix varient de 487,00 $ à 535,00 $ pour des maturités allant de juillet 2016 à mars 2017. On qualifie cette situation de « marché normal ». Lorsque les prix sont décroissants, on parle de « marché inversé »[4].

Le tableau 2.2 montre que le marché était normal pour le contrat sur le blé le 3 mai 2016, mais ce n'est pas toujours le cas. Parfois, on observe aussi un mélange des deux situations, pour des raisons de saisonnalité. C'est le cas pour le soja au tableau 2.2. Le prix est d'abord décroissant, puis croissant.

4. On utilise parfois l'expression « contango » pour la première situation et celle de déport ou « backwardation » pour la seconde.

Tableau 2.2 : Exemples de cotations de futures sur matières premières du CME Group le 3 mai 2016 (les colonnes indiquent le mois d'échéance, le prix d'ouverture, les plus haut et plus bas de la journée, le prix de compensation, le dernier cours de la veille, la variation par rapport à la veille et la position ouverte)

	Ouverture	Plus haut	Plus bas	Compens.	Dernier	Variation veille	Volume
Or, 100 onces, dollars US par once (oz)							
Juin 2016	1 293,4	1 303,9	1 284,0	1 295,8	1 288,1	–7,7	202 355
Août, 2016	1 295,6	1 306,0	1 286,4	1 298,1	1 290,8	–7,3	26 736
Oct. 2016	1 296,0	1 307,7	1 289,1	1 300,0	1 292,7	–7,3	1 005
Déc. 2016	1 299,6	1 309,1	1 290,0	1 301,9	1 294,5	–7,4	3 465
Avril 2017	1 305,2	1 305,8	1 296,1	1 305,7	1 296,1	–9,6	250
Pétrole brut, 1 000 barils, dollars US par baril							
Juin 2016	44,92	45,35	43,36	44,78	43,51	–1,27	503 259
Août 2016	46,02	46,45	44,63	45,91	44,82	–1,09	50 439
Déc. 2016	47,09	47,55	45,99	47,09	46,24	–0,85	41 447
Déc. 2017	48,75	49,17	47,83	48,72	48,16	–0,56	13 032
Déc. 2018	50,27	50,40	49,30	49,99	49,59	–0,40	1 618
Maïs, 5 000 boisseaux, cts par boisseau							
Juil. 2016	391,75	395,00	377,00	391,75	378,25	–13,50	215 808
Sept. 2016	392,00	394,75	378,75	392,25	379,50	–12,75	34 514
Déc. 2016	396,00	398,50	384,00	396,50	385,00	–11,50	70 460
Mars 2017	403,50	406,00	392,50	404,50	393,25	–11,25	11 131
Mai 2017	408,75	410,75	397,75	409,25	398,25	–11,00	1 276
Juil. 2017	413,00	415,00	402,00	413,50	403,25	–10,25	2 555
Soja, 5 000 boisseaux, cts par boisseau							
Juil. 2016	1 043,75	1 057,00	1 023,00	1 043,75	1 033,25	–10,50	200 456
Août 2016	1 043,75	1 057,25	1 025,00	1 044,00	1 034,75	–9,25	22 110
Sept. 2016	1 027,75	1 041,75	1 012,25	1 029,00	1 021,00	–8,00	8 753
Nov. 2016	1 017,00	1 030,75	1 003,00	1 017,75	1 011,75	–6,00	87 122
Jan. 2017	1 018,00	1 031,25	1 004,00	1 019,25	1 012,00	–7,25	10 937
Mars 2017	1 010,00	1 021,75	995,25	1010,75	1 001,25	–9,50	12 906
Blé, 5 000 boisseaux, cts par boisseau							
Juil. 2016	487,00	492,75	468,25	487,75	473,00	–14,75	106 051
Sept. 2016	497,00	503,25	478,75	498,50	483,25	–15,25	20 043
Déc. 2016	515,20	521,25	496,25	516,75	500,50	–16,25	23 374
Mars 2017	535,00	538,00	513,00	534,00	517,50	–16,50	2 730
Bétail vivant, 40 000 livres, cts par livre (lb)							
Juin 2016	116,550	116,850	115,750	115,800	116,500	0,75	16 127
Août 2016	114,325	114,800	113,775	113,725	114,475	0,75	10 595
Déc. 2016	114,150	114,425	113,575	113,700	114,350	0,65	2 350
Avril 2017	112,900	112,925	112,250	112,450	112,750	0,30	430

2.7 La livraison

Comme nous l'avons mentionné plus haut, très peu de contrats vont jusqu'à l'échéance. Une grande majorité est dénouée avant. Néanmoins, c'est la possibilité de livraison qui détermine le prix futures. De ce fait, il est nécessaire de bien comprendre les procédures de livraison.

La période pendant laquelle la livraison est possible est définie par les autorités de marché, mais elle est variable d'un contrat à l'autre. Quand un investisseur A décide de livrer, son broker transmet une notice d'intention de livraison à la chambre de compensation. Cette notice stipule le nombre de contrats concernés et dans le cas de matières premières, le lieu de livraison et éventuellement la qualité du produit livré. Les autorités de marché sélectionnent alors l'acheteur qui prendra livraison. Celui-ci n'est pas forcément celui qui avait initialement pris la position longue sur le contrat. La chambre de compensation choisit en général l'acheteur dont la position longue est la plus ancienne.

Dans le cas d'un contrat sur matières premières, prendre livraison signifie aussi accepter un lieu de réception de la marchandise et supporter les coûts de stockage. S'il s'agit d'animaux vivants, l'acheteur supportera les coûts de surveillance et de nourriture (voir encadré 2.1). Pour certains contrats financiers, le dénouement s'effectue par simple virement des fonds. Dans tous les cas, le prix payé est le cours de compensation du jour précédant la date de la notice d'intention de livraison. Quand ces modalités sont prévues par le contrat, ce prix peut être ajusté pour la qualité du produit livré et pour le lieu de livraison. L'ensemble de la procédure, de l'émission de la notice à la livraison effective, prend deux ou trois jours.

Trois jours sont cruciaux dans la vie d'un contrat : les premier et dernier jours d'émission de notices d'intention de livraison ainsi que le dernier jour de négociation, qui se situe le plus souvent entre les deux dates précédentes. Pour éviter de devoir prendre livraison du sous-jacent, un acheteur de contrat doit donc solder sa position avant le premier jour de la période de livraison.

Le dénouement en cash

Certains contrats, comme ceux dont le sous-jacent est un indice, sont dénoués en cash du fait de la difficulté, voire l'impossibilité de livrer le sous-jacent. Par exemple, pour un contrat sur le CAC 40, la livraison supposerait de constituer un portefeuille de 40 titres avant le transfert à l'acheteur. Il est plus facile de solder le contrat en se fondant sur la valeur de l'indice au dernier jour de négociation de celui-ci. À titre d'exemple, le contrat sur le S&P500 du CME Group se termine le troisième vendredi du mois de livraison et le prix de compensation est la valeur d'ouverture de l'indice ce jour-là.

2.8 Les différents types d'intervenants

Il existe essentiellement deux types d'intervenants : les intermédiaires, courtiers ou brokers, qui opèrent sur le marché pour le compte de clients, et les négociateurs individuels de parquet qui opèrent pour leur propre compte (*locals* dans la terminologie anglo-saxonne).

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, il existe trois natures de position quel que soit le type d'intervenant : la couverture, la spéculation ou l'arbitrage. Les spéculateurs sont classés selon leur horizon, qui peut aller de quelques minutes (*scalpers*) à un (*day traders*) ou plusieurs jours, voire plusieurs semaines (*position traders*). Les premiers cherchent à profiter de mouvements de très court terme pour gagner un ou deux ticks, alors que les derniers jouent sur des mouvements de marché plus profonds. Tous espèrent réaliser des profits du fait de variations significatives (et dans le bon sens !) du prix futures.

Les différents types d'ordre

L'ordre le plus simple est un *ordre à tout prix* ou *ordre au prix du marché*. L'intervenant a une exigence d'immédiateté, son ordre sera donc exécuté au meilleur prix disponible au moment où il arrive sur le marché.

Un *ordre limite* spécifie un prix limite. L'ordre n'est exécuté que si le prix de marché satisfait la condition posée (sous forme de prix maximal pour une position longue, et minimal pour une position courte). Il est donc possible qu'un ordre limite ne soit jamais exécuté.

Un *ordre stop* spécifie aussi un prix limite, mais la signification est différente. Par exemple, un ordre stop de vente à 100 € sera exécuté seulement si le prix passe en dessous de 100 €. L'objectif de l'investisseur est alors de limiter ses pertes en cas de mouvement encore plus défavorable du cours.

Les caractéristiques des ordres stop et des ordres limite peuvent être combinées. Dans ce cas, l'ordre spécifie deux cours : le cours stop et le cours limite. Si le prix stop d'un ordre d'achat est de 100 € et son prix limite de 101 €, l'achat est réalisé dès que le cours passe au-delà de 100 €, à condition qu'il soit inférieur à 101 €.

Un *ordre à prix touché* est exécuté au meilleur prix du marché si une transaction a eu lieu au prix spécifié ou à un prix plus favorable. Un investisseur qui détient une position longue sur un contrat futures peut vouloir solder sa position. Avec un ordre de ce type, il s'assurera de réaliser un profit si des mouvements de prix favorables apparaissent. L'ordre à prix touché est en quelque sorte le symétrique de l'ordre stop qui visait à limiter les pertes.

Les ordres peuvent aussi contenir des conditions sur la durée de validité. Un *ordre-jour* est valide une journée, alors qu'un *ordre ouvert* est valide soit jusqu'à son exécution, soit jusqu'à la date de fin des transactions sur le contrat. Enfin, un *ordre tout-ou-rien* doit être exécuté immédiatement pour la quantité totale ou pas du tout.

2.9 Le contrôle des marchés

Aux États-Unis, les marchés de futures sont contrôlés par la Commodity Futures Trading Commission, CFTC (www.cftc.gov), établie en 1974. Cet organisme autorise les Bourses à proposer des contrats, et toute modification de ces contrats doit être approuvée par la CFTC. De manière générale, pour qu'un contrat soit accepté, il faut qu'il réponde aux besoins des opérateurs en couverture et des spéculateurs. La CFTC veille

à la transparence en s'assurant que les prix soient publics et que les positions dont le volume dépasse un certain seuil soient connues. Elle impose aussi certaines exigences aux négociateurs individuels, en matière de capitaux propres par exemple. C'est aussi cette commission qui règle les litiges ; elle peut imposer aux Bourses de prendre des sanctions contre les traders qui enfreignent les règles.

Depuis la création de la National Futures Association (www.nfa.futures.org) en 1982, certaines des responsabilités de la CFTC ont été transférées à l'industrie des futures elle-même. Cette association regroupe les principaux acteurs des marchés de futures. Son objectif est d'empêcher toute fraude et d'assurer que les marchés fonctionnent dans l'intérêt général. Un examen doit être passé pour devenir membre de cette association. Elle a la possibilité de sanctionner les irrégularités et a développé un système efficace d'arbitrage des litiges.

Le *Dodd-Frank act* signé par le Président Obama en 2010 étend le rôle de la CFTC. Cet organisme est maintenant responsable des règles définissant le cadre des transactions OTC et imposant aux contreparties de réaliser ces transactions dans le cadre des CCP.

En France, ce sont l'Autorité des marchés financiers (fusion de la Commission des opérations de Bourse et du Conseil des marchés financiers) et le Comité consultatif du secteur financier qui contrôlent, surveillent et réglementent les marchés. De plus, Euronext, en tant qu'entreprise de marché, définit un certain nombre de règles de fonctionnement que doivent respecter les intervenants. Sur l'Eurex, qui est un marché dépendant des autorités suisses et allemandes, les deux organismes étatiques de contrôle sont la Commission fédérale des banques pour la Suisse (www.cfb.admin.ch) et le Hessische Ministerium für Wirtschaft, Verkehr und Landesentwicklung pour l'Allemagne (www.wirtschaft.hessen.de).

Les irrégularités

La plupart du temps, les marchés de futures fonctionnent de manière efficace. Il arrive cependant qu'un investisseur ou un groupe d'investisseurs tentent de manipuler le marché et de provoquer un étranglement de marché, ou *corner*[5]. La technique consiste à prendre une position longue sur une quantité énorme de contrats futures, tout en cherchant à contrôler l'offre du sous-jacent.

Ces investisseurs ne cherchent pas à dénouer leur position sur le marché des contrats, mais attendent la maturité. Au fur et à mesure que celle-ci approche, les vendeurs rencontrent de grandes difficultés à dénouer leur position et doivent rechercher le sous-jacent pour le livrer. La pénurie (organisée) fait monter les prix en flèche, aussi bien le prix spot que le prix futures. Pour lutter contre ce type de procédé, les autorités de contrôle imposent des limites au volume des positions, augmentent les marges initiales, changent leurs modalités de règlement et interdisent les transactions qui accroissent le volume des positions des spéculateurs.

5. Le cas le plus connu est celui des frères Hunt qui, en 1979-1980, ont manipulé le marché de l'argent pour le faire passer de 9 $ l'once à 50 $ l'once.

2.10 Les contrats forward et les contrats futures

Les différences essentielles entre contrats forward et contrats futures sont listées dans le tableau 2.3. Les deux sont des engagements d'achat ou de vente d'un actif sous-jacent à un prix spécifié et à une date future donnée. Mais un contrat forward est négocié sur le marché OTC et ses caractéristiques ne sont pas standardisées, contrairement aux contrats futures négociés sur des marchés organisés. De plus, les contrats forward spécifient une date de livraison et sont en général détenus jusqu'à cette date, alors que les futures définissent une période de livraison, et les positions sont le plus souvent dénouées avant le début de ladite période. Enfin, les contrats futures font l'objet d'un *marking to market* quotidien.

Tableau 2.3 : Comparaison des contrats forward et futures

Forward	Futures
Négocié sur un marché de gré à gré	Négocié sur un marché organisé
Non standardisé	Standardisé
Une date de livraison	Une période de livraison
Un seul flux à la fin du contrat	*Marking to market* quotidien
Livraison ou dénouement en cash sont la norme	Positions le plus souvent dénouées avant l'échéance
Existence d'un risque de crédit	Absence (ou presque) de risque de crédit

Profits liés aux contrats forward et futures

Supposons que le taux de change forward dollar US/livre sterling à 90 jours soit de 1,5000 et que ce taux soit aussi le prix futures pour un contrat d'échéance 90 jours. Quelle est la différence entre les gains/pertes des deux contrats ?

Pour le contrat forward, le gain ou la perte sont réalisés à la date d'échéance. En revanche, pour le contrat futures, le gain ou la perte sont réalisés petit à petit du fait du *marking to market* quotidien. Supposons qu'un investisseur A détienne une position longue sur un contrat forward de 1 million de livres sterling et que l'investisseur B détienne la même position mais sur un contrat futures (en fait 16 contrats futures puisque chaque contrat porte sur 62 500 £). Si le taux de change spot dans 90 jours est de 1,7000, l'investisseur A réalise un gain de 200 000 $ à l'échéance. En revanche, l'investisseur B a réalisé des pertes certains jours et des gains d'autres jours ; c'est seulement le montant cumulé des gains et des pertes sur la période qui totalise 200 000 $.

La cotation des contrats sur devises

Une différence supplémentaire doit être mentionnée pour les contrats sur devises, liée à la façon dont les taux de change sont cotés pour les deux types de contrats. Les forward sont toujours cotés comme les taux de change spot. Cependant, le mode de cotation des

taux spot peut varier d'un pays à l'autre. Le dollar US est coté en dollar US/euro à New York, mais il en est de même à Paris (cotation en dollar US/euro). Il n'existe donc pas de règle homogène, puisque la cotation à New York est en unités de devise domestique par unité de devise étrangère alors qu'à Paris, elle est en unités de devise étrangère par unité de devise domestique.

En revanche, les futures sur devises sont toujours cotés, sur les marchés américains, en nombre de dollars US par unité de devise étrangère. Par exemple, un prix futures de 1,10 $ pour un euro correspond à un prix forward de 1/1,1 = 0,9090 € par dollar US.

Résumé

L'échange de contrats futures sur des marchés organisés impose une définition soigneuse et sans ambiguïté des contrats, une organisation des procédures de livraison et, plus généralement, une réglementation claire du marché. Les contrats forward sont en revanche négociés bilatéralement, il n'est donc pas nécessaire de définir des règles spécifiques pour ces échanges ni d'imposer une standardisation des sous-jacents.

La grande majorité des futures ne donne pas lieu à livraison car ils sont dénoués avant la période de livraison. C'est pourtant la possibilité de livrer qui gouverne l'évolution des prix futures et les relations qui les lient aux prix au comptant. Pour certains actifs sous-jacents comme les indices, le dénouement à l'échéance s'effectue en cash plutôt qu'en livrant le portefeuille que représente l'indice.

La définition des contrats reste un enjeu majeur pour les autorités de marché. En effet, les deux parties doivent connaître précisément le sous-jacent qui peut être livré, le lieu et la période de livraison. Par ailleurs, les règles de fonctionnement du marché doivent être dénuées d'ambiguïté en ce qui concerne les heures d'ouverture, la façon dont les cotations sont réalisées, les variations journalières maximales autorisées, etc. C'est pourquoi les nouveaux contrats doivent être approuvés par les autorités de marché avant le début des négociations.

Les appels de marge constituent une caractéristique importante des marchés de futures. Le compte de deposit, qu'un client possède chez son intermédiaire, est remis à jour quotidiennement en fonction des gains ou pertes constatés. En cas d'insuffisance, le client fait l'objet d'un appel de marge pour réalimenter ce compte. Le broker, s'il n'est pas membre de la chambre de compensation, doit aussi avoir un compte de deposit chez un membre de la CC. Ces derniers sont les seuls à avoir directement un compte à la CC ; ils doivent bien sûr maintenir un niveau de marge sur ce compte suffisant pour faire face à des mouvements défavorables de prix.

Sur les marchés OTC, les transactions sont soit gérées au travers de contreparties centralisées (CCP), soit de manière bilatérale. Dans ce dernier cas, il y a souvent un dépôt de collatéral pour réduire le risque de crédit. Quand la transaction passe par une CCP, il y a des appels de marge, de sorte qu'il n'existe plus de grande différence par rapport à un marché organisé.

Il existe des différences notables entre contrats forward et futures. Les premiers sont des accords bilatéraux non négociables, alors que les seconds sont échangés sur des marchés

organisés. Toutefois, les évolutions récentes de la régulation font que les transactions de gré à gré sont de plus en plus souvent dénouées dans le cadre de CCP qui fonctionnent sur les mêmes principes que les chambres de compensation des marchés organisés.

Alors qu'un contrat forward spécifie une date précise de livraison, les futures précisent une période de livraison. Les contrats forward ne sont pas standardisés et sont souvent détenus jusqu'à l'échéance, donnant ainsi lieu à livraison ou à dénouement en cash.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons la détermination des prix forward et futures et la façon dont ces contrats sont utilisés pour couvrir une position.

Références complémentaires

Duffie D. et H. Zhu, "Does a Central Clearing Counterparty Reduce Counterparty Risk ?", *Working Paper*, Stanford University, 2013.

Gastineau G. L., D. J. Smith et R. Todd, *Risk Management, Derivatives and Financial Analysis under SFAS n° 133*, The Research Foundation of AIMR and Blackwell Series in Finance, 2001.

Hull J., "CCPs : Their Risks and How They Can Be Reduced", *Journal of Derivatives*, 20 (1), 2012, 26-29.

Jorion P., "Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management", *European Financial Management*, 6 (3), septembre 2000, 277-300.

Kleinmann G., *Trading Commodities and Financial Futures*, Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2013.

Lowenstein R., *When Genius Failed : The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*, Random House, New York, 2000.

Panaretou A., M.B. Shackleton et P.A. Taylor "Corporate Risk Management and Hedge Accounting", *Contemporary Accounting Research*, 30 (1), printemps 2013, 116-139.

Problèmes et exercices

2.1 Quelle est la différence entre position ouverte et volume de transactions ?

2.2 Quelle est la différence entre un broker et un négociateur individuel de parquet ?

2.3 Supposez que vous preniez une position courte sur un contrat vous engageant à vendre de l'argent en juillet à 17,20 $ l'once sur le New York Commodity Exchange. La taille du contrat est de 5 000 onces. Le deposit est de 4 000 $ et la marge à maintenir est ensuite de 3 000 $. Quelle variation minimale de prix conduira à un appel de marge ? Que se passera-t-il si vous n'y répondez pas ?

2.4 Supposons qu'en septembre 2018, vous preniez une position longue sur un contrat sur le pétrole d'échéance mai 2019. En mars 2019, vous dénouez votre position. Le prix futures du baril était de 48,30 $ quand vous avez pris position, et de 50,50 $ quand vous avez liquidé celle-ci. Un contrat correspond à 1 000 barils. Quel est votre profit ?

2.5 Que signifie « passer un ordre stop à 2 € » ? Dans quel but devrait-il être utilisé ? Répondez aux mêmes questions pour un ordre limite à 2 €.

2.6 Quelles sont les différences entre un compte de deposit administré par la chambre de compensation et un compte de deposit administré par un intermédiaire ?

2.7 Quelles sont les différences dans la cotation des devises, sur les marchés futures, forward et au comptant ?

2.8 Le vendeur d'un contrat futures dispose, dans certains cas, d'une certaine marge de manœuvre sur le produit livré, sur le lieu et la date de livraison. Cela a-t-il sur le prix futures un effet positif ou négatif ? Expliquez votre raisonnement.

2.9 Quels sont les éléments essentiels dans la définition d'un contrat futures ?

2.10 Expliquez comment le système des appels de marge protège les investisseurs contre le risque de défaut.

2.11 Un investisseur prend une position longue sur deux contrats de jus d'orange congelé. Chaque contrat porte sur 15 000 livres. Le prix futures est de 160 cts par livre et le deposit initial de 6 000 $ par contrat, la marge à maintenir ensuite étant de 4 500 $ par contrat. Quelle variation minimale de prix entraînera un appel de marge ? Dans quelles conditions l'investisseur pourra-t-il retirer 2 000 $ de son compte de deposit ?

2.12 Montrez que si le prix futures d'une matière première est supérieur au prix spot pendant la période de livraison, il y a une opportunité d'arbitrage. En existe-t-il une si l'écart de prix est dans l'autre sens ? Justifiez votre réponse.

2.13 Expliquez la différence entre un ordre à prix touché et un ordre stop.

2.14 Que signifie un ordre stop de vente à 20,30 € avec une limite à 20,10 € ?

2.15 En fin de journée, un membre de la CC a une position longue sur 100 contrats avec un cours de compensation de 50 000 € par contrat. Le deposit initial est de 2 000 € par contrat. Le jour suivant, la position longue a augmenté de 20 contrats négociés à 51 000 € par contrat. Le cours de compensation de ce jour est de 50 200 €. Que se passe-t-il au niveau du compte de marge ?

2.16 Expliquez pourquoi les exigences de garanties vont augmenter sur les marchés OTC suite aux nouvelles réglementations introduites après le crise du crédit de 2008.

2.17 Le cours forward du franc suisse en dollar US pour livraison dans 45 jours est 1,1000. Le prix futures est 0,9000. Expliquez ces deux cotations. Qu'est-il préférable de faire pour un investisseur qui souhaite vendre du franc suisse ?

2.18 Supposons que vous transmettiez à votre broker l'ordre de vendre un contrat sur carcasses de porc, échéance juillet. Décrivez le déroulement des opérations.

2.19 « La spéculation sur les marchés de futures est du jeu pur. Ce n'est pas dans l'intérêt général d'autoriser les spéculateurs à intervenir sur ces marchés. » Discutez ce point de vue.

2.20 Expliquez les différences sur les marchés de gré à gré d'actifs dérivés entre un dénouement de transaction bilatéral et un dénouement de transaction dans le cadre d'une CCP.

2.21 Que se passerait-il sur un marché organisé si un contrat ne spécifiait pas de manière précise la qualité du sous-jacent livrable ?

2.22 « Quand un contrat est échangé sur un marché futures, la position ouverte augmente d'une unité, reste identique ou baisse d'une unité. » Qu'en pensez-vous ?

2.23 Le 24 octobre 2018, vous prenez une position sur un contrat futures de bétail vivant au prix de 121,2 cts par livre. Vous fermez votre position le 21 janvier 2019 alors que le prix futures est de 118,3 cts. Un contrat porte sur 40 000 livres. Quel est votre profit ?

2.24 Un éleveur s'attend à disposer de 120 000 livres de bétail à vendre dans trois mois. Le contrat futures du CME Group porte sur 40 000 livres. Comment l'éleveur peut-il utiliser ce contrat pour se couvrir ? Quels sont, de son point de vue, les avantages et inconvénients d'une telle couverture ?

2.25 Une compagnie minière découvre un filon d'or en juillet 2017. La construction de la mine prendra six mois et l'extraction un an. Des contrats futures sur l'or sont négociés sur le New York Commodity Exchange, avec des livraisons tous les deux mois entre août 2017 et décembre 2018. Chaque contrat porte sur 100 onces d'or. Comment la compagnie peut-elle utiliser ce contrat pour se couvrir ?

2.26 Expliquez le principe de fonctionnement des CCP. Pour le système financier dans son ensemble, quels sont les avantages d'un dénouement de toutes les transactions d'actifs dérivés standards dans le cadre de CCP ?

Questions complémentaires

2.27 Un trader A prend une position longue sur un contrat l'engageant à acheter 1 million d'euros pour 1,1 million de dollars US dans 3 mois. Un trader B prend une position longue sur un contrat forward présentant les mêmes caractéristiques. Le taux de change commence par diminuer nettement pendant les deux premiers mois, puis remonte pour finir à 1,13 dollar US/euro. Si on ignore la compensation journalière, quel est le résultat de chacun des traders ? Si on tient compte maintenant de la compensation journalière (*daily settlement*), lequel des deux traders réalise le meilleur résultat ?

2.28 Qu'entend-on par position ouverte ? Pourquoi a-t-elle tendance à décroître pendant le dernier mois précédant le mois de livraison ? Supposons que le volume de transactions d'un jour donné soit de 2 000 contrats. Il y a donc 2 000 acheteurs (ou l'équivalent) et 2 000 vendeurs. Parmi les 2 000 acheteurs, 1 400 dénouaient des positions et 600 prenaient position sur les contrats. Parmi les 2 000 vendeurs, 1 200 dénouaient des positions et 800 prenaient position sur les contrats. Quel est l'impact de ces transactions sur la position ouverte ?

2.29 Le 1er juillet 2017, une entreprise conclut un contrat forward pour acheter 1 million de yens le 1er janvier 2018. Le 1er septembre 2017, elle conclut un contrat forward pour vendre 1 million de yens le 1er janvier 2018. Décrivez les payoffs futurs de cette stratégie en fonction des taux de change au 1er juillet 2017, puis au 1er septembre 2017.

2.30 Une entreprise prend une position courte sur un contrat futures portant sur 5 000 boisseaux de blé à 750 cts par boisseau. Le deposit initial est de 3 000 $ et la marge à maintenir ensuite est 2 000 $. Quelle variation minimale de prix entraînera un appel de marge ? Dans quelles conditions l'entreprise peut-elle retirer 1 500 $ de son compte ?

2.31 Supposons qu'il n'y ait pas de coûts de stockage sur le pétrole et que le taux d'emprunt ou de prêt soit de 4 % par an. Comment auriez-vous pu réaliser un profit le 3 mai 2016 en opérant sur les contrats d'échéances juin et décembre 2016 ? (Utilisez le tableau 2.2.)

2.32 Quelle position est équivalente à une position longue sur un contrat forward impliquant l'achat d'un actif au prix K combinée à la détention d'un put de prix d'exercice K, les deux contrats ayant la même date d'échéance ?

2.33 Une entreprise a des transactions en cours avec trois banques A, B et C, dont les valeurs sont respectivement (pour l'entreprise) $+20$ millions d'euros, -15 millions d'euros et -25 millions d'euros. Quelle marge doit fournir l'entreprise dans chacun des cas suivants ?

a. Les transactions sont bilatérales et sont sujettes à la fourniture (unilatérale) de garanties par l'entreprise, de sorte que celle-ci dépose les variations de marge, mais pas la marge initiale.

b. Les transactions passent par une CCP unique et celle-ci requiert une marge initiale de 10 millions d'euros.

2.34 La transaction d'une banque avec un client (transaction bilatérale) a une valeur de $+10$ millions d'euros pour la banque. Le client a déposé 10 millions de garantie en cash. Quelle est l'exposition de la banque au risque de crédit du client ?

2.35 Téléchargez sur le site www.pearson.fr les prix des contrats sur l'or et le pétrole et répondez aux questions suivantes.

a. Supposons que les variations quotidiennes de prix suivent une loi gaussienne de moyenne nulle. Estimez le mouvement de prix journalier qui ne sera pas dépassé avec une probabilité de 99 %.

b. Si les autorités de marché veulent fixer la marge initiale de sorte que la probabilité que cette marge ne soit pas consommée en deux jours soit de 99 %, à quel niveau faut-il fixer la marge si on garde l'hypothèse de normalité des variations de prix ?

c. Considérons un investisseur avec une position longue sur le contrat portant sur le pétrole au moment où le fichier de données débute. Il garde ce contrat jusqu'à la fin de la période. Utilisez la marge de maintenance sur ce contrat calculée dans la question (b), en supposant qu'elle représente 75 % de la marge initiale, pour évaluer le nombre de fois où l'investisseur a un solde négatif (on suppose que l'investisseur répond aux appels de marge quand ils surviennent). Que suggère le résultat quant à l'hypothèse de normalité ?

Chapitre 3

Les stratégies de couverture par les contrats futures

Les marchés de futures servent prioritairement aux opérateurs en couverture (*hedgers*) qui souhaitent réduire le risque auquel ils font face dans le cadre de leur activité commerciale ou industrielle. Ce risque peut être lié au prix du pétrole, au cours d'une devise, à la valeur d'un indice, etc. Une couverture est dite parfaite si elle permet d'éliminer complètement le risque, ce qui est rarement possible. L'analyse des méthodes de couverture consiste à définir les principes permettant la construction de stratégies dont les résultats sont aussi proches que possible de ceux d'une couverture parfaite.

Dans ce chapitre, nous analysons les différentes possibilités de couverture d'une position par des contrats futures. Quand faut-il retenir une position longue ou courte ? Quelle quantité de contrats optimise la réduction du risque ? Pour l'instant, nous nous focalisons sur les stratégies statiques ; nous n'envisageons pas la possibilité d'ajustement de la position pendant la période de couverture. Au chapitre 19, nous aborderons les stratégies dynamiques, dans lesquelles la position est sous constante surveillance et peut subir des ajustements.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous ne faisons pas de distinction entre contrats forward et contrats futures. Cela signifie en particulier que nous ne nous préoccupons pas de l'actualisation car tous les flux surviennent à la date à laquelle la position est dénouée. À la fin du chapitre, nous présentons l'ajustement de couverture qui permet de tenir compte de la compensation journalière.

3.1 Les principes

Quand un individu ou une entreprise prennent une position de couverture sur un marché de futures, il s'agit en général d'éliminer, ou du moins de réduire considérablement, un risque. Supposons qu'une entreprise sache qu'elle peut perdre 10 000 € pour chaque baisse d'un cent du prix d'une matière première dans les prochains mois. Pour se couvrir contre cette éventualité, le trésorier peut prendre une position courte sur un futures sur

cette matière première. La position doit être construite de façon que le contrat futures gagne 10 000 € quand le prix baisse d'un cent. Bien sûr, si le prix augmente au lieu de baisser, le gain sur la matière première est compensé par une perte sur le contrat futures.

Les positions courtes

Une couverture courte (*short hedge*), comme celle qui vient d'être décrite, est appropriée quand le hedger détient l'actif sous-jacent au contrat et prévoit de le vendre plus tard. Par exemple, un agriculteur qui cultive du maïs et qui se prépare à vendre sa récolte dans deux mois peut choisir une couverture de ce type. Mais elle peut aussi être utile lorsqu'on ne détient pas encore l'actif, mais qu'on doit le recevoir dans les mois à venir. Un exportateur français qui doit recevoir des dollars US dans trois mois peut avoir un manque à gagner si d'ici là, le dollar US se déprécie par rapport à l'euro. Une position courte sur un contrat futures sur dollar US peut assurer un taux de change pour la conversion future des dollars US en euros.

Pour préciser ces mécanismes, considérons un producteur de pétrole qui, le 15 mai, vient de conclure un contrat pour la livraison d'un million de barils le 15 août. Il est alors dans une position analogue à celle que nous venons de décrire, puisque chaque baisse d'un cent du baril lui fait perdre 10 000 $. Supposons que le prix spot du pétrole soit de 50 $ le baril le 15 mai et que le prix futures à 3 mois coté sur le New York Mercantile Exchange (NYMEX) soit de 49 $ le baril. Sachant que chaque contrat porte sur 1 000 barils, le producteur peut couvrir sa position en vendant 1 000 contrats échéance août. Si la position est dénouée le 15 août, l'effet du contrat sera d'assurer un prix de vente du brut proche de 49 $ le baril.

Pour illustrer ce qui peut survenir, imaginons que le prix du brut soit à 45 $ le 15 août. La firme reçoit 45 millions de dollars US de la vente du pétrole, mais comme le 15 août se situe dans le mois de livraison du contrat, le prix futures sera à ce moment très proche de 45 $. L'entreprise gagne approximativement :

$$49\ \$ - 45\ \$ = 4\ \$$$

par baril, soit 4 millions de dollars US pour les 1 000 contrats. La position totale aura donc engendré un flux d'environ $45 + 4 = 49$ millions de dollars US, soit 49 $ par baril.

Si le prix du brut se situait à 55 $ le 15 août, la firme recevrait 55 millions de dollars US de la vente du produit, mais perdrait $55 - 49 = 6$ millions de dollars US sur les contrats futures, ce qui, ici encore, donnerait un flux total de $55 - 6 = 49$ millions. Dans tous les cas, le flux final est de 49 millions de dollars US du fait de la couverture par les futures.

Les positions longues

Les couvertures qui nécessitent une position longue peuvent être illustrées par un exemple symétrique du précédent. Imaginons, le 15 janvier, une entreprise qui doit acheter 100 000 livres de cuivre le 15 mai pour son processus de production. Le prix spot du cuivre est de 340 cts la livre, et le prix futures du contrat échéance mai est de 320 cts par livre. Le fabricant peut couvrir sa position par des contrats sur le cuivre cotés sur le

COMEX, division du CME Group. Chaque contrat porte sur 25 000 livres ; il faut donc prendre une position longue sur quatre contrats. Cette stratégie a pour effet de fixer le prix d'achat futur à 320 cts. Si le prix spot le 15 mai est de 325 cts, l'industriel doit payer 325 000 $ pour acheter le cuivre, mais il gagne 5 cts par livre sur le contrat, soit 5 000 $ sur la totalité des quatre contrats, puisque :

$$4 \times 25\,000 \times (3{,}25 - 3{,}2) = 5\,000\ \$$$

Si le prix du cuivre est à 305 cts, le coût d'achat est seulement de 305 000 $, mais 15 cts par livre sont perdus sur la position futures, soit un total de 15 000 $, ramenant le décaissement total à 320 000 $. Remarquons qu'ici il vaut mieux acheter le cuivre à terme par l'intermédiaire d'un futures que de l'acheter au comptant en janvier, puisque le prix spot est de 340 cts, auxquels il convient d'ajouter le coût de stockage jusqu'en mai et les intérêts à payer, liés au financement de l'achat. Toutefois, pour une entreprise qui utilise de manière habituelle le cuivre dans son processus de production, le prix spot plus élevé est compensé par l'avantage consistant à détenir le produit physique plutôt que le futures[1]. En effet, elle pourrait très bien en avoir besoin plus tôt et ne craint pas une quelconque pénurie. Bien sûr, si la firme est sûre de ne pas avoir besoin de ce cuivre avant le 15 mai, le rendement d'opportunité n'a pas de valeur et une position sur le contrat futures est alors plus intéressante que l'achat immédiat du cuivre.

Ces divers exemples supposent que la position est dénouée pendant le mois de livraison du contrat. La couverture a donc le même effet que si la livraison associée au contrat était réellement réalisée. Mais en général ce n'est pas le cas car la livraison est coûteuse. Le plus souvent, les hedgers en position longue évitent cette livraison en dénouant leur position sur le contrat avant la période de livraison.

Bien que nous ayons identifié prix forward et prix futures, il faut noter que la performance d'une couverture est un peu affectée par la distinction. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, la position sur les futures engendre des flux quotidiens, alors qu'une position sur un contrat forward donne lieu à un seul flux terminal.

3.2 Les arguments pour ou contre la couverture

Les exemples précédents sont des arguments en faveur de la couverture. La plupart des entreprises industrielles n'ont aucune compétence particulière pour prévoir la valeur de telle ou telle variable économique dans trois ou six mois. Par conséquent, la couverture des risques associés à la variation de ces variables paraît judicieuse. Cette couverture permet aux entreprises de se concentrer sur ce qu'elles savent faire, produire et gérer des risques industriels.

En pratique, il reste cependant de nombreux risques résiduels qui ne sont pas couverts en prenant une position comme celles que nous venons d'exposer. Le reste de cette section en expose les raisons.

1. Ce rendement d'opportunité (*convenience yield*) sera étudié à la section 5.11.

La couverture et les actionnaires

Un argument classique, allant à l'encontre de la couverture, stipule que les actionnaires peuvent, s'ils le souhaitent, se couvrir eux-mêmes. Ils n'ont pas besoin que l'entreprise le fasse. Cet argument pose quand même un problème. Il suppose implicitement que les actionnaires ont la même information que les managers sur les risques encourus. Le plus souvent, ce n'est pas le cas. Cet argument ignore aussi les imperfections de marché comme les coûts de transaction. Ceux-ci sont proportionnellement moindres sur les transactions importantes. La couverture est donc susceptible d'être moins coûteuse pour la firme que pour les investisseurs individuels. De plus, la taille des contrats sur les marchés organisés rend le plus souvent impossible la couverture par un actionnaire individuel.

Les actionnaires peuvent, en revanche, facilement diversifier leur portefeuille. Un investisseur détenant un portefeuille bien diversifié peut ainsi éviter de nombreux risques auxquels sont soumises les entreprises. Par exemple, un individu peut détenir des actions d'une entreprise utilisatrice de cuivre mais aussi celles d'un producteur de cuivre, de façon que l'exposition au risque de prix du cuivre soit minime. Si les firmes agissent dans l'intérêt d'actionnaires détenant des portefeuilles bien diversifiés, on peut mettre en doute la nécessité, pour les entreprises, de se couvrir. Cependant, savoir si un argument de ce type est de nature à influencer les managers est une question ouverte.

Couverture et concurrence

Si, dans un certain secteur, la couverture n'est pas la norme, il peut ne pas être judicieux pour une entreprise de se distinguer de ses concurrents. La concurrence dans le secteur peut en effet conduire les prix de vente des produits à s'ajuster aux variations des coûts supportés (prix des matières premières, taux d'intérêt, taux de change, etc.) par les sociétés. Par conséquent, une compagnie qui ne se couvre pas peut espérer garder un taux de marge constant. En revanche, une firme qui se couvre aura un taux de marge beaucoup plus volatil.

Considérons par exemple deux entreprises fabriquant des bijoux en or, appelées Orsur et Orisk ; dans ce secteur, les entreprises ne se couvrent généralement pas contre les variations de prix de leur matière première principale et Orisk ne fait pas exception. En revanche, Orsur a décidé d'agir différemment en couvrant ses achats des 18 prochains mois par une position longue sur des contrats futures.

La compagnie Orsur réduit-elle son risque en agissant ainsi ? Si le prix de l'or augmente, le prix des bijoux suivra et le taux de marge d'Orisk ne sera pas modifié, alors que celui d'Orsur augmentera. Si, en revanche, le prix de l'or baisse, le prix des bijoux diminuera et le taux de marge d'Orsur fera de même, alors que celui d'Orisk restera constant. On peut même imaginer que le taux de marge d'Orsur devienne négatif comme la conséquence de la décision de couverture. Les différentes situations sont résumées dans le tableau 3.1.

On peut en conclure que tous les effets des variations de prix sur la profitabilité de l'entreprise doivent être pris en compte dans l'élaboration d'une stratégie de couverture.

Tableau 3.1 : Les dangers de la couverture quand les concurrents ne se couvrent pas

Variations du prix de l'or	Effet sur le prix des bijoux	Effet sur le profit d'Orisk	Effet sur le profit d'Orsur
Hausse	Hausse	Aucun	Hausse
Baisse	Baisse	Aucun	Baisse

Couvrir ou ne pas couvrir : là est la question !

Il est important de garder à l'esprit qu'une stratégie de couverture par des contrats futures peut aussi bien améliorer les profits que les diminuer par rapport à une situation sans couverture. Dans l'exemple du producteur de pétrole considéré précédemment, si le prix du pétrole baisse, la société perd de l'argent sur ses ventes et la position sur les contrats futures permet de compenser cette perte. La situation est donc meilleure avec la couverture et les supérieurs hiérarchiques du trésorier apprécieront. Symétriquement, si le prix du pétrole monte, le résultat des ventes augmente, mais cette augmentation est compensée par les pertes sur les contrats futures et le résultat est inférieur à celui qui aurait été obtenu sans couverture.

Quoique la décision de couvrir ait été parfaitement logique, il se peut que le trésorier ait quelques difficultés à la justifier *a posteriori*. Si le prix est de 55 $ le baril à la fin de la période de couverture, la perte sur les contrats futures est de 6 millions de dollars US. On peut imaginer la conversation entre le PDG et le trésorier.

Le PDG : C'est terrible. Nous avons perdu 6 millions de dollars US sur le marché à terme en quelques mois. Comment est-ce possible ? J'exige une explication.

Le trésorier : L'objet des contrats futures n'était pas de faire des profits, mais de nous couvrir contre les variations de prix. N'oubliez pas que nous avons augmenté notre résultat de 6 millions sur les ventes de pétrole à cause de l'augmentation du prix.

Le PDG : Quel rapport ? C'est comme si vous disiez qu'il ne faut pas s'inquiéter de la baisse des ventes en Californie, sous prétexte que celles de New York sont en hausse !

Le trésorier : Si le prix du baril avait baissé…

Le PDG : Peu m'importe de savoir ce qui se serait passé si le prix avait baissé. Le fait est qu'il a monté ! Je ne vois vraiment pas ce qui vous a pris de jouer sur ces marchés. Nos actionnaires vont attendre d'excellents résultats ce trimestre et je vais devoir leur expliquer que vos initiatives ont réduit nos profits de 6 millions. J'ai peur que vous ne perdiez votre bonus pour cette année.

Le trésorier : Ce n'est pas juste. Je…

Le PDG : Pas juste ? Vous avez plutôt de la chance de ne pas être viré. Vous avez perdu 6 millions.

Le trésorier : Tout dépend de la façon dont on voit le problème.

Cette conversation aide à comprendre pourquoi tant de trésoriers sont réticents face aux opérations de couverture. Celles-ci réduisent le risque de l'entreprise, mais peuvent mettre le trésorier dans une position délicate, en particulier si les autres décideurs ne comprennent pas clairement les tenants et aboutissants de cette démarche. La seule solution est que la politique de couverture soit expliquée à l'ensemble des décideurs de façon que chacun saisisse bien les enjeux et les résultats possibles. L'idéal est que cette politique soit établie par la Direction générale et clairement communiquée à l'ensemble des directions et aux actionnaires (voir encadré 3.1).

Encadré 3.1 La stratégie de couverture des compagnies minières (sur l'or)

Il est assez naturel pour une entreprise qui exploite des mines d'or de chercher à se couvrir contre les variations de prix de l'or. Il se passe en général plusieurs années avant qu'une mine ne soit épuisée. Par conséquent, quand une entreprise décide d'entreprendre l'exploitation, elle s'expose pour longtemps aux variations de prix de ce métal précieux. De ce fait, un projet qui peut paraître profitable peut devenir largement déficitaire si le prix de l'or chute. C'est pourquoi les mines d'or prennent en général la précaution de présenter de manière détaillée leurs stratégies de couverture aux actionnaires potentiels. Il reste néanmoins des exploitants qui décident de ne pas se couvrir. Dans ce cas, les investisseurs qui achètent les actions de ces sociétés veulent pleinement profiter de la hausse si elle survient, quitte à prendre le risque d'une perte qui peut être conséquente en cas de chute des cours. Ceux qui, en revanche, décident de se couvrir, estiment la production future et prennent des positions courtes sur des contrats futures ou forward, de façon à assurer un prix de revente fixé à leur production.

Imaginez que vous soyez Goldman Sachs et que vous veniez de prendre position (longue) sur un forward avec pour contrepartie une compagnie minière. Comment pouvez-vous couvrir votre propre risque ? La réponse est la suivante : vous allez emprunter de l'or à la banque centrale et le revendre ensuite au prix du marché (les banques centrales disposent en général de grandes quantités d'or). À l'échéance du contrat, vous allez acheter l'or à la compagnie minière, au prix prévu dans le contrat forward, et vous rendrez cet or à la banque centrale qui vous l'a prêté. Vous aurez simplement payé un intérêt à la banque centrale pour le prêt de l'or. Le prix forward reflète donc à la fois le taux de rendement que vous pouvez obtenir et le taux auquel vous empruntez l'or auprès de la banque centrale.

3.3 Le risque de base

Les exemples donnés dans la section précédente sont presque trop beaux pour être vrais. Le hedger était capable d'identifier la date précise à laquelle l'actif sous-jacent devait être acheté ou vendu. Il pouvait utiliser des contrats futures qui permettaient d'éliminer entièrement le risque de variation de prix.

En pratique, c'est généralement moins simple, pour les raisons suivantes.

1. L'actif dont les variations de prix doivent être couvertes n'est pas forcément le même que le sous-jacent du contrat futures.
2. Le hedger peut ne pas connaître avec exactitude la date à laquelle il devra acheter ou vendre l'actif.
3. La stratégie de couverture peut éventuellement imposer de dénouer la position sur les contrats futures bien avant leur échéance.

Ces différents éléments donnent naissance au *risque de base.*

La base

La base est définie comme la différence entre le prix au comptant et le prix futures[2]. Si l'actif à couvrir et le sous-jacent du contrat futures coïncident, la base sera nulle à l'échéance du contrat. Mais avant cette date, elle peut être positive ou négative. Par exemple, sur le tableau 2.2, on voit que le 3 mai 2016, la base était négative sur l'or et positive sur les contrats à court terme de soja si on suppose que le prix futures échéance juin est proche du prix spot. Le graphique 3.1 montre comment la base peut changer au cours du temps dans le cas d'une base positive avant l'échéance. Un accroissement de la base sera qualifié de « renforcement » et une diminution d'« affaiblissement ».

Pour examiner plus précisément le risque de base, notons :

S_1 le prix spot à la date t_1 ;

S_2 le prix spot à la date t_2 ;

F_1 le prix futures à la date t_1 ;

F_2 le prix futures à la date t_2 ;

b_1 la base à la date t_1 ;

b_2 la base à la date t_2.

Supposons qu'une couverture soit mise en œuvre à la date t_1 et dénouée à la date t_2 ; par exemple, considérons des prix spot et futures en t_1 égaux à 2,50 € et 2,20 €, ces mêmes prix en date t_2 étant 2 € et 1,90 €. La définition de la base permet d'écrire :

$$b_1 = S_1 - F_1$$
$$b_2 = S_2 - F_2$$

ce qui, dans notre exemple, se traduit par $b_1 = 0{,}3$ € et $b_2 = 0{,}1$ €.

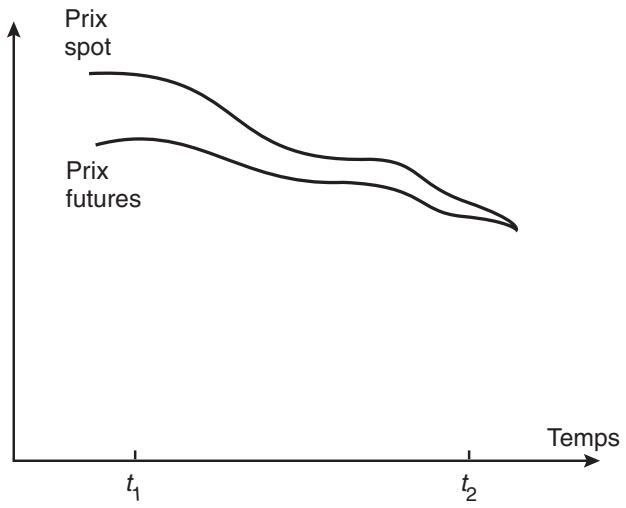
Analysons tout d'abord la situation d'un hedger qui prend une position courte en t_1 car il sait qu'il vendra le sous-jacent en t_2. Le prix spot de l'actif sera S_2 et le gain/perte sur

2. La définition alternative, base = prix futures – prix spot, est parfois utilisée, spécialement quand le sous-jacent du contrat est un actif financier. Les relations montrées dans cette partie sont inversées dans ce cas.

le contrat futures est égal à $F_1 - F_2$. Le prix effectivement obtenu pour une unité d'actif vendue est donc :

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

c'est-à-dire 2,30 €. La valeur de F_1 est connue dès la date t_1, alors que celle de b_2 sera observée en t_2, ce qui engendre le risque de base.



Graphique 3.1 : Variation de la base au cours du temps

Le risque auquel est exposé un hedger provient parfois d'un actif qui n'est pas le sous-jacent du contrat. Le risque de base est susceptible d'augmenter dans ce cas (il s'agit en fait d'un risque de corrélation dans cette situation). Notons S_2^* le prix en date t_2 de l'actif à couvrir ; le hedger s'assure, comme précédemment, un prix d'achat ou de vente pour l'actif égal à :

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

que l'on peut réécrire :

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

Les termes $(S_2^* - F_2)$ et $(S_2 - S_2^*)$ sont les deux composantes de la base. Le premier est la base qui serait observée si l'actif sous-jacent au contrat était le même que l'actif négocié, alors que le second traduit la différence entre ces deux actifs. Il est bon de noter que le risque de base peut améliorer ou détériorer la position du hedger. Dans le cas d'une couverture courte, la position s'améliore si la base s'élargit, alors qu'elle se détériore si la base devient plus étroite. Pour une couverture longue, la situation inverse est observée.

Le choix du contrat

Lorsqu'une couverture parfaite n'est pas disponible, deux décisions doivent être prises.

1. Choisir l'actif sous-jacent du contrat parmi les contrats disponibles.
2. Choisir le mois de livraison.

Quand l'actif à couvrir est disponible comme support de contrat, la réponse à la première interrogation est immédiate. Quand ce n'est pas le cas, il faut analyser soigneusement l'offre de contrats pour sélectionner celui dont les prix futures sont le plus corrélés avec l'actif à couvrir.

Le choix de l'échéance est influencé par plusieurs facteurs. Dans les exemples précédents, nous avions retenu le mois de livraison contenant la date à laquelle l'actif serait acheté ou vendu. Dans la pratique, c'est souvent un mois de livraison ultérieur qui est retenu. Il s'agit d'une simple précaution car les prix futures ont parfois des comportements erratiques pendant le mois de livraison. De plus, quand la période de livraison est le mois entier, un hedger avec une position longue peut se voir obligé de prendre livraison s'il possède encore le contrat au début de cette période, ce qui n'est pas forcément son objectif.

De manière générale, le risque de base augmente avec la durée de vie résiduelle du contrat à la date de clôture de la position de couverture. Par conséquent, une règle de bon sens consiste à choisir le mois de livraison le plus proche postérieur au mois qui contient la date de clôture souhaitée de la position de couverture. Si, pour un contrat donné, les échéances disponibles sont mars, juin, septembre et décembre, on choisira le contrat mars pour des couvertures dont l'horizon se situe en décembre, janvier février, on choisira juin pour des couvertures dont l'horizon est mars, avril, mai, et ainsi de suite. Bien sûr, cette règle suppose qu'il y a une liquidité suffisante sur le marché des différents contrats. Il est courant que la liquidité soit beaucoup plus forte sur l'échéance la plus courte, ce qui dans certains cas peut amener le hedger à choisir systématiquement l'échéance la plus courte, et éventuellement à renouveler sa position si nécessaire. Cette stratégie est abordée un peu plus loin.

■ **Exemple 3.1** Le 1er mars, une entreprise américaine s'attend à recevoir 50 millions de yens de l'un de ses clients japonais à la fin du mois de juillet. Les mois de livraison des contrats futures sur le yen ont pour échéances les fins de trimestres civils, et chaque contrat porte sur 12,5 millions de yens. L'entreprise prend alors une position courte sur quatre contrats échéance septembre. À la fin du mois de juillet, quand l'encaissement arrive, la position de couverture est dénouée par le rachat de quatre contrats. Le taux de change futures le 1er mars est de 1,0800 ct par yen, et fin juillet, les prix spot et futures correspondants sont respectivement 1,0200 et 1,0250. Le gain sur les contrats futures est $1{,}0800 - 1{,}0250 = 0{,}0550$ cts par yen. La base est, quant à elle, égale à $1{,}0200 - 1{,}0250 = -0{,}0050$ cts quand la position est dénouée. Le prix effectivement obtenu en cts pour 100 yens est :

$$1{,}0200 + 0{,}0550 = 1{,}0750$$

qu'on peut encore écrire :

$$1{,}0800 - 0{,}0050 = 1{,}0750$$

Par conséquent, le montant total reçu, en dollars US, est égal à $50 \times 0{,}01075$ million de dollars US, soit 537 500 $.

■ **Exemple 3.2** Le 8 juin, une entreprise sait qu'elle devra acheter 20 000 barils de pétrole brut en octobre ou novembre. La taille des contrats traités sur le NYMEX, division du CME Group, est de 1 000 barils par contrat. L'entreprise décide de prendre une position longue sur 20 contrats échéance décembre à un prix futures de 48 $ le baril. L'achat du pétrole est finalement réalisé le 10 novembre et la position sur les contrats est dénouée à cette date, alors que les prix spot et futures sont respectivement 50 $ et 49,10 $. Le gain sur les contrats est $49{,}10 - 48 = 1{,}10$ $ par baril. À la date de clôture de la position, la base est de $50 - 49{,}10 = 0{,}90$ $. Le prix effectivement payé par baril s'écrit comme la différence entre le prix spot et le gain sur les contrats :

$$50 - 1{,}10 = 48{,}90 \text{ \$}$$

ou encore comme le prix futures initial plus la base, c'est-à-dire :

$$48 + 0{,}90 = 48{,}90 \text{ \$}$$

Le prix total payé est donc $48{,}90 \times 20\,000 = 978\,000$ $.

3.4 La couverture croisée

Dans les exemples 3.1 et 3.2, l'actif à couvrir est aussi l'actif sous-jacent du contrat, ce qui n'est pas toujours le cas. Quand ces deux actifs sont différents, on parle de *couverture croisée*. Le ratio de couverture est le rapport du volume de la position à prendre sur le marché futures pour couvrir une position et du volume de la position sur l'actif à couvrir. Pour l'instant, nous avons toujours utilisé un ratio égal à 1. Dans l'exemple 3.2, l'exposition au risque concernait 20 000 barils de pétrole et la position sur les futures correspondait exactement à cette quantité. Cependant, la minimisation du risque par le hedger n'impose pas toujours de choisir cette valeur pour le ratio de couverture.

Le ratio de couverture de variance minimale

Nous utiliserons les notations suivantes :

ΔS : variation du prix spot pendant la période de couverture ;

ΔF : variation du prix futures pendant la période de couverture ;

σ_S : écart-type de ΔS ;

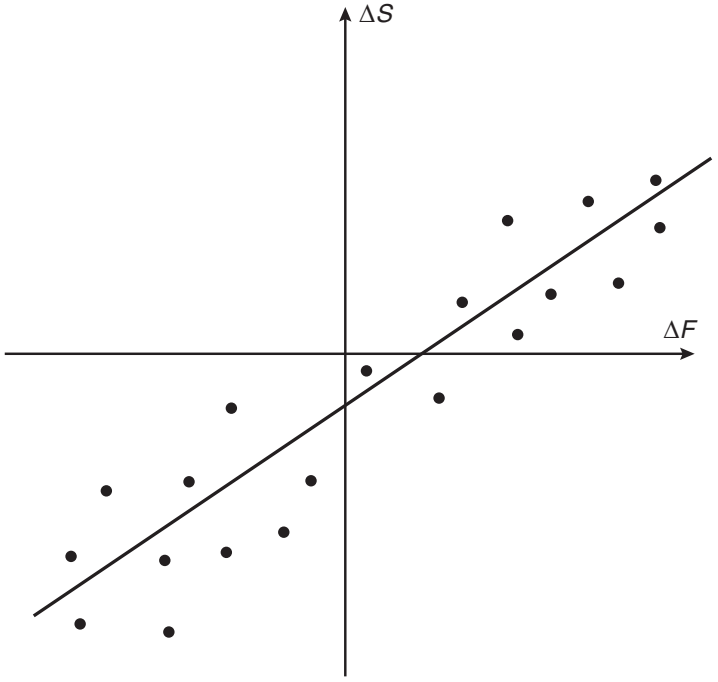
σ_F : écart-type de ΔF ;

ρ : corrélation entre ΔS et ΔF ; h^* : ratio de couverture qui minimise le risque de la position du hedger.

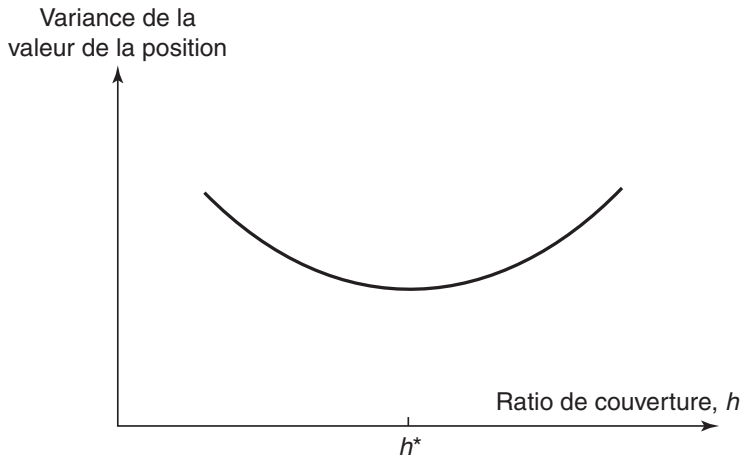
Dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons que le ratio h^* s'écrit :

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{3.1}$$

Le ratio de couverture optimal est donc le produit de la corrélation des variations de prix et du ratio des écarts-types de ΔS et ΔF. Le graphique 3.2 montre comment évolue la variance de valeur de la position couverte en fonction du ratio retenu.



Graphique 3.2 : Régression de la variation du prix spot sur la variation du prix futures



Graphique 3.3 : Relation entre la variance de valeur de la position et le ratio de couverture

Lorsque la corrélation est parfaite, égale à 1, et que les variances sont égales, le ratio est évidemment égal à 1. De manière générale, le ratio optimal est la pente de la droite de régression de ΔS sur ΔF, comme le montre le graphique 3.2. Si ΔF est deux fois plus volatil que ΔS et si la corrélation est parfaite, le ratio sera égal à 0,5, ce qui s'explique intuitivement puisque les variations de F sont deux fois plus importantes que celles de S. L'efficacité de la couverture est mesurée par la part de variance éliminée par la couverture, c'est-à-dire :

$$h^{*2}\,\frac{\sigma_F^2}{\sigma_S^2}$$

Cette quantité est en fait le R^2 de la régression de ΔF sur ΔS. Les paramètres ρ, σ_F et σ_S de l'équation (3.1) sont estimés à partir de données historiques sur ΔS et ΔF

(l'hypothèse implicite est donc que la relation entre les variations passées restera stable dans le futur). On mesure généralement les variations de prix sur des intervalles de longueur constante. Dans l'absolu, la longueur des intervalles devrait être la même que la durée de la couverture, mais en pratique, cela limite considérablement le nombre de données et des intervalles plus courts sont retenus.

Le nombre optimal de contrats

Notons :

Q_A : taille de la position à couvrir (en unités) ;

Q_F : taille d'un contrat futures (en unités) ;

N^* : nombre optimal de contrats futures pour la couverture.

Les contrats futures doivent avoir, en fonction des résultats précédents, une valeur nominale h^*Q_A. Par conséquent, le nombre optimal de contrats est égal à :

$$N^* = \frac{h^*Q_A}{Q_F} \tag{3.2}$$

L'exemple 3.3 montre comment ces résultats peuvent être utilisés par une compagnie aérienne pour couvrir le risque de prix d'un achat de kérosène.

■ **Exemple 3.3** Une compagnie aérienne doit acheter deux millions de gallons de kérosène dans un mois et décide de se couvrir par des contrats futures sur le fuel domestique [3]. Le tableau 3.2 donne, pour $n = 15$ mois consécutifs, les variations ΔS (kérosène) et ΔF (fuel domestique) en dollars US par gallon. On notera x_i et y_i les variations respectives de F et S pour le mois i. Le tableau 3.2 permet, à l'aide des formules statistiques usuelles, de calculer les écarts-types et le coefficient de corrélation :

$$\sigma_F = 0{,}0313$$
$$\sigma_S = 0{,}0263$$
$$\rho = 0{,}928$$

L'équation (3.1) nous indique que le ratio de variance minimum h^* est donné par :

$$0{,}928 \times \frac{0{,}0263}{0{,}0313} = 0{,}78$$

Chaque contrat sur fuel domestique porte sur 42 000 gallons ; l'équation (3.2) nous donne alors le nombre de contrats :

$$\frac{0{,}78 \times 2\,000\,000}{42\,000}$$

qui, arrondi à l'entier voisin, est égal à 37.

3. Il existe des contrats sur le kérosène, mais les contrats sur le fuel domestique sont souvent utilisés par les compagnies pour couvrir leur exposition au risque car le marché de ces contrats est plus actif.

Tableau 3.2 : Données pour calculer le ratio de variance minimum quand le contrat sur le fuel domestique est utilisé pour couvrir l'achat de kérosène

Mois i	**Variation du prix futures par gallon** (ΔF)	**Variation du prix du kérosène par gallon** (ΔS)
1	0,021	0,029
2	0,035	0,020
3	−0,046	−0,044
4	0,001	0,008
5	0,044	0,026
6	−0,029	−0,019
7	−0,026	−0,010
8	−0,029	−0,007
9	0,048	0,043
10	−0,006	0,011
11	−0,036	−0,036
12	−0,011	−0,018
13	0,019	0,009
14	−0,027	−0,032
15	0,029	0,023

L'ajustement pour la compensation journalière

L'analyse présentée jusqu'ici est valide tant que la couverture est réalisée avec des contrats forward. Quand des contrats futures sont utilisés, il y a lieu d'opérer un léger ajustement pour tenir compte de leur compensation journalière. On note alors $\hat{\sigma}_S$ et $\hat{\sigma}_F$ les écarts-types des variations relatives des prix spot et futures, et $\hat{\rho}$ la corrélation entre ces variations. Dans ces conditions, le ratio de couverture de l'équation (3.1) devient $\hat{\rho}\frac{S\hat{\sigma}_S}{F\hat{\sigma}_F}$. De l'équation (3.2), on déduit le nombre de contrats nécessaire à la couverture pour le jour à venir :

$$N^* = \hat{\rho}\,\frac{S\hat{\sigma}_S\,Q_A}{F\hat{\sigma}_F\,Q_F}$$

Ce résultat, qui est une sorte d'ajustement sur mesure [4], peut être réécrit sous la forme :

$$N^* = \frac{\hat{h}^*\,V_A}{V_F} \tag{3.3}$$

où V_A est la valeur de la position (en unités monétaires) et V_F l'équivalent monétaire d'un contrat futures, c'est-à-dire le produit du prix futures par Q_F. Le ratio de couverture s'écrit dans ce cas :

$$\hat{h} = \hat{\rho}\,\frac{\hat{\sigma}_S}{\hat{\sigma}_F}$$

4. L'expression anglo-saxonne pour cet ajustement est *tailing the hedge*. Voir le problème 5.23 pour une discussion dans le contexte du marché des changes.

En théorie, cela signifie que les couvertures devraient être ajustées en permanence, puisque ce ratio change, mais ce n'est bien sûr pas le cas en pratique car les modifications sont le plus souvent minimes.

3.5 Les futures sur indices

Nous allons maintenant analyser les futures sur indices et la façon dont ils sont utilisés dans le cadre de stratégies de couverture.

Un indice d'actions représente un portefeuille hypothétique d'actions et l'évolution de l'indice dans le temps retrace les variations du portefeuille qu'il représente. Le poids de chaque action dans l'indice est la proportion du portefeuille investie dans cette action. L'accroissement relatif de l'indice dans un intervalle de temps donné correspond à la croissance (en pourcentage) de la valeur du portefeuille qu'il représente au cours de cette période. Les dividendes payés par les titres ne sont pas, en général, intégrés dans le calcul de l'indice. En conséquence, l'évolution de la valeur d'un indice mesure plutôt les gains/pertes en capital sur le portefeuille représentatif de l'indice [5].

Même si la composition d'un indice reste inchangée, les poids des actions qui le composent changent dans le temps en fonction des cotations de ces actions. Quand le prix d'un titre augmente plus que les autres, son poids dans l'indice augmente également. Certains indices sont construits sur l'hypothèse d'un portefeuille contenant une unité de chaque action. Dans ce cas, le poids est proportionnel au cours coté et un ajustement est réalisé lorsqu'une opération sur titres a lieu, comme une distribution d'actions gratuites. D'autres indices accordent aux actions qui les composent un poids proportionnel à leurs capitalisations boursières. Dans ce cas, l'ajustement aux opérations sur titres est automatique.

Les indices d'actions

Les principaux indices européens sont les suivants.

- L'indice DAX-30 est composé de 30 titres représentatifs de la bourse allemande. Le contrat futures sur le DAX-30 (code FDAX) est coté sur l'Eurex. Un point d'indice vaut 25 €. Une description de ce contrat sur indice peut être obtenue sur le site http://www.eurexchange.com.
- Le principal indice britannique est le FTSE100, qui comporte 100 titres cotés sur le London Stock Exchange (LSE). Les contrats futures sur cet indice (code Z) sont cotés sur Euronext. Un point d'indice vaut 10 £. Le site http://www.euronext.com permet d'avoir une description des contrats futures sur indice cotés sur Euronext.
- L'indice CAC 40 français est composé de 40 titres représentant une part importante de la capitalisation boursière de Paris. Le contrat CAC 40 est coté sur Euronext (code FCE). Un point d'indice vaut 10 €.

5. Les indices de rentabilité totale (*total return index*) sont une exception à cette règle. Ils sont calculés en supposant que les dividendes sont réinvestis dans le portefeuille représentatif de l'indice.

- Le DJ Euro Stoxx 50 (pour la zone euro) et le DJ Stoxx 50 (pour l'Europe) sont deux indices de 50 actions européennes importantes. Les contrats futures sur cet indice sont cotés sur l'Eurex (code FSEX pour le future Euro Stoxx 50). Un point d'indice vaut 10 €. Vous obtiendrez des détails à l'adresse http://www.eurexchange.com.

Le tableau 3.3 montre les prix futures de contrats portant sur plusieurs indices américains le 3 mai 2016.

Tableau 3.3 : Prix futures des contrats sur indice, le 3 mai 2016, sur le CME Group

	Ouverture	Plus haut	Plus bas	Compens.	Dernier	Variation	Volume
Mini Dow Jones Industrial Average, 5 $ fois l'indice (CME Group)							
Juin 2016	17 806	17 814	17 585	17 799	17 697	–102	127 956
Sept. 2016	17 719	17 719	17 500	17 710	17 622	–88	106
Mini S&P500 50 $ fois l'indice (CME Group)							
Juin 2016	2 075,50	2 076,25	2 048,00	2 074,25	2 060,25	–14,00	1 314 974
Sept. 2016	2 067,00	2 068,00	2 040,25	2 066,50	2 052,00	–14,50	6 416
Déc. 2016	2 061,00	2 061,00	2 033,25	2 059,75	2 044,75	–15,00	405
Mini Nasdaq100 20 $ fois l'indice (CME Group)							
Juin 2016	4 372,00	4 374,50	4 319,50	4 369,00	4 352,50	–16,50	189 845
Sept. 2016	4 359,00	4 360,25	4 316,00	4 361,75	4 349,75	–12,00	109

Ces indices américains sont les suivants :

- le Dow Jones Industrial Average, composé de 30 titres ; les poids sont proportionnels aux prix des titres ; deux contrats futures sur cet indice, cotés sur le CME Group, portent respectivement sur 10 $ et 5 $ fois la valeur de l'indice ; ce dernier s'appelle le *Mini DJ Industrial Average* ;
- le Standard & Poors 500 (S&P500), composé de 500 titres ; les poids sont proportionnels aux capitalisations boursières des actions qui le composent ; il compte 400 entreprises industrielles, 40 actions de services d'utilité publique, 20 actions du secteur des transports et 40 du secteur financier ; deux contrats futures sur cet indice sont négociés sur le CME Group ; l'un porte sur 250 $ fois la valeur de l'indice, et l'autre sur 50 $ fois cette valeur (*Mini S&P500*) ;
- le Nasdaq100, qui comporte 100 titres cotés par le National Association of Securities Dealers Automatic Quotations Service ; le CME Group propose deux contrats sur cet indice correspondant à 100 $ fois la valeur de l'indice et 20 $ fois la valeur de l'indice (*Mini Nasdaq100*).

Certains contrats futures en dehors des États-Unis ont aussi des volumes de transactions importants. Par exemple, le contrat FESX sur l'indice Euro Stoxx 50 est abondamment traité sur l'Eurex (www.eurexchange.com). De même, les contrats sur l'indice chinois CSI 300 sont largement échangés sur le China Financial Futures Exchange (CFFEX, www.cffex.com.cn).

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, les contrats sur indices sont dénoués en cash. Tous ces contrats font l'objet d'un *marking to market*, soit sur le prix d'ouverture, soit sur le prix de clôture de la séance précédente. Par exemple, le dénouement des contrats S&P500 se fait au cours d'ouverture du troisième vendredi du mois de livraison.

La couverture d'un portefeuille d'actions

Les futures sur indices sont en général utilisés pour couvrir un portefeuille d'actions contre les variations de prix. Notons V_A la valeur du portefeuille aujourd'hui et V_F la valeur du contrat (prix futures multiplié par taille du contrat). Si le portefeuille duplique exactement l'indice, le ratio de couverture est égal à 1, et l'équation (3.3) montre que le nombre optimal de contrats sur lequel une position courte doit être prise est égal à :

$$N^* = \frac{V_A}{V_F} \tag{3.4}$$

Considérons par exemple un portefeuille qui vaut 5,05 millions d'euros et qui duplique le CAC 40. Le contrat futures CAC 40, coté 5 050 sur Euronext.Liffe, porte sur 10 € fois l'indice. Si l'indice est à 5 000, on a V_A= 5 050 000 et V_F = 10 × 5 050 ; il faut donc prendre une position courte sur 100 contrats pour couvrir la position.

Quand le portefeuille ne duplique pas exactement l'indice, ce qui est le cas le plus courant, on peut utiliser le β du portefeuille (donné par le modèle d'équilibre des actifs financiers) pour déterminer la couverture optimale. β est la pente de la droite de régression des rentabilités du portefeuille, en excès du taux sans risque, sur les rentabilités du portefeuille de marché (l'indice est alors considéré comme un proxy de ce portefeuille), toujours en excès du taux sans risque. Lorsque β est supérieur à 1, les variations du portefeuille tendent à amplifier les variations de l'indice, alors que si β est plus petit que 1, les variations sont amorties par rapport à celles de l'indice. Dans cette situation, le nombre optimal de contrats est défini par :

$$N^* = \beta \frac{V_A}{V_F} \tag{3.5}$$

Cette relation suppose que la maturité du contrat est proche de celle de la couverture. En comparant les équations (3.5) et (3.3), on constate que $h^* = \beta$. Ce n'est pas surprenant, puisque le ratio h^* est la pente de la droite de régression des variations du portefeuille sur celles du prix futures du contrat sur indice, alors que β est la pente de la droite de régression des rentabilités du portefeuille sur celles de l'indice.

Considérons l'exemple suivant :

valeur du CAC 40 = 5 000 ;
valeur du portefeuille = 5 050 000 € ;
taux sans risque = 4 % ;
rendement en dividende de l'indice = 1 % ;
bêta du portefeuille = 1,5.

Supposons que le contrat CAC 40 utilisé pour une couverture d'horizon 3 mois ait une durée de vie de 4 mois. Le prix futures du contrat est supposé égal à 5 050.

De l'équation (3.4), on déduit le nombre de contrats futures :

$$1{,}5 \times \frac{5\,050\,000}{50\,500} = 150$$

Une position courte sur 150 contrats doit donc être prise.

Supposons que l'indice chute à 4 500 trois mois plus tard et que le prix futures soit de 4 511,26 (nous verrons au chapitre 5 comment est déterminé ce prix).

Le gain réalisé sur les futures s'écrit :

$$150 \times (5\,050 - 4\,511{,}26) \times 10 = 808\,110\,€$$

La perte sur l'indice est de 10 % et le rendement en dividende de l'indice de 1 % par an, soit 0,25 % sur trois mois [6]. Par conséquent, la rentabilité de l'indice est −9,75 % sur la période de 3 mois. De plus, le taux sans risque annuel est 4 %, soit 1 % sur un trimestre. La relation du CAPM s'écrit :

Rentabilité espérée du portefeuille
= Taux sans risque + Bêta × (Rentabilité de l'indice − Taux sans risque)

c'est-à-dire :

$$1{,}0 + [1{,}5 \times (-9{,}75 - 1{,}0)] = -15{,}125\ \%$$

La valeur espérée du portefeuille (en euros) est donc :

$$5\,050\,000 \times (1 - 0{,}15125) = 4\ 286\ 188\,€$$

La valeur finale de la position s'écrit :

$$808\,110 + 4\,286\,188 = 5\,094\,297{,}50\,€$$

Le tableau 3.4 donne les résultats de cette couverture pour plusieurs valeurs de l'indice.

Tableau 3.4 : Performance de la couverture par des contrats futures sur indices

Valeurs futures de l'indice	4 500	4 800	5 000	5 200	5 500
Rentabilité de l'indice	−9,750 %	−3,750 %	0,250 %	4,250 %	10,250 %
Rentabilité du portefeuille (CAPM)	−15,125 %	−6,125 %	−0,125 %	5,875 %	14,875 %
Valeur finale du portefeuille	4 286 188	4 740 688	5 043 688	5 346 688	5 801 188
Gain/perte portefeuille	−763 813	−309 313	−6 313	296 688	751 188
Prix futures théorique	4 511,26	4 812,02	5 012,52	5 213,02	5 513,77
Gain/perte sur les contrats	808 110,00	356 970,00	56 220,00	−244 530,00	−695 655,00
Position finale	5 094 297,50	5 097 657,50	5 099 907,50	5 102 157,50	5 105 532,50
Variation de la position	44 297,50	47 657,50	49 907,50	52 157,50	55 532,50
Rendement final de la position	0,88 %	0,94 %	0,99 %	1,03 %	1,10 %

6. Nous ignorons ici, pour simplifier la présentation, la composition en continu du taux sans risque et du rendement en dividende de l'indice.

La valeur de la position est très stable, pratiquement indépendante de la valeur de l'indice.

Ce tableau suppose que le taux de dividende dans les trois mois est connu, que le taux sans risque est constant et que la rentabilité du portefeuille est parfaitement corrélée à celle de l'indice. Ces hypothèses ne sont pas vérifiées en pratique et les résultats seront en général moins « parfaits » que ceux illustrés ici.

Pourquoi couvrir un portefeuille d'actions ?

Le tableau 3.4 montre que la valeur finale du portefeuille est proche de 5,1 millions d'euros, montant qui serait obtenu en investissant la valeur du portefeuille au taux sans risque sur trois mois (il est de 4 % par an). En effet, la couverture a justement pour objectif de faire progresser la valeur du portefeuille au rythme du taux sans risque. Alors pourquoi se couvrir de cette façon ? Il suffirait de liquider le portefeuille et d'investir la somme obtenue au taux sans risque pendant trois mois.

Une des raisons de ce comportement est que le gérant du portefeuille peut être persuadé que ses titres sont bien choisis, mais il n'a pas confiance dans l'évolution du marché dans son ensemble. En se couvrant ainsi (après un ajustement en fonction du bêta), il reste convaincu que son portefeuille fera mieux que l'indice. L'autre argument plus évident est que le gérant peut avoir, pour des raisons diverses, un horizon d'investissement long mais souhaite une protection à court terme. La stratégie alternative consistant à se débarrasser provisoirement du portefeuille est très lourde en termes de coûts de transaction explicites et implicites (liés à la liquidité du marché).

Changer le bêta d'un portefeuille

Dans l'exemple du tableau 3.4, le bêta de la position devient nul après la mise en place de la couverture. Parfois, les contrats futures sont utilisés pour simplement modifier le bêta d'une position sans forcément amener celui-ci à zéro. Dans l'exemple précédent, si l'on souhaitait réduire le bêta de moitié, il faudrait prendre une position courte sur deux fois moins de contrats, c'est-à-dire 75. De manière générale, pour faire passer le bêta d'une valeur β à une valeur β^* où $\beta > \beta^*$, il faut prendre une position courte sur un nombre de contrats égal à :

$$(\beta - \beta^*)\,\frac{V_A}{V_F}$$

Inversement, si $\beta < \beta^*$, il faut une position longue sur un nombre de contrats égal à :

$$(\beta^* - \beta)\,\frac{V_A}{V_F}$$

Conserver les profits du stock picking

Supposons que vous soyez doué pour le choix des titres individuels (stock picking). Vous détenez un portefeuille d'une ou quelques actions différentes et vous pensez qu'avec lui, vous battrez le marché. En revanche, vous ne savez pas ce que fera le marché lui-même. Que pouvez-vous faire dans ce cas ?

Vous pouvez prendre une position courte sur $\beta \frac{V_A}{V_F}$ contrats sur indice où β est le bêta de votre portefeuille ou de votre action, V_A est la valeur de celui-ci, et V_F est celle d'une unité de contrat sur l'indice. Si votre portefeuille performe mieux qu'un portefeuille diversifié de même bêta, vous sortirez gagnant de cette position.

Considérons un investisseur qui détient 20 000 actions d'une firme cotant 100 $. Il anticipe une volatilité importante du marché dans les prochains mois mais pense que l'action devrait surperformer le marché dans son ensemble. Il décide donc d'utiliser le contrat S&P500 pour couvrir sa position pendant un mois. Le bêta de l'action est égal à 1,1 et le prix futures est à 1 800. Chaque contrat porte sur 250 $ fois la valeur de l'indice. Dans ce cas, on a :

$$V_A = 20\,000 \times 100 = 2\,000\,000 \text{ \$}$$
$$V_F = 1\,800 \times 250 = 450\,000 \text{ \$}$$

Le nombre de contrats à retenir est alors :

$$1{,}1 \times \frac{2\,000\,000}{450\,000} = 4{,}89$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, cela suppose de prendre une position courte sur 5 contrats. Supposons que l'action cote 90 $ un mois plus tard alors que le prix futures du contrat est tombé à 1 600. L'investisseur perd :

$$20\,000 \times (100 - 90) = 200\,000 \text{ \$}$$

sur les actions et gagne sur le contrat :

$$5 \times 250 \times (1\,800 - 1\,600) = 250\,000 \text{ \$}$$

Dans cet exemple, la couverture a plus que compensé la perte sur les actions car l'action a moins baissé que le marché (compte tenu du bêta). Si le marché avait monté et que l'action ait monté plus qu'un portefeuille de même bêta, un gain aurait également été engrangé.

3.6 La couverture glissante

Dans certaines situations, la durée de la couverture souhaitée dépasse la maturité des contrats futures disponibles (ou liquides). Dans ce cas, le hedger doit faire « glisser » sa couverture d'une échéance à l'autre. Considérons une entreprise qui doit recevoir, en date T, un certain montant pour une vente d'actifs et qui souhaite se couvrir. Elle peut utiliser n contrats successifs avec des dates d'échéance croissantes (certains de ces contrats n'étant pas encore négociés aujourd'hui) de la manière suivante.

Date t_0 : position courte sur le contrat 1

Date t_1 : dénouer la position sur le contrat 1
position courte sur le contrat 2

$\vdots$

Date t_n : dénouer la position sur le contrat $n-1$
position courte sur le contrat n

Date T : dénouer la position sur le contrat n

Dans cette stratégie, il y a n risques de base. À la date T, l'incertitude se traduit par la différence entre le prix futures du contrat n et le prix spot de l'actif à couvrir. De plus, à chaque date intermédiaire, il y a une incertitude sur la différence entre le prix futures du contrat dénoué et celui du contrat sur lequel est prise la nouvelle position ; il s'agit d'une « base glissante » (*rollover basis*). Bien sûr, le hedger dispose d'une certaine marge de manœuvre concernant les dates auxquelles il passe d'un contrat au contrat suivant et peut chercher à minimiser ce risque de base glissante.

Supposons qu'en avril 2017, une entreprise sache qu'elle va vendre 100 000 barils de pétrole en juin 2018 et décide, pour simplifier, de se couvrir avec un ratio de couverture égal à 1. Le prix spot est de 49 $ le baril. Supposons que la liquidité des contrats futures ne soit pas satisfaisante au-delà d'une maturité de six mois (des contrats sont cependant négociés sur le NYMEX jusqu'à une maturité de six ans). La société prend une position courte sur 100 contrats échéance octobre 2017. En septembre 2017, elle roule sa position en dénouant la précédente et en prenant position sur des contrats mars 2018. Enfin, en février 2018, elle renouvelle l'opération en prenant cette fois position sur des contrats juillet 2018.

Un exemple des résultats possibles est donné au tableau 3.5. Le prix spot passe de 49 $ à 46 $ le baril entre avril 2017 et juin 2018, et en septembre 2017, l'entreprise dénoue sa première position à un prix de 47,40 $, pour prendre la deuxième au prix de 48,20 $, gagnant ainsi 0,80 $ par baril. Le contrat mars 2018 est vendu à 47 $ et dénoué à 46,50 $, gagnant ainsi 0,50 $ par baril. Enfin, la dernière position est prise à un prix futures de 46,30 $ et dénouée à 45,90 $ pour un profit de 0,40 $ par baril. Dans cette situation, la couverture a rapporté 1,70 $ par baril pour une variation du prix spot de 3 $.

Tableau 3.5 : Données de l'exemple sur la couverture glissante sur le pétrole

Date	Avril 2017	Sept. 2017	Février 2018	Juin 2018
Contrat oct. 2017	48,20	47,40		
Contrat mars 2018		47,00	46,50	
Contrat juillet 2018			46,30	45,90
Prix spot	49,00			46,00

La compensation quotidienne des contrats futures peut conduire à des décalages temporels entre les cash-flows associés à la position « physique » et la position en contrats. En cas de couverture glissante avec un horizon éloigné, ces décalages peuvent entraîner de sérieux problèmes, comme le montre l'encadré 3.2. La firme allemande Metallgesellschaft suivit cette stratégie au début des années 1990 pour pouvoir « assurer » des prix de matières premières. Elle dut rapidement faire face à de grosses difficultés car les prix baissant, les contrats futures conduisaient à des appels de marge importants et causaient donc de sérieux problèmes de trésorerie pour l'entreprise. La leçon de cette histoire est que les problèmes de liquidité et de trésorerie doivent toujours être pris en compte lors de la mise en place d'opérations de couverture.

Encadré 3.2 Metallgesellschaft : quand la couverture tourne mal

La stratégie de couverture glissante conduit parfois à des situations de trésorerie délicates. Ce problème fut illustré de manière frappante par l'entreprise allemande Metallgesellschaft (MG) au début des années 1990. MG avait vendu à ses clients une quantité considérable de fuel domestique et de gasoil à prix fixe, par des contrats de 5 à 10 ans, 6 à 8 cts au-dessus du prix de marché. L'entreprise avait couvert ce risque en roulant une position longue sur des contrats futures d'échéances proches. Le prix du pétrole chuta et MG dut faire face à des appels de marge, ce qui aboutit à une situation de trésorerie délicate. Ceux qui avaient décidé cette stratégie arguaient que les cash-flows négatifs dus aux appels de marge seraient en fin de compte compensés sur le long terme par les recettes des ventes. La Direction générale et les banquiers de l'entreprise décidèrent finalement de dénouer la couverture et trouvèrent un accord avec les clients pour abandonner le contrat initial. MG perdit 1,33 milliard de dollars US dans cette affaire.

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons analysé les différentes façons dont une entreprise peut utiliser les contrats futures pour couvrir un risque. Si la position de l'entreprise entraîne un gain en cas de hausse de l'actif et une perte en cas de baisse, une position courte est appropriée. Si la sensibilité est de sens opposé, une position longue sur les contrats devra être adoptée.

La couverture est une méthode de réduction du risque. Elle devrait donc être considérée positivement par les managers. En réalité, certaines raisons théoriques et pratiques font qu'il n'en est pas toujours ainsi. D'un point de vue théorique, on peut dire que les actionnaires, en détenant des portefeuilles diversifiés, peuvent éliminer une grande partie des risques inhérents aux actions qu'ils possèdent. Il n'est donc pas nécessaire que les entreprises se couvrent. Pour l'entreprise, il n'est pas forcément opportun de couvrir une position si ses concurrents ne le font pas. De plus, un trésorier peut craindre de se voir reprocher une couverture de position si l'entreprise a gagné sur l'actif sous-jacent et si ce gain est compensé par une perte sur les contrats.

En matière de couverture, le risque de base est un concept fondamental. La base est la différence entre le prix spot et le prix futures. Le risque de base a pour origine l'incertitude quant à la valeur de la base à la date de clôture de la couverture.

Le ratio de couverture rapporte le volume de la position sur les contrats à celui de la position sur l'actif à couvrir. Il n'est pas toujours optimal d'utiliser un ratio égal à 1. Si le hedger veut minimiser la variance de la valeur de sa position, un ratio différent de 1 peut être un meilleur choix. Le ratio optimal est dans ce cas la pente de la droite de régression des variations du prix spot sur celles du prix futures.

Les contrats futures sur indices sont utilisés pour couvrir le risque systématique d'un portefeuille d'actions. Le nombre de contrats nécessaires est alors le bêta du portefeuille multiplié par le ratio de la valeur de la position sur celle d'un contrat. Les futures sur indices peuvent aussi être utilisés pour modifier le bêta d'un portefeuille sans changer la composition de celui-ci.

Quand il n'existe pas de contrat futures suffisamment liquide, dont la date d'échéance soit postérieure à l'horizon de couverture, une stratégie appelée couverture glissante peut être appropriée. Elle suppose de prendre des positions successives sur des contrats à maturité plus courte. Quand le premier contrat approche de l'échéance, la position est dénouée et une autre du même type est prise sur l'échéance suivante, et ainsi de suite. Cette stratégie donne de bons résultats tant qu'il existe une forte corrélation entre les variations des prix spot et futures.

Références complémentaires

Adam T., S. Dasgupta et S. Titman, "Financial Constraints, Competition, and Hedging in Industry Equilibrium ", *Journal of Finance*, 62 (5), 2007, 2445-73.

Adam T. et C.S. Fernando, "Hedging, Speculation, and Shareholder Value ", *Journal of Financial Economics*, 81 (2), 2006, 283-309.

Allayanis G. et J. Weston, "The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value", *Review of Financial Studies*, 14 (1), printemps 2001, 243-276.

Brown G. W., "Managing Foreign Exchange Risk with Derivatives", *Journal of Financial Economics*, 60, 2001, 401-48.

Campbell J. Y., K. Serfaty de Medeiros et L. M. Viceira, "Global Currency Hedging", *Journal of Finance*, 65 (1), 2010, 87-121.

Campello M., C. Lin, Y. Ma et H. Zou, "The Real and Financial Implications of Corporate Hedging", *Journal of Finance*, 66 (1), 2011, 1615-47.

Cotter J. et J. Hanly, "Hedging : Scaling and the Investor Horizon", *Journal of Risk*, 12 (2), hiver 2009/2010, 49-77.

Culp C. et M. H. Miller, "Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage", *Journal of Applied Corporate Finance*, 7 (4), hiver 1995, 62-76.

Edwards F. R. et M. S. Canter, "The Collapse of Metallgesellschaft : Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck ?", *Journal of Applied Corporate Finance*, 8 (1), printemps 1995, 86-105.

Graham J. R. et C. W. Smith Jr, "Tax Incentives to Hedge", *Journal of Finance*, 54 (6), 1999, 2241-2262.

Haushalter G. D., "Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging : Evidence from Oil and Gas Producers", *Journal of Finance*, 55 (1), 2000, 107-152.

Jin Y. et P. Jorion, "Firm Value and Hedging : Evidence from US Oil and Gas Producers", *Journal of Finance*, 61 (2), 2006, 893-919.

Mello A. S. et J. E. Parsons, "Hedging and Liquidity", *Review of Financial Studies*, 13, printemps 2000, 127-153.

Neuberger A. J., "Hedging Long-Term Exposures with Multiple Short-Term Futures Contracts", *Review of Financial Studies*, 12, 1999, 429-459.

Petersen M. A. et S. R. Thiagarajan, "Risk Management and Hedging : With and Without Derivatives", *Financial Management*, 29 (4), hiver 2000, 5-30.

Rendleman R., “A Reconciliation of Potentially Conflicting Approaches to Hedging with Futures”, *Advances in Futures and Options*, 6, 1993, 81-92.

Stulz R. M., “Optimal Hedging Policies”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, juin 1984, 127-140.

Tufano P., “Who Manages Risk ? An Empirical Examination of Risk Management Practices in the Gold Mining Industry”, *Journal of Finance*, 51 (4), 1996, 1097-1138.

Problèmes et exercices

3.1 Dans quelles circonstances une position de couverture (a) courte, (b) longue, est-elle appropriée ?

3.2 Expliquez l’expression « risque de base » dans la couverture par des contrats futures.

3.3 Expliquez l’expression « couverture parfaite ». Une couverture parfaite conduit-elle toujours à un résultat meilleur qu’une couverture imparfaite ? Justifiez votre réponse.

3.4 Dans quel cas la recherche d’une variance minimale pour la valeur d’une position conduit-elle à ne pas se couvrir ?

3.5 Donnez trois raisons pour lesquelles un trésorier d’entreprise pourrait préférer ne pas couvrir un risque couru par son entreprise.

3.6 Supposons que l’écart-type des variations de prix trimestrielles d’une marchandise soit 0,65 € et que l’écart-type des variations du prix futures d’un contrat sur cette marchandise soit 0,81 €, alors que la corrélation de ces variations est 0,8. Quel est le ratio de couverture optimal pour un contrat à trois mois ? Quelle est la signification de ce ratio ?

3.7 Une entreprise possède un portefeuille de 20 millions d’euros qui a un bêta de 1,2. Elle souhaite couvrir cette position avec des contrats futures sur le CAC 40. L’indice vaut aujourd’hui 3240 et chaque contrat correspond à 10 € fois la valeur de l’indice. Quel type de couverture minimise le risque ? Que devrait faire cette entreprise si elle souhaite diviser par deux le bêta du portefeuille ?

3.8 Un agriculteur souhaite couvrir le risque de prix pour des ventes de maïs qui seront réalisées en (a) juin, (b) juillet, (c) janvier. Sachant que les contrats correspondants du CME Group ont pour mois d’échéance mars, mai, juillet, septembre, décembre, quel devrait être le choix de l’agriculteur pour chacun des cas (a), (b) et (c) ?

3.9 Une couverture parfaite assure-t-elle de pouvoir échanger à une date future au prix spot d’aujourd’hui ? Justifiez votre réponse.

3.10 Expliquez pourquoi une position de couverture courte s’améliore quand la base se renforce de manière inattendue et se détériore quand la base s’affaiblit.

3.11 Supposez que vous soyez le trésorier d’une entreprise française exportatrice de matériel électronique vers les États-Unis. Expliquez votre stratégie de couverture et les arguments que vous utiliseriez pour convaincre vos supérieurs hiérarchiques.

3.12 Dans l’exemple 3.2 de la section 3.3, en quoi la couverture et les résultats de celle-ci sont-ils modifiés si le ratio de couverture utilisé est de 0,8 ?

3.13 « Si le ratio de couverture de variance minimum est égal à 1, la couverture doit être parfaite. » Cette affirmation est-elle correcte ? Justifiez votre réponse.

3.14 « Si le risque de base est nul alors le ratio de couverture qui minimise la variance est égal à 1. » Cette affirmation est-elle correcte ? Justifiez votre réponse.

3.15 « Quand pour un actif les prix futures sont en général plus bas que les prix spot, les positions de couverture longues sont très attractives. » Expliquez cette affirmation et illustrez par un exemple.

3.16 L'écart-type des variations de prix mensuelles du bétail vivant (en cts par livre) est 1,2. L'écart-type des variations mensuelles du prix futures du contrat à échéance la plus courte (en cts par livre) est 1,4. La corrélation entre les variations de ces deux prix est de 0,7. Nous sommes le 15 octobre et un producteur de viande doit acheter 200 000 livres de bétail vivant le 15 novembre. Il souhaite couvrir sa position avec le contrat futures échéance décembre, chaque contrat portant sur 40 000 livres de bétail. Quelle stratégie doit-il suivre ?

3.17 Un producteur de maïs affirme : « Je n'utilise pas les contrats futures pour me couvrir. Mon vrai risque n'est pas le prix de vente du maïs mais celui de perdre ma récolte du fait d'un aléa climatique. » Que pensez-vous de ce point de vue ? Le fermier devrait-il chercher à estimer son volume de production espéré et chercher une couverture pour fixer le prix de vente de cette production espérée ?

3.18 Le 1er juillet, un investisseur détient 50 000 actions d'une entreprise du CAC 40. L'action cote 30 €. Il décide de couvrir pour un mois les variations de prix dues au mouvement du marché par l'intermédiaire du contrat futures sur le CAC 40 d'échéance septembre. L'indice est à 4 500 et un contrat représente 10 € fois l'indice. Le bêta de l'action est de 1,3. Quelle est la stratégie à suivre ?

3.19 Que se passe-t-il dans le tableau 3.5 si le ratio de couverture retenu est 1,5 ? Comment cette décision affecte-t-elle la couverture et ses résultats ?

3.20 En quoi la compensation quotidienne d'un contrat futures peut-elle entraîner des problèmes de trésorerie si le contrat est utilisé pour une position de couverture ?

3.21 Un manager de compagnie aérienne affirme : « Il n'y a aucun intérêt pour nous à utiliser les futures sur le pétrole. Il y a autant de chances que le prix spot du pétrole soit au-dessus du prix futures que de chances qu'il soit en dessous. » Que pensez-vous de ce point de vue ?

3.22 Supposez que l'emprunt d'or coûte 1,5 % par an et que le taux sans risque à un an soit de 5 %. Ces deux taux sont en composition annuelle. À partir de la discussion de l'encadré 3.1, calculez le prix forward maximum (à un an) que Goldman Sachs devrait coter pour que le prix spot soit de 1 200 $.

3.23 La rentabilité espérée de l'indice S&P500 est de 12 % et le taux sans risque est de 5 %. Quelle est la rentabilité espérée d'un portefeuille dont le bêta est (a) 0,2, (b) 0,5, (c) 1,4.

Questions complémentaires

3.24 Nous sommes en juin et une entreprise sait qu'elle devra vendre 5 000 barils de Brent en septembre. Elle utilise le contrat du CME portant sur 1 000 barils de WTI (échéance octobre) pour se couvrir. Quelle position devrait-elle prendre ? À quels risques de prix résiduels fait-elle face après avoir pris cette position ?

3.25 Soixante contrats futures sont utilisés pour couvrir une exposition au risque de variation de prix de l'argent (métal). Chaque contrat porte sur 5 000 onces de métal. Au moment du dénouement de la position, la base est de 0,20 $ l'once. Quel est l'effet de cette base sur la position de l'opérateur si (a) la couverture est réalisée pour un achat ou (b) la couverture est réalisée pour une vente ?

3.26 Un trader détient 55 000 unités et décide de couvrir sa position avec des contrats futures dont le sous-jacent est un autre actif. Chaque contrat futures porte sur 5 000 unités. Le prix spot de l'actif détenu est de 28 $ et l'écart-type des variations de ce prix est de 0,43 $. Le prix futures du contrat est de 27 $ et l'écart-type des variations de ce prix futures jusqu'à l'horizon de la couverture est de 0,40 $. Le coefficient de corrélation entre ces deux variations de prix est de 0,95.

a. Quel est le ratio de couverture qui minimise la variance ?

b. Le trader doit-il prendre une position courte ou longue ?

c. Quel est le nombre optimal de contrats futures si on ne tient pas compte de la compensation quotidienne ?

d. Quel est ce nombre si on tient compte de la compensation quotidienne ?

3.27 Une entreprise veut couvrir son exposition au risque de variation de prix d'un nouveau carburant. La corrélation entre les variations de prix de ce carburant et celles des prix futures du fuel domestique est de 0,6. La compagnie perd un million de dollars US quand le prix du carburant augmente d'un cent par gallon sur les trois mois qui viennent. L'écart-type des variations de prix de ce nouveau carburant est de 50 % supérieur à celui des variations du prix du pétrole. Quel ratio de couverture faut-il retenir si les contrats sur pétrole sont utilisés pour couvrir la position ? Quelle est l'exposition au risque (mesurée en gallons de nouveau carburant) de l'entreprise ? Quelle position l'entreprise devrait-elle prendre (mesurée en gallons) sur les contrats futures sur fuel domestique ? Combien de contrats faut-il traiter (chaque contrat porte sur 42 000 gallons) ?

3.28 Un gérant de portefeuille a géré activement ses fonds de sorte à maintenir à 0,2 le bêta de son portefeuille tout au long de l'année dernière. Le taux sans risque était de 5 % et le marché a perdu 30 % pendant cette très mauvaise année. Le gérant est finalement très satisfait car il n'a perdu que 10 %. Est-ce justifié ?

3.29 Le tableau suivant fournit des données sur les variations de prix mensuelles des prix spot et futures d'une certaine marchandise. Utilisez ces données pour calculer le ratio de couverture de variance minimum.

Variation du prix spot	+0,50	+0,61	−0,22	−0,35	+0,79
Variation du prix futures	+0,56	+0,63	−0,12	−0,44	+0,60
Variation du prix spot	+0,04	+0,15	+0,70	−0,51	−0,41
Variation du prix futures	−0,06	+0,01	+0,80	−0,56	−0,46

3.30 Le 16 juillet, une institution financière détient un portefeuille de 100 millions d'euros dont le bêta est 1,2. L'institution veut couvrir ce portefeuille à l'aide du contrat futures CAC 40, échéance décembre, de façon à ramener le bêta du portefeuille à 0,5. L'indice vaut 4 000 et le contrat porte sur 10 € fois l'indice.

a. Quelle position devrait prendre cette institution ?

b. Si la société change d'avis et souhaite porter le bêta de 1,2 à 1,5, quelle position devrait-elle prendre sur les contrats futures ?

3.31 Un gérant de fonds a un portefeuille de 50 millions d'euros avec un bêta de 0,87. Il est inquiet quant à la performance du marché dans les deux mois à venir et pense utiliser, pour se couvrir, un contrat sur le CAC 40 à 3 mois. L'indice est actuellement à 4 750 et un contrat porte sur 10 € fois l'indice ; le taux sans risque est de 6 % par an et le rendement en dividende de l'indice est de 3 %. Le prix futures pour le contrat à 3 mois est de 4 677.

a. Quelle position devrait prendre le gérant pour éliminer son exposition au risque dans les deux mois à venir ?

b. Calculez l'effet de la stratégie de couverture sur la valeur de la position si l'indice après deux mois vaut 4 000, 4 300, 4 600, 4 900 et 5 200.

3.32 En octobre 2017, une entreprise prévoit de produire un million de livres de cuivre dans chacun des mois de février 2018, août 2018, février 2019 et août 2019. Elle décide de se couvrir sur le COMEX, département du CME Group. Un contrat correspond à la livraison de 25 000 livres de cuivre. Le deposit est de 2 000 $ par contrat, et la marge à maintenir ensuite est de 1 500 $ par contrat. La société souhaite couvrir 80 % de son exposition au risque. Les contrats futures suffisamment liquides ont une maturité qui ne va pas au-delà de 13 mois. Construisez une stratégie de couverture pour cette entreprise (négligez l'ajustement lié à la compensation quotidienne). Quel est l'impact de cette stratégie sur le prix effectif d'achat du cuivre pour l'entreprise ? Quelle est la marge initiale requise en octobre 2017 ? L'entreprise fait-elle ensuite l'objet d'appels de marge ? Vous supposerez que les prix spot et futures évoluent comme dans le tableau suivant.

Date	Oct. 2017	Fév. 2018	Août 2018	Fév. 2019	Août 2019
Prix spot	372,00	369,00	365,00	377,00	388,00
Prix futures mars 2018	372,30	369,10			
Prix futures sept. 2018	372,80	370,20	364,80		
Prix futures mars 2019		370,70	364,30	376,70	
Prix futures sept. 2019			364,20	376,50	388,20

Quel est l'impact de la stratégie que vous proposez sur le prix effectivement payé par l'entreprise pour le cuivre ? Quel est le deposit en octobre 2017 ? L'entreprise fera-t-elle l'objet d'appels de marge ?

Annexe

Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF ou CAPM)

Le MEDAF[7] est un modèle qui peut être utilisé pour évaluer la rentabilité espérée d'un actif en fonction de son risque. Le risque d'un actif est scindé en deux parts : le risque systématique, qui est lié au marché dans son ensemble et ne peut être diversifié. Le risque non systématique, qui est spécifique au titre et peut être éliminé par la possession d'un portefeuille largement diversifié. Le résultat essentiel du CAPM stipule que le rendement espéré d'un titre ne dépend que du risque systématique.

La formule du CAPM s'écrit :

$$E(R_i) = R_F + \beta\,(E(R_M) - R_F) \tag{3A.1}$$

où R_F est le taux sans risque, $E(R_i)$ est la rentabilité espérée de l'actif i, $E(R_M)$ la rentabilité espérée du portefeuille de marché contenant tous les actifs et β est un paramètre de mesure du risque systématique.

R_M est habituellement approximé par la rentabilité d'un indice, par exemple le S&P500. Le β peut être estimé à partir de données historiques en régressant $R_i - R_F$ sur $R_M - R_F$.

Lorsque $\beta = 0$, la rentabilité de l'actif n'est pas corrélée à celle du marché. Dans ce cas, l'actif ne porte pas de risque systématique et devrait donc être rémunéré au taux sans risque par l'équation (3A.1). Si le β est égal à 0,5, l'excès de rentabilité de l'actif par rapport au taux sans risque est deux fois inférieur à celui du portefeuille de marché, etc.

Supposons que le taux sans risque soit de 5 % et la rentabilité espérée du marché de 13 %. L'équation (3A.1) montre que si le β est égal à 1.5, la rentabilité espérée de l'actif est de $5 + 1{,}5 \times (13 - 5) = 17$ %.

La démonstration de la relation du CAPM s'appuie sur de nombreuses hypothèses, notamment les suivantes.

1. Les investisseurs font leurs choix de portefeuille en ne considérant que l'espérance et la variance des rentabilités.
2. Deux rentabilités ne peuvent être corrélées qu'au travers de leur lien avec la rentabilité du marché.
3. L'horizon des investisseurs est d'une seule période, identique pour tous (quelle que soit la durée de cette période).
4. Les taux de placement et d'emprunt sans risque sont identiques.
5. La fiscalité ne joue aucun rôle dans les décisions.
6. Les anticipations des investisseurs sur les espérances, variances, covariances des rentabilités sont homogènes.

7. Modèle connu sous l'acronyme MEDAF, ou CAPM en anglais pour *Capital Asset Pricing Model.*

Ces hypothèses ne sont pas vérifiées sur les marchés réels ou sont des approximations grossières. Néanmoins, ce modèle est encore utilisé couramment, notamment pour l'évaluation des performances des gérants de fonds. Quand on considère un titre individuel, la relation (3A.1) ne permet que des prédictions assez pauvres. La situation s'améliore lorsqu'on considère un portefeuille diversifié. Par conséquent, la relation du CAPM pourra être utilisée pour la couverture d'un portefeuille par des contrats sur indice, comme nous l'avons vu dans la section 3.5. Dans ce cas, le β utilisé est celui du portefeuille, calculé comme une moyenne pondérée des β des titres composant le portefeuille.

Chapitre 4

Les marchés de taux d'intérêt

Les taux d'intérêt interviennent dans l'évaluation de presque tous les actifs financiers, et donc aussi dans celle des actifs dérivés, qui occupe une grande part de ce livre. Ce chapitre présente les éléments essentiels concernant la mesure et l'analyse des taux d'intérêt. Nous expliquons le concept de fréquence de composition des intérêts, et plus particulièrement la notion de taux continu, qui sera abondamment utilisée dans les chapitres suivants. Nous présentons les taux actuariels, les taux zéro-coupon, ainsi que la notion de structure par termes des taux, qui permet de comprendre ce qu'est un taux forward. La méthode *bootstrap*, couramment utilisée dans les salles de marché pour calculer les taux zéro-coupon sans risque, est brièvement présentée.

Nous expliquons l'évaluation des obligations, celle des accords de taux futurs, connus sous le sigle FRA (*Forward Rate Agreement*), ainsi que les différentes théories de la structure par termes des taux. Enfin, nous détaillons l'utilisation de la duration et de la convexité, qui permettent de mesurer la sensibilité des prix d'obligations aux variations des taux d'intérêt.

Par souci de clarté, nous négligerons les conventions en matière de décompte des jours dans ce chapitre. Ces questions sont abordées aux chapitres 6 et 7, dans lesquels nous décrirons de manière détaillée les contrats futures sur obligations d'État et sur taux courts. Nous y montrerons aussi comment la duration et la convexité peuvent être utilisées pour couvrir un portefeuille obligataire des variations de taux d'intérêt.

4.1 Les différents types de taux

Un taux d'intérêt, dans une situation donnée, définit le montant qu'un emprunteur promet de payer à un prêteur. Dans chaque pays et chaque devise, il existe de multiples taux d'intérêt qui dépendent, entre autres, du risque de crédit de l'emprunteur, c'est-à-dire du risque que l'emprunteur ne puisse faire face à ses engagements. Cela inclut les taux sur les emprunts immobiliers, les taux sur les dépôts, etc. Plus le risque de l'emprunteur est important, plus le taux de prêt sera élevé. Les taux d'intérêt sont exprimés le plus souvent en points de base (bp). Un point de base est égal à 0,01 % par an.

Les taux d'État

Ce sont les taux applicables aux emprunts que font les gouvernements dans leur propre devise. Les taux d'État US sont les taux auxquels le gouvernement américain emprunte en dollars US. Les taux d'État français sont les taux auxquels peut emprunter en euros l'État français.

On suppose généralement que ces taux ne présentent pas de risque de défaut, en faisant l'hypothèse qu'un État peut toujours rembourser un emprunt dans sa propre devise en « faisant tourner la planche à billets ». Ils sont donc souvent appelés taux sans risque [1].

Les taux LIBOR

LIBOR signifie *London InterBank Offer Rate*. C'est un taux d'intérêt de référence diffusé quotidiennement. Les grandes banques internationales négocient en permanence entre elles des prêts et des emprunts dans toutes les grandes devises, pour des durées allant jusqu'à un an ; ils étaient, jusqu'à récemment, calculés chaque jour pour dix devises et quinze maturités. Ce marché, essentiellement interbancaire, est appelé marché des eurodevises, et les taux LIBOR y sont déterminés par le jeu de l'offre et de la demande. Ils évoluent donc en fonction des conditions économiques et servent de référence pour des centaines de milliards de dollars/euros de transactions journalières. Par exemple, un des actifs dérivés les plus échangés est le swap de taux d'intérêt ; il utilise en général le taux LIBOR comme référence de taux variable (les swaps de taux sont introduits à la section 4.2 et développés dans le chapitre 7). Le taux LIBOR est fixé quotidiennement à l'aide des données transmises par dix-huit grandes banques (généralement notées AA) pour chaque devise et chaque maturité. Les quatre cotations les plus élevées sont éliminées ainsi que les quatre les plus faibles ; le LIBOR est la moyenne des cotations restantes.

Certains traders travaillant pour les banques ont été poursuivis pour manipulation des taux LIBOR. Pourquoi une telle manipulation est-elle tentante ? Supposons que le payoff pour une banque d'un actif dérivé dépende du niveau du LIBOR à une date donnée (c'est le cas par exemple pour certains swaps de taux que nous verrons au chapitre 7). Si ce payoff augmente avec le niveau du LIBOR, il est tentant pour le trader de fournir une cotation élevée ce jour-là, mais aussi d'essayer de persuader d'autres banques de faire de même. Tom Hayes est le premier trader à avoir été reconnu coupable de manipulation LIBOR. En août 2015, il a été condamné à une peine de 14 ans de prison (réduite ensuite à 11 ans) par un tribunal britannique. Un des problèmes du système de détermination des taux LIBOR était l'insuffisance du volume de prêts interbancaires utilisé pour fixer le taux LIBOR, et il y avait donc une certaine « marge de manœuvre ». Afin d'améliorer les choses, le nombre de devises différentes est passé de 10 à 5, et le nombre de périodes d'emprunt est passé de 15 à 7. Enfin, la surveillance réglementaire de la façon dont les estimations sont produites a été renforcée.

1. On peut noter que la notion de taux sans risque pour les pays de la zone euro est plus discutable puisque ces pays n'ont plus la maîtrise de la frappe de leur monnaie.

Il est maintenant admis que le LIBOR n'est pas le taux de référence idéal pour les transactions sur actifs dérivés puisque ce taux n'est pas vraiment déterminé par le marché. On peut donc penser que d'autres références seront adoptées dans le futur.

Les taux *overnight*

Aux États-Unis, les grandes institutions doivent maintenir des réserves auprès de la Federal Reserve. Le montant dépend des actifs et des passifs de l'établissement concerné. Chaque soir, les banques ont soit des surplus, soit des déficits dans leurs comptes auprès de la Federal Reserve. Il s'instaure de ce fait un marché de prêt-emprunt au jour le jour (nommé *overnight*). Le taux sur ce marché est appelé taux des fonds fédéraux(*federal funds rate*). Des intermédiaires organisent les transactions interbancaires et la moyenne des taux qu'ils proposent est appelée taux effectif des fonds fédéraux. Ce taux au jour le jour est piloté par la Federal Reserve, dans le sens où elle peut, par ses propres transactions, intervenir sur ce marché pour augmenter ou diminuer le taux. Au Royaume-Uni, le taux équivalent s'appelle le SONIA (Sterling Overnight Index Average), et dans la zone euro, il s'agit de l'EONIA (Euro Overnight Index Average).

Le taux de Repo

Contrairement aux taux LIBOR, les taux de Repo correspondent à des opérations très peu risquées. Quand une institution finance certaines activités par le Repo (*Repurchase Agreement*), elle conclut un contrat spécifiant la vente de certains titres avec une promesse de rachat à une date future et à un prix plus élevé. La banque X, vendeuse des titres, les livre à une banque Y, qui paie le prix de ces titres, apportant ainsi du cash à la première. En quelque sorte, il s'agit d'un prêt de fonds par Y à X. La différence entre le prix de rachat des titres et le prix de vente initial rémunère les fonds prêtés. Le taux d'intérêt correspondant est appelé taux de Repo. Si le détenteur initial des titres n'honore pas son engagement de rachat, la banque Y garde les titres. Si la banque n'est pas en mesure de « rendre » les titres au terme du contrat, la banque X garde les fonds. Le type de Repo le plus courant est l'*overnight*, pour lequel le taux est renégocié chaque jour. Il existe cependant des arrangements avec des maturités plus longues. On parle alors de Repo à terme. Comme une opération de ce type comporte très peu de risque, le taux de Repo est en général un peu inférieur au taux des fed funds ou de l'EONIA.

4.2 Les taux de swap

Les swaps sont discutés au chapitre 7, mais il est utile d'en donner une brève introduction dès à présent. Le swap le plus courant est un accord dans lequel un taux d'intérêt LIBOR est échangé contre un taux d'intérêt fixe pour une durée future fixée. Par exemple, deux parties conviennent d'échanger le taux LIBOR 3 mois (le taux étant réinitialisé tous les 3 mois) sur un capital de 100 millions de dollars contre un taux d'intérêt fixe de 3 % par an appliqué au même capital pendant cinq ans. Une des contreparties paie le LIBOR et reçoit le taux fixe de 3 % ; l'autre reçoit le LIBOR et paie un taux fixe de 3 %. Un swap est conçu pour avoir une valeur initiale nulle, et le taux fixe (3 % dans notre exemple) est appelé taux de swap.

Une banque peut gagner ce taux de swap à cinq ans de la manière suivante :

1. Faire une série de 20 prêts à trois mois au taux LIBOR pour 100 millions de dollars (aux dates 0, 3 mois, 6 mois, ..., 57 mois) à des banques notées AA. La banque prêteuse s'assure que les banques emprunteuses sont toujours notées AA au début de chaque trimestre de prêt ;
2. Entrer dans un swap où le taux d'intérêt LIBOR à trois mois est payé et un taux d'intérêt fixe (3 % par an dans notre exemple) est reçu.

Il serait plus risqué pour une banque de prêter de l'argent à une seule autre banque notée AA pendant cinq ans. Une banque considérée comme solvable est peu susceptible de faire défaut en trois mois. En revanche, à l'horizon de cinq ans, sa qualité de crédit peut décroître fortement. Par conséquent, il est préférable pour le prêteur de faire face vingt fois à un risque de crédit à trois mois, plutôt que de s'exposer à un risque de crédit à l'horizon de cinq ans. En d'autres termes, la probabilité qu'une banque notée AA fasse défaut dans les cinq ans qui viennent est plus de vingt fois plus élevée que la probabilité qu'elle fasse défaut dans les trois mois à venir. Le taux d'intérêt obtenu sur des prêts renouvelés tous les trois mois est assimilé à un taux renouvelé en continu. Dans l'exemple donné plus haut, le taux de swap à 5 ans est continuellement « rafraîchi » sur la base du taux LIBOR 3 mois.

Les *overnight indexed swaps* (OIS)

Un swap overnight indexé (OIS) est un swap où un taux fixe convenu pour une période donnée (un ou trois mois, par exemple) est échangé contre la moyenne géométrique du taux overnight pendant la période (voir section 4.1). Le taux effectif des fonds fédéraux aux États-Unis ou le taux EONIA peuvent être utilisés comme taux overnight. Si, pendant une période donnée, une banque emprunte (prête) des fonds au taux EONIA renouvelé chaque jour, le taux d'intérêt payé (reçu) pour la période est la moyenne géométrique des taux EONIA. Un OIS permet donc d'échanger un emprunt ou un prêt au jour le jour sur une période donnée contre un taux fixe convenu sur la même période. Ce taux fixe est appelé taux OIS. S'il est finalement supérieur (inférieur) à la moyenne géométrique des taux overnight sur la période, il y a un paiement du payeur de taux fixe (variable) au payeur de taux variable (fixe) à la fin de la période.

Supposons qu'un OIS soit réalisé sur une période de trois mois, avec un nominal de 100 millions de dollars et un taux fixe du swap égal à 3 %. Si la moyenne géométrique des taux au jour le jour est de 2,8 %, le payeur du taux fixe paie $0{,}25\times(0{,}030-0{,}028)\times 100\,000\,000$, c'est-à-dire 50 000 $ (les conventions de décompte des jours sont négligées dans cet exemple).

Les OIS ont une durée de vie courte (trois mois ou moins). Cependant, des transactions de 5 à 10 ans sont devenues plus fréquentes. En général, un OIS à plus d'un an est divisé en sous-périodes de trois mois. À la fin de chaque sous-période, la moyenne géométrique des taux au jour le jour est échangée contre le taux OIS (comme dans l'exemple 9.1). À la section 7.5, nous expliquerons que le taux de swap d'un swap LIBOR contre taux fixe est une actualisation en continu du taux LIBOR. De la même manière, le taux OIS est une actualisation continue du taux au jour le jour.

Supposons qu'une banque A s'engage dans les opérations suivantes :

1. Emprunt de 100 millions sur le marché au jour le jour, en roulant la position de jour en jour ;
2. Prêt de 100 millions pour 3 mois au taux LIBOR à une banque B ;
3. Utilisation d'un OIS pour échanger les emprunts au jour le jour contre un emprunt au taux OIS.

Ces opérations conduisent à ce que la banque A reçoive le LIBOR (en supposant que sa qualité de crédit reste suffisante pour le marché au jour le jour) et paie le taux OIS. On peut donc s'attendre à ce que les deux taux soient égaux. Ce n'est pas le cas : le taux OIS est en général inférieur. Cet écart s'explique par la prime de risque requise par A pour le prêt de trois mois à B.

Le taux OIS est en fait un taux au jour le jour continuellement réactualisé : c'est le taux qui peut être obtenu par une institution financière lorsqu'une série de prêts au jour le jour à d'autres institutions financières est combinée à un swap. Comme précédemment, le risque de crédit associé à un taux OIS à trois mois est inférieur au risque de crédit associé à un prêt unique à trois mois.

4.3 Le taux sans risque

Le « taux sans risque » est très largement utilisé dans les modèles d'évaluation des actifs dérivés. On pourrait penser qu'il s'agit du taux déduit des bons du Trésor ou des obligations d'État. En fait, ce n'est pas le cas, car ces taux d'État peuvent être artificiellement bas dans de nombreux pays. En conséquence, dans ce livre, l'expression « taux sans risque » pourra faire référence à des taux différents, car les praticiens n'utilisent pas toujours le même taux comme substitut du taux sans risque. Avant 2007, il s'agissait le plus souvent du taux LIBOR. Depuis la crise, le taux OIS est souvent utilisé comme référence de taux sans risque.

La différence entre le LIBOR 3 mois et le taux OIS 3 mois est appelée spread LIBOR-OIS. Ce spread est souvent considéré comme une mesure de stress du marché. Lors de périodes normales, le spread tourne autour de 0,15 %, c'est-à-dire 15 points de base (bp), mais on constate une forte hausse sur la période 2007-2009, car les banques étaient très réticentes à se prêter entre elles pour une durée de trois mois. En octobre 2008, ce spread a atteint un plus haut historique de 364 bp. Un an plus tard, il était revenu au niveau normal. Depuis lors, ce spread a augmenté lors des périodes difficiles ; en décembre 2011, il a augmenté de 50 bp suite aux inquiétudes engendrées par la Grèce et plus généralement par les économies européennes.

Le taux OIS est ainsi un bon proxy du taux sans risque. Il n'est cependant pas totalement sans risque. Deux sources de risque résiduel persistent. La première est liée au défaut éventuel d'un emprunteur au jour le jour. La probabilité d'un tel défaut est extrêmement faible, car les institutions fragiles n'ont pas accès à ce marché. La seconde source de risque est un défaut sur l'OIS lui-même, mais l'ajustement sur le taux OIS consécutif à cette probabilité de défaut est très faible.

4.4 La mesure des taux d'intérêt

Avant d'entrer dans les détails de la détermination des prix forward et futures, il est essentiel de préciser comment se calculent les taux d'intérêt. Quand une banque propose un taux de 10 % annuel, cela paraît clair. En fait, la signification de cette proposition dépend de la façon dont sont mesurés les taux.

Si le taux est composé annuellement, un placement de 100 € dans cette banque rapportera :

$$100 \text{ €} \times 1{,}1 = 110 \text{ €}$$

à la fin de l'année.

Si la composition des intérêts est semestrielle, la même proposition signifie que le placement rapporte 5 % pour six mois ; dans ce cas, on obtient :

$$100 \text{ €} \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 110{,}25 \text{ €}$$

à la fin de l'année.

Le tableau 4.1 montre l'effet de la variation de la périodicité de composition des intérêts sur la valeur finale du placement. La fréquence de composition des intérêts définit l'unité de mesure du taux d'intérêt. Il existe donc, comme on le voit dans le tableau 4.1, des correspondances selon la fréquence de composition. 10 % en composition semestrielle correspond à 10,25 % en composition annuelle.

Tableau 4.1 : Effet de la fréquence de composition des intérêts sur la valeur de 100 € à la fin d'une année avec un taux de 10 %

Fréquence de composition	Valeur de 100 € à la fin de l'année
Annuelle ($m = 1$)	110,00
Semestrielle ($m = 2$)	110,25
Trimestrielle ($m = 4$)	110,38
Mensuelle ($m = 12$)	110,47
Hebdomadaire ($m = 52$)	110,51
Journalière ($m = 365$)	110,52

Pour généraliser ces constatations, considérons un montant A investi pendant n années à un taux annuel R. Si la composition est annuelle, on obtient :

$$A\,(1+R)^n$$

à la fin des n années. Si la composition des intérêts a lieu m fois par an, le résultat final est :

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \tag{4.1}$$

La composition continue des intérêts

La limite du résultat précédent quand m tend vers l'infini s'appelle composition continue des intérêts [2]. Cette limite est égale à :

$$A\,\mathrm{e}^{Rn} \tag{4.2}$$

où e est la base du logarithme népérien ($\mathrm{e} \approx 2{,}71828$). La plupart des calculettes fournissent directement la fonction e^x (exponentielle de x) ; calculer (4.2) ne pose donc pas de difficultés. Avec les données du tableau 4.1, A = 100, n = l, R = 0,1, on aboutit à :

$$100 \times \mathrm{e}^{0,1} = 110{,}52\ €$$

Les deux premières décimales sont identiques à celles qui sont obtenues par composition journalière des intérêts. Pour les problèmes pratiques, une composition continue peut être vue comme une composition journalière.

Composer (on dit aussi capitaliser) en continu une somme quelconque pendant n années au taux R consiste à multiplier cette somme par e^{Rn}. Actualiser sur n années au même taux R en continu revient à multiplier par e^{-Rn}.

Dans ce livre, sauf précision contraire, capitalisation et actualisation s'entendent en continu. Les lecteurs habitués à d'autres fréquences de composition (annuelles, semestrielles…) seront peut-être surpris au premier abord. Cependant, cette pratique étant très largement majoritaire dans l'évaluation des actifs dérivés, nous l'adoptons dès maintenant.

Notons R_c un taux continu et R_m le taux équivalent pour une composition m fois par an. Des équations (4.1) et (4.2), on déduit :

$$A\,\mathrm{e}^{R_c n} = A\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

ou encore :

$$R_c = m \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right) \tag{4.3}$$

et donc :

$$R_m = m\left(\mathrm{e}^{R_c/m} - 1\right) \tag{4.4}$$

Ces relations sont utilisées pour convertir un taux composé m fois par an en un taux continu et *vice versa*. La fonction ln(.) est le logarithme népérien, disponible dans la plupart des calculettes. C'est la fonction inverse de l'exponentielle ; si $y = \ln(x)$, alors $x = \mathrm{e}^y$.

■ **Exemple 4.1** Soit un taux de 10 % composé semestriellement ; le taux continu équivalent, déduit de l'équation (4.3), est égal à :

$$2 \ln\left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right) = 9{,}758\ \%$$

puisque m = 2 et R_m = 10 %.

2. Les actuaires utilisent parfois l'expression « force de l'intérêt » pour évoquer un taux continu.

■ **Exemple 4.2** Une banque propose de prêter à 8 % en taux continu, avec des intérêts dus trimestriellement. De l'équation (4.4), avec $m = 4$ et $R_c = 0{,}08$, on déduit :

$$R_m = 4\,(\mathrm{e}^{0{,}08/4} - 1) = 8{,}08\ \%$$

Par conséquent, quelqu'un qui emprunte 1 000 € paie 20,20 € d'intérêts chaque trimestre.

4.5 Les taux zéro-coupon

Le taux zéro-coupon (taux ZC ou taux spot) à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années, sans flux intermédiaires. Par exemple, si le taux d'État zéro-coupon à 5 ans, en composition continue, est de 5 %, cela signifie qu'un investissement de 100 € dans ce taux sans risque rapporte, au terme des 5 ans :

$$100 \times \mathrm{e}^{0{,}05\times 5} = 128{,}40\ €$$

La plupart des taux observables sur le marché ne sont pas des taux zéro-coupon. Par exemple, le prix d'une obligation à 2 ans qui paie un taux de coupon de 5 % ne définit pas le taux ZC à 2 ans, parce qu'une partie de la rentabilité de cette obligation vient des coupons payés chaque année ou chaque semestre. Un peu plus loin dans ce chapitre, nous verrons comment déterminer les taux ZC à partir des prix d'obligations à coupon.

4.6 L'évaluation des obligations

La plupart des obligations paient périodiquement des coupons, chaque année en France, chaque semestre au Royaume-Uni, par exemple. Le détenteur d'une obligation se voit aussi rembourser le principal à l'échéance de l'obligation. Le prix théorique d'une obligation peut alors être calculé en actualisant les flux qu'elle engendre aux taux ZC correspondants.

Supposons que les taux zéro-coupon soient ceux du tableau 4.2. Une obligation d'échéance 4 ans paie un coupon annuel de 3 % sur un principal de 100 €. Pour calculer la valeur actuelle du premier coupon, on actualise celui-ci avec le taux ZC à 1 an, soit 2,5 % ; on actualise de même le second au taux ZC à 2 ans, et ainsi de suite.

Tableau 4.2 : Taux d'État zéro-coupon

Maturité (années)	Taux zéro-coupon (en %)
1	2,5
2	2,9
3	3,2
4	3,4

Le prix théorique de l'obligation est alors :

$$3\,\mathrm{e}^{-y\times 1} + 3\,\mathrm{e}^{-y\times 2} + 3\,\mathrm{e}^{-y\times 3} + 103\,\mathrm{e}^{-y\times 4} = 98{,}39\ €$$

Le taux actuariel d'une obligation

Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui, appliqué à tous les flux, donne le prix de marché de l'obligation. Supposons que l'obligation précédente soit effectivement cotée 98,39 €. Si l'on note y le taux actuariel (continu) de cette obligation, y est solution de l'équation :

$$3 \times \mathrm{e}^{-y\times 1} + 3 \times \mathrm{e}^{-y\times 2} + 3 \times \mathrm{e}^{-y\times 3} + 103 \times \mathrm{e}^{-y\times 4} = 98{,}39$$

Ce genre d'équation est résolu par une méthode itérative et l'on aboutit à y = 3,38 %[3].

Le taux au pair

Le taux au pair pour une maturité donnée est le taux de coupon qui égalise le prix de l'obligation et son nominal. En reprenant l'exemple précédent, quel doit être le coupon annuel c pour que l'obligation à 4 ans ait un prix égal à 100 ? En utilisant les taux ZC du tableau 4.2, il faut résoudre l'équation :

$$c \times \mathrm{e}^{-0{,}025\times 1} + c \times \mathrm{e}^{-0{,}029\times 2} + c \times \mathrm{e}^{-0{,}032\times 3} + (100 + c) \times \mathrm{e}^{-0{,}034\times 4} = 100$$

On obtient alors c = 3,436 ; le taux au pair de l'obligation est donc 3,436 %, en composition annuelle.

De manière plus générale, notons d la valeur actuelle de 1 € reçu à l'échéance de l'obligation, A la valeur actuelle d'une annuité payant 1 € à chaque date de coupon, et m le nombre de coupons payés chaque année, le taux au pair c s'écrit :

$$100 = A\,\frac{c}{m} + 100\,d$$

d'où l'on déduit :

$$c = \frac{m}{A}\,100\,(1 - d)$$

Dans l'exemple précédent m = 1, $d = \mathrm{e}^{-0{,}034\times 4} = 0{,}87284$ et :

$$A = \mathrm{e}^{-0{,}025\times 1} + \mathrm{e}^{-0{,}029\times 2} + \mathrm{e}^{-0{,}032\times 3} + \mathrm{e}^{-0{,}034\times 4} = 3{,}70027$$

En appliquant la formule présentée ci-dessus, on retrouve :

$$c = \frac{1}{3{,}70027}\,100\ (1 - 0{,}87284) = 3{,}436$$

3. La méthode de Newton-Raphson permet de résoudre des équations non linéaires du type $f(y) = 0$. Elle débute en estimant une première possibilité y_0 et en construisant une suite $y_1, \ldots, y_n$ définie par $y_{i+1} = y_i - f(y_i)/f'(y_i)$, où $f'(y_i)$ est la dérivée de f calculée en y_i.

4.7 La détermination des taux zéro-coupon

On détermine les taux zéro-coupon à partir des prix des instruments cotés. Une première approche est la méthode du *bootstrap*. Pour illustrer la nature de cette méthode, considérons les prix d'obligations du tableau 4.3. Les trois premières ne payant pas de coupon, les taux zéro-coupon correspondant à ces maturités sont aisément obtenus. En payant 99,60 € pour la première obligation, on obtient 100 € trois mois plus tard. L'équation (4.2) montre que le taux continu correspondant R est solution de l'équation :

$$100 = 99{,}6 \times \mathrm{e}^{R \times 0{,}25}$$

On en déduit que R =1,603 %. De la même façon, le taux ZC continu de l'obligation à 6 mois est solution de :

$$100 = 99{,}0 \times \mathrm{e}^{R \times 0{,}5}$$

c'est-à-dire $R = 2{,}010$ %. Enfin, le taux continu à 1 an, déduit de la même manière du prix de la troisième obligation, est 2,225 %.

Les deux dernières obligations paient des coupons semestriels. Par conséquent, les flux de l'obligation à 18 mois sont :

6 mois : 2 €;

1 an : 2 €;

1,5 an : 102 €.

Tableau 4.3 : Données pour le bootstrap

Principal de l'obligation	Maturité	Coupon annuel*	Prix de l'obligation	Taux actuariel** de l'obligation
100	0,25	0	99,6	1,6606 (T)
100	0,50	0	99,0	2,0202 (S)
100	1,00	0	97,8	2,2495 (A)
100	1,50	4	102,5	2,2949 (S)
100	2,00	5	105,0	2,4238 (A)

* La moitié du coupon annuel est payée chaque semestre.

** La fréquence de composition des intérêts correspond à la fréquence des paiements, T = trimestre, S = semestre, A = année.

Nous avons déjà calculé les taux ZC à 6 mois et 1 an; les deux premiers flux peuvent donc être actualisés à ces taux et le taux à 1,5 an peut alors être déduit du prix de l'obligation. Si l'on note R le taux cherché, il est solution de l'équation :

$$2 \times \mathrm{e}^{-0{,}02010 \times 0{,}5} + 2 \times \mathrm{e}^{-0{,}002225 \times 1} + 102\,\mathrm{e}^{-R \times 1{,}5} = 102{,}5$$

ce qui équivaut à :

$$\mathrm{e}^{-R \times 1{,}5} = 0{,}96631$$

ou encore :

$$R = -\frac{\ln(0{,}96631)}{1{,}5} = 0{,}02284$$

Le taux zéro-coupon à 1,5 an est donc 2,284 %. C'est le seul taux ZC compatible à la fois avec le prix de l'obligation et avec les taux ZC des maturités plus courtes.

En appliquant la même technique à l'obligation à 2 ans et en notant encore R le taux ZC à 2 ans, il faut résoudre :

$$2{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}02010\times 0{,}5} + 2{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}002225\times 1} + 2{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}002284\times 1{,}5} + 102{,}5\,\mathrm{e}^{-R\times 12} = 105$$

ce qui donne $R = 2{,}416$ %.

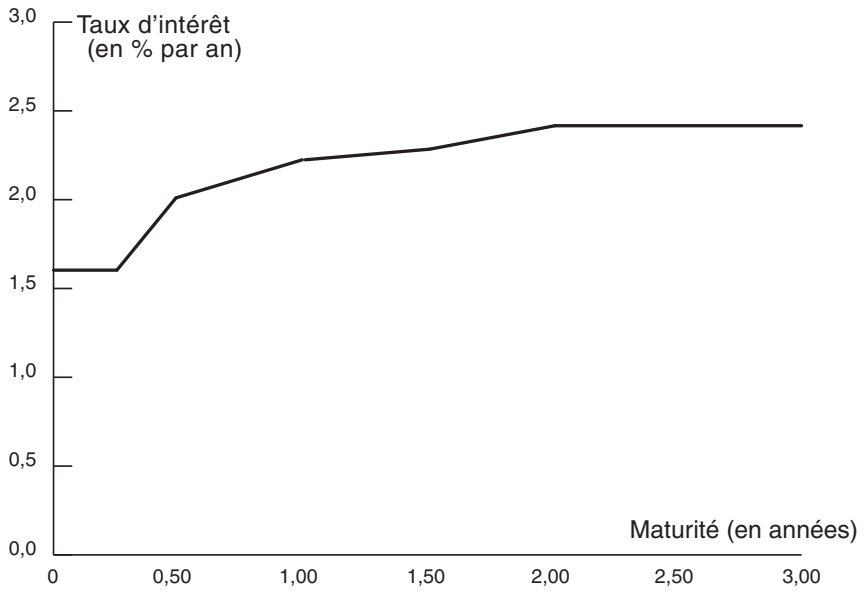
Les taux obtenus sont résumés dans le tableau 4.4. On appelle courbe des taux zéro-coupon la fonction qui, à la maturité, associe le taux zéro-coupon correspondant. Quand on utilise une méthode de bootstrap, il est courant de faire une interpolation linéaire pour déterminer les taux zéro-coupon aux maturités ne correspondant pas aux dates de tombées de flux. En effet, les obligations disponibles sur le marché n'ont jamais une maturité exactement égale à 1,5 an, 2 ans, 2,5 ans, etc. Les analystes ont alors recours à une technique d'interpolation pour calculer la courbe des taux. Par exemple, le taux à 1,25 an sera approximé par $0{,}5 \times 2{,}225 + 0{,}5 \times 2{,}284 = 2{,}255$ %. De même, on suppose que la courbe est horizontale en deçà de la première date de tombée de flux (3 mois dans l'exemple) et au-delà de la dernière (2 ans dans l'exemple). En pratique, on utilisera bien sûr des obligations de maturité plus longue que deux ans pour déterminer l'ensemble de la courbe. Le graphique 4.1 représente la courbe obtenue pour les données du tableau 4.4.

Tableau 4.4 : Taux zéro-coupon (continus) à partir des données du tableau 4.3

Maturité (en années)	Taux zéro-coupon (en %)
0,25	1,603
0,50	2,010
1,00	2,225
1,50	2,284
2,00	2,416

Il existe une approche plus générale qui sera adoptée dans la sous-section suivante concernant les taux OIS. Notons t_1, t_2,..., t_n les maturités des instruments financiers dont on souhaite retrouver les prix grâce à la courbe des taux calculée. On suppose alors que la courbe des taux est linéaire entre deux de ces dates successives et on utilise une méthode itérative pour ajuster au mieux les prix des instruments considérés. Dans cette procédure d'approximations successives, c'est une interpolation linéaire qui est retenue pour déterminer le taux d'actualisation aux dates de paiement de coupons.

Une approche plus sophistiquée consiste à passer par une interpolation polynomiale au lieu de linéaire. l'intérêt de cette démarche est de rendre la courbe des taux dérivable aux dates t_1, t_2,..., t_{n-1}. Les fonctions polynomiales par morceaux vérifiant ces conditions sont appelées *fonctions splines.*



Graphique 4.1 : Les taux zéro-coupon obtenus par la méthode du bootstrap

Les taux OIS

Une approche similaire à la méthode du bootstrap utilisée précédemment s'applique aussi aux taux OIS. Comme nous l'avons mentionné à la section 4.3, les taux OIS sont des taux sans risque utilisés dans l'évaluation des actifs dérivés. Un *overnight indexed swap* (OIS) suppose l'échange d'un taux fixe contre un taux variable. Ce taux variable est calculé en supposant un investissement (à très faible risque) pour la journée avec réinvestissement quotidien des intérêts.

Un OIS d'une maturité de 12 mois ou moins suppose en fait que l'échange taux fixe contre taux variable n'aura lieu qu'une seule fois. Par conséquent, le taux fixe de l'OIS sera un taux zéro-coupon. Il peut ainsi être considéré comme un des taux du tableau 4.4 selon la maturité retenue. Si la maturité est supérieure à 12 mois, les échanges de flux sont réalisés tous les 3 mois. Dans ce cas, le taux OIS est considéré comme un taux actuariel au pair.

Supposons que les taux fixes OIS sont ceux du tableau 4.5. Il y a un seul échange à la maturité pour les quatre premiers swaps, et des échanges trimestriels pour les swaps à 2 ans et 5 ans. La fréquence de composition des taux reflète la fréquence des paiements, ce qu'indique la troisième colonne du tableau. La dernière colonne montre les taux équivalents en composition continue. Pour déterminer les autres taux, on procède de la manière suivante : une obligation à deux ans de principal 100 $ et de taux de coupon 3 % (0,75 $ chaque trimestre) est supposée valoir 100 $. Une obligation à 5 ans de principal 100 $ et de taux de coupon 4 % (1 $ chaque trimestre) est supposée aussi valoir 100 $, et ainsi de suite. La structure par termes des taux zéro-coupon est supposée linéaire entre les maturités, comme illustré au graphique 4.2. On retient une technique d'approximations successives pour ajuster les prix des instruments aux maturités correspondantes. Les calculs du tableau 4.5 peuvent être réalisés à l'aide de DerivaGem. Comme au tableau 4.3, les conventions de décompte des jours sont négligées.

Tableau 4.5 : Taux OIS et calcul de la courbe des taux zéro-coupon OIS

OIS maturité	OIS taux	Fréquence de composition du taux OIS	Taux zéro-coupon de l'obligation
1 mois	1,8 %	Mensuel	1,7987 %
3 mois	2,0 %	Trimestriel	1,9950 %
6 mois	2,2 %	Semestriel	2,1880 %
12 mois	2,5 %	Annuel	2,4693 %
2 ans	3,0 %	Trimestriel	2,9994 %
5 ans	4,0 %	Trimestriel	4,0401 %

4.8 Les taux forward

Les taux forward sont les taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon aujourd'hui. Pour illustrer leur calcul, supposons que les taux zéro-coupon LIBOR (continus) soient ceux de la deuxième colonne du tableau 4.6. Le taux à 1 an est de 3 % et un investissement de 100 € rapporte 103,05 € dans un an. De même, un investissement de 100 € pour 2 ans rapporte $100 \times e^{0,04\times 2} = 108,33$ €.

Tableau 4.6 : Calcul des taux forward

Année *n*	Taux zéro à *n* années (en %)	Taux forward pour l'année *n* (en %)
1	3,0	
2	4,0	5,0
3	4,6	5,8
4	5,0	6,2
5	5,3	6,5

Le taux forward pour l'année 2 dans le tableau 4.5 est de 5 % par an. C'est le taux d'intérêt déduit de la courbe des taux ZC pour la période d'un an entre la fin de la première année et la fin de la seconde année. Ce taux est calculé à partir du taux ZC 1 an de 3 % et du taux ZC 2 ans de 4 %. Ce taux forward de 5 % est en effet le taux à appliquer en année 2 pour que, combiné au taux de 3 % en année 1, il donne un taux ZC de 4 % sur deux ans.

En effet, considérons un placement de 100 € rapportant 3 % la première année et 5 % la seconde année. Sa valeur finale s'écrit :

$$100 \times e^{0,03} \times e^{0,05} = 100 \times e^{0,04\times 2} = 108,33$$

Ce calcul illustre la règle générale suivante : quand les taux sont composés en continu sur des sous-périodes successives, le taux équivalent sur l'ensemble de la période est une moyenne des taux sur les sous-périodes. Dans notre exemple, un taux de 3 % en année 1 suivi d'un taux de 5 % en année 2 conduit à un taux sur l'ensemble des deux années de 4 % par an. Ce résultat n'est vérifié que de manière approchée quand la composition des intérêts n'est pas faite en continu.

Le taux forward à 1 an dans un an est défini comme le taux du placement qui vient d'être construit. S'il est noté R_F, il doit vérifier :

$$\mathrm{e}^{0,03} \times \mathrm{e}^{R_F} = \mathrm{e}^{0,04\times 2}$$

c'est-à-dire :

$$R_F = 5\ \%$$

En d'autres termes, le taux forward pour la seconde année est le taux qui devrait être observé dans un an pour qu'un placement à 2 ans donne le même résultat que deux placements successifs à un an. Cette remarque se généralise ; le taux forward pour la n-ième année, vu de la date 0, est le taux à 1 an qui devrait être observé au début de la n-ième année pour qu'un placement à n années soit équivalent à la succession de deux placements, le premier sur $n-1$ années et le second sur un an.

Par exemple, le taux forward pour la troisième année vérifie :

$$\mathrm{e}^{0,04\times 2} \times \mathrm{e}^{R_F} = \mathrm{e}^{0,046\times 3}$$

Il est donc égal à 5,8 %.

Plus généralement, si deux taux zéro-coupon, notés R_1 et R_2, correspondent à des maturités T_1 et T_2, le taux forward pour la période séparant T_1 et T_2 est défini par :

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T_1} \tag{4.5}$$

Pour illustrer cette formule, calculons le taux forward pour un an dans trois ans, avec les données du tableau 4.5 ; $T_1 = 3$, $T_2 = 4$, $R_1 = 0{,}046$ et $R_2 = 0{,}050$. L'équation (4.5) implique $R_F = 0{,}062$.

En fait l'équation (4.5) se réécrit :

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1)\,\frac{T_1}{T_2 - T_1} \tag{4.6}$$

Cette relation montre que si la courbe des taux zéro-coupon est croissante entre T_1 et T_2, le taux forward est supérieur à R_2. Si T_2 tend vers T_1 dans l'équation (4.6) et si on note T cette maturité, on peut écrire :

$$R_F = R + T\,\frac{\partial R}{\partial T}$$

où R est le taux zéro-coupon de maturité T. La valeur de R_F ainsi obtenue est appelée taux forward instantané à la maturité T. C'est le taux forward applicable pour un investissement de durée infinitésimale à la date T, vu de la date 0. Notons $P(0,T)$ le prix

d'un zéro-coupon d'échéance T. Comme $P(0,T) = \mathrm{e}^{-RT}$, l'équation du taux forward instantané peut aussi s'écrire :

$$R_F = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(0,T)$$

Supposons que les taux LIBOR ZC d'emprunt et de placement soient identiques (ce qui est proche de la réalité pour les grands établissements financiers). Un investisseur peut fixer au niveau du taux forward un taux de placement ou d'emprunt pour une période future. Considérons les taux ZC du tableau 4.5. Si un investisseur emprunte 100 € à 3 % pour un an et les place à 4 % pour deux ans, il décaisse au bout d'un an $100\,\mathrm{e}^{0,03} = 103,05$ et encaisse après deux ans $100\,\mathrm{e}^{0,04\times 2} = 108,33$. Comme on a l'égalité :

$$108,33 = 103,05\,\mathrm{e}^{0,05}$$

une rentabilité de 5 % est dégagée sur la seconde année. Ce raisonnement peut être étendu à n'importe quelle période future pour laquelle on dispose de taux ZC.

Pour un investisseur amené à penser que les taux vont évoluer défavorablement (en fonction de ses objectifs) dans le futur, il existe de nombreuses stratégies fondées sur les taux forward qui lui permettent de se couvrir contre ces mouvements (voir encadré 4.1). L'une d'elles consiste à prendre position sur un FRA (*Forward Rate Agreement*). Ces contrats sont décrits dans la section suivante.

Encadré 4.1 Orange County joue la courbe des taux

Supposons qu'un investisseur puisse emprunter ou placer aux taux du tableau 4.5 et pense que les taux à 1 an ne vont pas beaucoup changer dans les cinq années à venir. Il est alors possible d'emprunter pour 1 an chaque année et de placer pour 5 ans. Cette stratégie donne, si l'hypothèse est vérifiée, une rentabilité de l'ordre de 5,3 % par an et coûte 3 %. Cette stratégie consistant à jouer sur la courbe des taux repose sur l'hypothèse que la courbe des taux ZC aux dates futures sera bien différente de celle qui est induite par les taux forward aujourd'hui. Dans notre exemple, les taux forward à horizon d'un an sont égaux à 5 %, 5,8 %, 6,2 % et 6,5 %. Robert Citron, le trésorier d'Orange County, utilisa en 1992-1993, avec beaucoup de succès, une stratégie analogue à celle que nous venons de décrire. Les profits qu'il réalisa devinrent un élément non négligeable du budget d'Orange County et il fut réélu à son poste. Personne n'écouta son adversaire aux élections qui évoquait le risque de cette stratégie. En 1994, Robert Citron augmenta encore la taille des positions prises sur la courbe des taux. Il investit massivement dans des produits appelés *inverse floaters*, qui produisent un taux d'intérêt égal à la différence entre un taux fixe et un taux variable. Il augmenta le levier de sa position en empruntant sur le marché du Repo. Il aurait continué à gagner si les taux étaient restés stables ou avaient baissé. Mais, comme on pouvait s'y attendre, les taux augmentèrent fortement en 1994. Le 1er décembre, Orange County annonça une perte de 1,5 milliard de dollars US et se plaça quelques jours plus tard sous la protection de la loi sur les faillites.

4.9 Les accords de taux futurs

Un accord de taux futur, plus connu sous le sigle FRA (*Forward Rate Agreement*), est un accord négocié sur le marché OTC, selon lequel une des deux parties paiera à l'autre un taux d'intérêt convenu sur un principal donné, pendant une période future spécifiée. L'hypothèse habituelle pour ce type de contrat est que l'emprunt ou le placement se feront au taux LIBOR. Si le taux fixe est supérieur au taux LIBOR sur la période considérée, l'emprunteur paie au prêteur la différence entre ces taux, appliquée au principal convenu au contrat. Cette somme est payée en fin de période, mais il peut aussi être convenu que sa valeur actuelle soit payée en début de période, comme l'illustre l'exemple 4.3.

■ **Exemple 4.3** Supposons qu'une entreprise conclue un FRA qui spécifie qu'elle recevra un taux fixe de 4 % sur un principal de 1 million d'euros, placement débutant dans trois ans pour une période de trois mois. Si, dans trois ans, le LIBOR 3 mois est à 4,5 %, le flux du FRA sera, dans trois ans et trois mois :

$$1\,000\,000 \times (0{,}04 - 0{,}045) \times 0{,}25 = -1\,250{,}00\,€$$

La valeur actualisée (dans trois ans) sera :

$$\frac{1\,000\,000 \times (0{,}04 - 0{,}045) \times 0{,}25}{1 + 0{,}045 \times 0{,}25} = -1\,236{,}09\,€$$

La contrepartie recevra bien sûr 1 236,09 €. Ici, tous les taux sont exprimés en composition trimestrielle.

Considérons donc un FRA dans lequel une institution financière X s'engage à prêter à une autre institution Y à une date future T_1 jusqu'à une autre date T_2. Notons aussi :

L le principal ;
R_K le taux d'intérêt convenu ;
R_F le taux forward LIBOR [4] pour la période séparant T_1 et T_2 ;
R_M le taux LIBOR effectivement observé en T_1 pour l'horizon T_2.

Nous abandonnons ici l'hypothèse habituelle de composition continue des intérêts en supposant que les trois taux, R_M, R_F et R_K, sont mesurés avec une fréquence de composition correspondant à leur maturité.

Si elle plaçait au taux LIBOR, X gagnerait R_M. Le FRA implique qu'elle gagnera en fait R_K. La différence $R_K - R_M$ engendre un gain (ou une perte) lié au contrat. Cette différence de taux conduit à une différence de flux, pour X en date T_2, égale à :

$$L\,(R_K - R_M)\,(T_2 - T_1) \tag{4.7}$$

Symétriquement, la différence de flux pour Y s'écrit :

$$L\,(R_M - R_K)\,(T_2 - T_1) \tag{4.8}$$

4. Le calcul des taux forward LIBOR est développé aux chapitres 7 et 9.

Ces deux équations permettent de proposer une interprétation alternative des FRA. En effet, tout se passe comme si X allait recevoir le taux R_K et payer le taux R_M pendant la période future allant de T_1 à T_2. La situation est symétrique pour Y.

En pratique, l'échange de flux lié à un FRA est réalisé en date T_1. En conséquence, les flux échangés seront les valeurs actualisées à la date T_1 de :

$$L\,(R_K - R_M)\,(T_2 - T_1)$$

pour X, et de :

$$L\,(R_M - R_K)\,(T_2 - T_1)$$

pour Y.

Évaluation d'un FRA

La valeur du FRA en date 0 est nulle si $R_F = R_K$ [5]. En général, R_K est fixé égal à R_F quand le FRA est mis en place, de sorte que la valeur initiale du FRA est nulle [6]. Au fur et à mesure du passage du temps, les taux changent et la valeur du FRA s'éloigne de zéro.

La valeur de marché d'un actif dérivé à une date donnée est appelée *mark to market*. Pour calculer la valeur *mark to market* du FRA si R_F et R_K sont différents, on procède de la manière suivante. Considérons deux FRA sur le même principal, le premier promettant des intérêts au taux R_F et le second au taux R_K. Les deux contrats sont identiques à l'exception du flux de date T_2 [7]. La différence de valeur de ces deux contrats en date 0 est la valeur actuelle de la différence des flux engendrés. Elle est égale à :

$$V_{\text{FRA}} = L\,(R_K - R_F)\,(T_2 - T_1)\;\mathrm{e}^{-R_2 T_2} \tag{4.9}$$

où R_2 est le taux zéro-coupon (continu) de maturité T_2 prévalant en date 0. Comme la valeur du FRA promettant R_F est nulle, l'équation (4.9) donne exactement la valeur du FRA promettant R_K.

Quand le FRA spécifie que le taux R_K sera payé au lieu d'être reçu, la valeur du FRA est l'opposé de la précédente, c'est-à-dire :

$$V_{\text{FRA}} = L\,(R_F - R_K)\,(T_2 - T_1)\;\mathrm{e}^{-R_2 T_2} \tag{4.10}$$

5. C'est en quelque sorte la base de la définition du taux forward LIBOR. Dans la situation idéale où une banque peut prêter ou emprunter au taux LIBOR, elle peut créer artificiellement un contrat dans lequel elle encaisse ou paie un taux LIBOR (par exemple en empruntant à deux ans et prêtant à trois ans), comme nous l'avons vu à la section 4.6.

6. En fait, ce n'est pas tout à fait vrai. Un market maker va coter des prix bid et ask pour R_K, le bid correspondant au taux qu'il est prêt à payer et le ask au taux qu'il exige de recevoir. Par conséquent, le FRA aura une valeur légérement positive ou légérement négative au moment de sa mise en place.

7. R_K, R_F et R_M sont des taux calculés avec une fréquence de composition des intérêts correspondant à $T_2 - T_1$, alors que R_2 est composé en continu.

En comparant les équations (4.9) et (4.7) ou (4.8) et (4.10), on constate qu'un FRA peut être évalué si :

1. On calcule le payoff en supposant que le taux forward est égal au taux spot futur réalisé (c'est-à-dire R_M=R_F) ;
2. On actualise ce payoff au taux sans risque.

Ce résultat sera utilisé dans l'évaluation des swaps (qui sont des portefeuilles de FRA) au chapitre 7.

■ **Exemple 4.4** On suppose que le taux forward LIBOR pour 6 mois dans 18 mois est de 5 % en composition semestrielle. Une entreprise conclut un FRA par lequel elle reçoit un taux de 5,8 % (composé semestriellement) et paie le LIBOR sur un principal de 100 million d'euros. Le taux sans risque à deux ans est de 4 % (en composition continue). De l'équation (4.9), on déduit que la valeur du FRA est :

$$100\,000\,000 \times (0{,}058 - 0{,}050) \times 0{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}04\times 2} = 369\,200\,€$$

4.10 La duration

La *duration* d'une obligation est une mesure de la durée moyenne d'attente pour percevoir les flux de cette obligation. Un zéro-coupon de maturité n années a une duration égale à n. En revanche, une obligation à coupons de maturité n a une duration plus faible car des flux intermédiaires sont payés avant la date d'échéance.

Considérons une obligation de taux actuariel continu y, payant des flux c_i, $i = 1, \ldots, n$ aux dates t_i, $i = 1, \ldots, n$. Le prix B et le taux actuariel y sont liés par la relation :

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathrm{e}^{-yt_i} \tag{4.11}$$

La duration, D, de l'obligation est définie par :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \, c_i \, \mathrm{e}^{-yt_i}}{B} \tag{4.12}$$

qui peut encore s'écrire :

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i \, \mathrm{e}^{-yt_i}}{B} \right]$$

Les termes entre crochets sont les ratios des différents cash-flows actualisés rapportés au prix de l'obligation. Comme ce prix est égal à la somme des cash-flows actualisés, ces termes définissent un système de poids positifs, dont la somme est égale à 1. La duration est donc bien une moyenne pondérée des dates auxquelles les flux sont payés. Le poids affecté à la date t_i est alors le rapport du cash-flow actualisé, payé à cette date, et du prix de l'obligation. Notez que tous ces flux sont actualisés au même taux, le taux actuariel de l'obligation, et pas avec des taux ZC différents selon les maturités, comme c'était le cas dans la section 4.4.

Si on envisage un changement Δy du taux actuariel, on a l'approximation :

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial y}\Delta y \tag{4.13}$$

De l'équation (4.11), on peut alors déduire :

$$\Delta B = -\Delta y \sum_{i=1}^{n} c_i \, t_i \, \mathrm{e}^{-yt_i} \tag{4.14}$$

(Cette équation montre la relation négative entre prix de l'obligation et taux actuariel.) Les équations (4.12) et (4.14) conduisent à :

$$\Delta B = -BD\Delta y \tag{4.15}$$

L'équation (4.15) peut encore s'écrire :

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \tag{4.16}$$

L'équation (4.16) est la relation essentielle justifiant l'utilisation de la duration, introduite par McCaulay en 1938. Elle montre que la variation en pourcentage du prix d'une obligation, consécutive à une variation du taux actuariel, est égale au produit de cette variation de taux par la duration.

Considérons une obligation à 6 ans, payant un taux de coupon annuel de 5 %, et caractérisée par un taux actuariel de 6 %. Le tableau 4.7 montre le détail des calculs permettant d'obtenir la duration. La troisième colonne indique les flux actualisés (au taux actuariel) de l'obligation. La somme des nombres de cette colonne est donc le prix de l'obligation.

Tableau 4.7 : Calcul de la duration

Date (en années)	**Flux**	**Flux actualisé**	**Poids**	**Date × poids**
1	5	4,709	0,050	0,050
2	5	4,435	0,047	0,094
3	5	4,176	0,044	0,133
4	5	3,933	0,042	0,167
5	5	3,704	0,039	0,197
6	105	73,256	0,778	4,665
Total	130	94,213	1,000	5,306

Les poids de l'avant-dernière colonne sont obtenus en divisant les termes de la troisième colonne par le prix. Dans la dernière colonne sont indiqués les produits des poids par les dates de paiement, variant ici de 1 à 6. Enfin, le total de cette dernière colonne fournit la duration D = 5,306 années.

On note DV01 le changement de prix consécutif à une augmentation d'un point de base de la courbe des taux. Gamma est le changement de DV01 consécutif à une augmentation d'un point de base de cette courbe des taux. L'exemple qui suit étudie la pertinence de la relation (4.15).

■ **Exemple 4.5** L'équation (4.15), appliquée à l'obligation du tableau 4.6, permet d'écrire :

$$\Delta B = -94{,}213 \times 5{,}306\,\Delta y = -499{,}89\,\Delta y$$

Quand le taux actuariel augmente de 10 points de base, le prix de l'obligation diminue de 0,4999, qu'on arrondit à 0,5. Par conséquent, avec un taux actuariel de 6,1 %, on doit avoir un prix de 93,713. Quelle est la qualité de cette estimation ? Le prix de l'obligation s'écrit en fait :

$$\begin{aligned} 5\,\mathrm{e}^{-0{,}061} + 5\,\mathrm{e}^{-0{,}061\times 2} + 5\,\mathrm{e}^{-0{,}061\times 3} + 5\,\mathrm{e}^{-0{,}061\times 4} \\ + 5\,\mathrm{e}^{-0{,}061\times 5} + 105\,\mathrm{e}^{-0{,}061\times 6} = 93{,}714 \end{aligned}$$

La différence est donc négligeable, d'autant que les obligations sont cotées avec deux chiffres après la virgule.

La duration modifiée

L'analyse précédente est fondée sur l'expression d'un taux actuariel continu. Si y est en composition annuelle, l'équation (4.15) devient :

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$$

Plus généralement, si y a une fréquence de composition de m fois par an, on a :

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y/m}$$

La variable D^*, définie par :

$$D^* = -\frac{D}{1+y/m}$$

est parfois appelée *duration modifiée*. On peut donc écrire :

$$\Delta B = -BD^*\Delta y \tag{4.17}$$

où y est exprimé avec une fréquence de composition des intérêts de m fois par an.

■ **Exemple 4.6** L'obligation du tableau 4.6 a un coupon annuel de 5 % et une duration de 5,306 années. Le taux actuariel, exprimé en composition annuelle, est égal à 6,184 %. La duration modifiée est donc donnée par :

$$D^* = \frac{5{,}306}{1+0{,}06184} = 4{,}997$$

Si l'on applique à nouveau l'équation (4.17), la variation du prix de l'obligation en cas de variation du taux actuariel est :

$$\Delta B = -94{,}213 \times 4{,}997\,\Delta y = -470{,}78\,\Delta y$$

Par conséquent, si l'augmentation du taux actuariel est de 10 points de base, la variation de prix de l'obligation est $-0{,}471$ si l'on arrondit à trois chiffres après la virgule. Le prix devrait donc passer à $94{,}213 - 0{,}471 = 93{,}742$. Si on recalcule le prix réel après modification du taux actuariel, on aboutit à 93,742, c'est-à-dire un prix identique à celui qui a été déterminé à l'aide de la duration.

Portefeuilles d'obligations

La duration d'un portefeuille, D, peut être définie comme une moyenne des durations des titres qui composent le portefeuille, avec des poids proportionnels à la part (en valeur) de chacun des titres dans le portefeuille. Dans le cas simple où le portefeuille contient une unité de chaque obligation, la duration du portefeuille est la moyenne des durations des titres qui le composent, pondérées par leurs prix (en pourcentage de la valeur totale du portefeuille).

Les équations (4.15) et (4.17) s'appliquent alors avec B défini comme la valeur du portefeuille. Elles permettent d'estimer le changement de la valeur du portefeuille pour un changement Δy des taux actuariels de toutes les obligations.

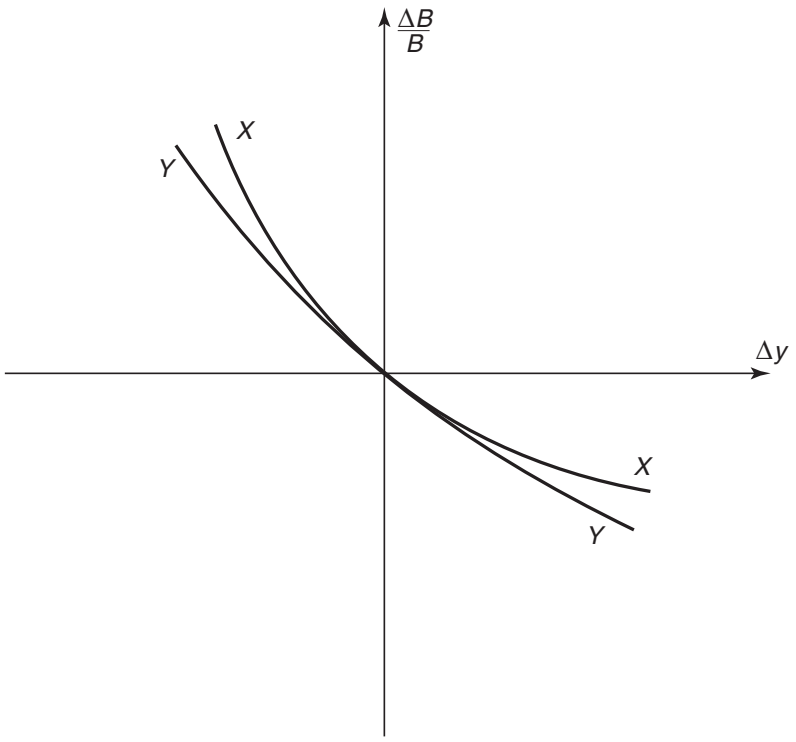
Il est essentiel de garder à l'esprit que l'utilisation de la duration repose sur l'hypothèse implicite que les taux actuariels des différentes obligations subissent tous la même variation.

Quand les obligations ont des maturités très différentes, cette hypothèse est pratiquement équivalente à celle d'un déplacement parallèle de la courbe des taux zéro-coupon. Par conséquent, nous devrions interpréter les équations (4.15) à (4.17) comme un moyen d'estimer l'impact d'un déplacement parallèle de la courbe des taux sur la valeur des obligations. De plus, ces équations supposent une faible variation des taux actuariels.

En choisissant un portefeuille tel que la duration des actifs soit égale à la duration des passifs, une institution financière se couvre contre de faibles variations parallèles de la courbe des taux. Elle reste cependant exposée à de larges variations ou à des déplacements non parallèles. C'est pourquoi la notion de convexité apparaît naturellement dans la gestion obligataire.

4.11 La convexité

Dans le graphique 4.2 sont représentées les variations de valeur en pourcentage de deux portefeuilles ayant la même duration. Les pentes des courbes sont les mêmes à l'origine, montrant bien que, pour de petites variations de y, les variations de valeur (en pourcentage) des portefeuilles sont voisines, ce qui est illustré par l'équation (4.16). En revanche, pour des variations importantes de y, les portefeuilles se comportent différemment. X a une courbure plus marquée. Cette caractéristique de courbure s'appelle la *convexité* ; en tenir compte permet d'améliorer l'ajustement déduit de (4.16).



Graphique 4.2 : Deux portefeuilles obligataires de même duration

La convexité est mesurée par :

$$C = \frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\, t_i^2\, \mathrm{e}^{-yt_i}}{B}$$

La convexité d'un portefeuille d'obligations tend à être plus importante quand les flux engendrés par ce portefeuille sont régulièrement répartis sur une longue période. Elle est plus faible lorsque les flux sont concentrés sur une période courte.

Lorsque la convexité est prise en compte, l'équation (4.13) devient :

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\,\Delta y + \frac{1}{2}\,C\,(\Delta y)^2$$

Pour un portefeuille de duration donnée, la convexité est plus importante quand les flux sont répartis de manière équilibrée dans le temps. En contrôlant à la fois la duration et la convexité, une entreprise peut couvrir le risque de taux pour des déplacements parallèles relativement importants de la courbe des taux zéro-coupon. Cependant, elle reste exposée à des déplacements non parallèles de cette courbe.

4.12 Les théories de la structure par termes des taux

Il est assez naturel de se demander ce qui détermine la forme de la courbe des taux zéro-coupon. Pourquoi est-elle parfois croissante, parfois décroissante, et parfois croissante pour certaines maturités mais décroissante pour d'autres ?

Plusieurs théories ont été proposées, dont la plus simple est la théorie des anticipations. Selon cette approche, les taux longs reflètent les anticipations des opérateurs concernant les taux courts qui prévaudront dans le futur. Plus précisément, selon cette théorie,

le taux forward pour une période future donnée est l'espérance du taux spot qui prévaudra à cette période. Une autre justification repose sur l'hypothèse de segmentation, qui stipule qu'il n'y a pas forcément de relation mécanique entre taux longs et taux courts. En effet, les opérateurs sont différents sur ces deux parties de la courbe. Par exemple, un fonds de pension détiendra des obligations de maturité longue et n'aura aucun intérêt à se déplacer sur des maturités plus courtes. À l'inverse, les taux courts sont déterminés par le jeu de l'offre et de la demande sur le marché des capitaux à court terme.

La troisième théorie est celle de la préférence pour la liquidité. Dans cette approche, les taux forward sont supérieurs aux taux courts futurs espérés pour les périodes correspondantes. Ce résultat vient de l'hypothèse selon laquelle les investisseurs préfèrent un horizon de placement court pour préserver la liquidité de leurs portefeuilles. Symétriquement, les emprunteurs préfèrent emprunter à long terme à taux fixe. Dans ces conditions, si aucune incitation ne contrebalançait ces tendances, les banques feraient des prêts à long terme financés par des dépôts à court terme. Cette situation engendrerait un risque de taux important. Par conséquent, pour éviter ce risque de taux et apparier demande et offre de capitaux, les intermédiaires augmentent les taux longs par rapport aux taux courts futurs espérés, ce qui décourage les emprunteurs et incite les prêteurs à prêter à long terme. La théorie de la préférence pour la liquidité induit une structure par termes des taux, dans laquelle les taux forward sont plus élevés que les taux zéro-coupon futurs espérés. De même, elle conduit à une courbe des taux croissante, ce qui constitue la forme la plus couramment observée sur les marchés.

La gestion de la marge nette d'intérêts

Une bonne compréhension de la théorie de la préférence pour la liquidité passe par l'analyse du risque de taux supporté par les banques quand elles reçoivent des dépôts et octroient des prêts. Il est essentiel que la marge nette d'intérêts, la différence entre les intérêts perçus et les intérêts payés par les banques, soit gérée avec attention.

Considérons la situation d'une banque qui propose à ses clients les taux de dépôt et d'emprunt immobilier à un et cinq ans du tableau 4.8. Supposons en outre que les anticipations des acteurs quant aux taux un an futurs soient simplement le taux observé aujourd'hui sur le marché, les acteurs jugeant les hausses de taux d'intérêt aussi probables que les baisses.

Tableau 4.8 : Exemple de taux offerts par une banque

Maturité (en années)	Taux de dépôt	Taux d'emprunt immobilier
1	3 %	6 %
5	3 %	6 %

Sous ces hypothèses, les taux présentés dans le tableau 4.8 sont « équitables » en ce sens qu'ils reflètent les anticipations du marché. Que vous investissiez sur cinq ans en plaçant

au taux un an et en reconduisant annuellement l'opération ou que vous investissiez directement sur cinq ans au taux cinq ans, le rendement espéré est le même dans les deux cas. De même, le coût espéré d'un emprunt direct à cinq ans est identique à celui de cinq emprunts annuels successifs.

Si vous pensez, vous aussi, que les hausses de taux d'intérêt sont aussi probables que les baisses et que vous avez des liquidités à placer, choisissez-vous de placer votre argent à un an ou à cinq ans, sachant que le taux annuel offert est de 3 % dans les deux cas ? Il y a fort à parier que vous placiez votre argent à un an : pour le même rendement espéré, ce placement offre une plus grande flexibilité, puisque les fonds seront alors bloqués sur une période plus courte. Si vous devez maintenant négocier un emprunt, préférez-vous emprunter à un an ou à cinq ans, sachant que, dans les deux cas, le taux offert est de 6 % ? Cette fois-ci, au contraire, il est probable que vous choisirez un emprunt au taux cinq ans, dans la mesure où il fixe le taux d'emprunt pour les cinq ans tout en supprimant le risque de refinancement.

Une banque proposant les taux présentés dans le tableau 4.8 verrait la majorité de ses clients déposer des fonds à un an et emprunter à cinq ans, avec pour conséquence un décalage actif/passif exposant la banque au risque de taux. Une baisse des taux d'intérêt ne pose pas de problèmes : la marge nette d'intérêts augmente, puisque la banque finance les emprunts précédemment octroyés à 6 % avec des dépôts lui coûtant maintenant moins de 3 %. Au contraire, toute hausse des taux d'intérêt la met dans une situation délicate, dans la mesure où il lui faut maintenant payer un taux de plus de 3 % aux déposants pour financer les emprunts à long terme. La marge nette d'intérêts diminue jusqu'à s'annuler pour une hausse des taux d'intérêt de 3 %.

La gestion actif/passif (*Asset-Liability Management* ou ALM) a pour objet d'assurer que les maturités des actifs payant des intérêts coïncident avec les maturités des actifs pour lesquels des intérêts sont reçus. Pour y parvenir, on peut augmenter les taux à cinq ans, à la fois pour les dépôts et pour les emprunts, comme dans le tableau 4.9, où l'on applique une hausse de 1 % aux taux à cinq ans. Ainsi, les dépôts à cinq ans sont rendus relativement plus attractifs, de même que les emprunts à un an. Des clients qui auraient choisi de déposer à court terme et/ou d'emprunter à long terme dans la situation précédente vont, dans le cas présent, préférer déposer à long terme et/ou emprunter à court terme pour profiter de conditions relativement plus favorables en termes de taux. Il en découle une meilleure adéquation des maturités des produits proposés et, dans le cas où le décalage entre les maturités persiste, les taux à cinq ans peuvent toujours être remontés un peu plus.

Tableau 4.9 : Augmentation des taux à cinq ans pour la gestion actif/passif

Maturité (en années)	Taux de dépôt	Taux d'emprunt immobilier
1	3 %	6 %
5	4 %	7 %

Quand toutes les banques agissent de la sorte, les taux longs tendent à être plus élevés que les taux courts futurs anticipés. En outre, selon la théorie de la préférence pour la liquidité que nous venons de décrire, la courbe des taux d'intérêt est généralement croissante. Elle n'est décroissante que si le marché anticipe une chute particulièrement sévère des taux courts.

Les moyens actuellement à la disposition des banques pour le suivi des décisions de leur clientèle permettent un ajustement rapide de l'offre de taux dans le cadre de la gestion actif/passif. Elles peuvent aussi avoir recours à des produits dérivés comme les swaps de taux d'intérêt, que nous présenterons au chapitre 7, afin de gérer leur exposition au risque de taux.

Ces méthodes et produits financiers font qu'en général, les banques peuvent gérer assez finement leur marge nette d'intérêts. Cela n'a pas toujours été le cas et la faillite des caisses d'épargne américaines dans les années 1980 en est l'illustration. De même, la faillite de la Continental Illinois en 1984 est due en grande partie aux différences de duration entre actifs et passifs. Ces deux événements ont coûté très cher aux contribuables des États-Unis.

Liquidité

Au-delà des problèmes qui viennent d'être décrits, les différences de duration entre actifs et passifs peuvent aussi entraîner des problèmes de liquidité. Considérons une banque qui finance des prêts à 5 ans par des dépôts à 3 mois. Elle peut couvrir le risque de hausse des taux mais, même dans ce cas, des problèmes de liquidité peuvent survenir. Par exemple, les déposants peuvent perdre confiance dans l'institution et retirer leur argent. Même si la capitalisation de la banque est suffisante, les problèmes de liquidité vont être très sévères et peuvent conduire à la quasi-faillite, comme l'illustre l'encadré 4.2.

Encadré 4.2 Liquidité et crise financière de 2007-2009

Pendant la crise du crédit qui a débuté en 2007, on a observé une « fuite vers la qualité » (*flight to quality*) qui s'est traduite, pour les investisseurs et les institutions financières, par une recherche effrénée d'investissements peu risqués. De fait, les institutions qui se finançaient à court terme ont alors éprouvé de grandes difficultés. L'exemple le plus frappant est celui de Northern Rock, au Royaume-Uni, qui finançait des prêts immobiliers par des dépôts à court terme. En septembre 2007, les déposants ont été gagnés par l'inquiétude et ont commencé à retirer leurs fonds. Northern Rock n'était plus en mesure de financer ses activités. La banque a dû, de fait, être nationalisée au début de 2008. Aux États-Unis, des institutions comme Bear Stearns et Lehman Brothers ont rencontré des difficultés du même type, dues en partie à leurs choix de financement d'activités par des fonds de court terme.

Résumé

De nombreux taux d'intérêt différents sont utilisés sur les marchés financiers. Le taux zéro-coupon à n années est le taux applicable à un investissement de n années n'engendrant pas de flux intermédiaires. Les taux forward sont les taux applicables à des périodes futures, implicites dans les taux zéro-coupon observés aujourd'hui. Le taux actuariel au pair d'une obligation est le taux de coupon qui rend le prix de cette obligation égal à son nominal.

Les taux d'État doivent être distingués des taux LIBOR. Les taux d'État sont les taux auxquels empruntent les gouvernements dans leur propre devise. Les taux LIBOR sont cependant les taux les plus couramment utilisés (comme taux sans risque) dans l'évaluation des actifs dérivés.

La méthode de calcul des taux ZC appelée « bootstrap » est la plus courante. Elle consiste à calculer les taux à maturité proche à l'aide des titres d'horizon court et à en déduire, de proche en proche, les taux ZC correspondant aux maturités plus éloignées. Cette courbe des taux ZC est utilisée quotidiennement par les opérateurs des marchés de taux.

Un FRA est un contrat, négocié sur le marché OTC, qui définit le taux qui sera appliqué à un emprunt ou placement lors d'une période débutant à une date future. Ces contrats peuvent être évalués en utilisant une méthode de cristallisation, consistant (a) à supposer que les taux spot futurs sont égaux aux taux forward observés aujourd'hui et (b) à actualiser les flux au taux sans risque.

Le concept de duration est important dans la couverture du risque de taux. La duration d'un titre mesure la durée moyenne d'attente des flux pour le détenteur du titre. C'est en fait une moyenne pondérée des dates de paiement des flux, chaque date de flux étant pondérée par la valeur actuelle de celui-ci, rapportée au prix du titre. Le résultat essentiel pour établir une stratégie de couverture fondée sur la duration est le suivant :

$$\Delta B = -BD\Delta y$$

où B est le prix du titre, D la duration, Δy la variation (supposée de faible amplitude) du taux actuariel et ΔB la variation du prix du titre. La théorie de la préférence pour la liquidité permet d'expliquer la forme de la structure par termes des taux d'intérêt observée le plus souvent sur les marchés. Elle s'appuie sur l'hypothèse que les individus et institutions préfèrent placer court et emprunter long. La seule façon d'atteindre un équilibre entre prêteurs et emprunteurs consiste en des taux longs supérieurs aux taux courts.

Références complémentaires

FABOZZI F. J., *Bond Markets, Analysis and Strategies*, 8^{e} éd., Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2012.

GRINBLATT M. et F. A. LONGSTAFF, "Financial Innovations and the Role of Derivative Securities : An Empirical Analysis of the Treasury Strips Program", *Journal of Finance*, 55 (3), 2000, 1415-1436.

JORION P., *Big Bets Gone Bad : Derivatives and Bankruptcy in Orange County*, Academic Press, New York, 1995.

STIGUM M. et F. L. ROBINSON, *Money Markets and Bond Calculations*, Irwin, Chicago, 1996.

Problèmes et exercices

4.1 Une banque vous prête de l'argent à 7 % par an en composition trimestrielle. Quels sont les taux équivalents en (a) composition continue et (b) composition annuelle ?

4.2 Qu'entend-on par taux LIBOR et comment sont-ils déterminés ?

4.3 Les taux zéro-coupon à 6 mois et à 1 an sont tous deux de 5 %. Le taux actuariel d'une obligation de maturité 18 mois (dont un coupon vient d'être payé), payant un coupon semestriel de 4 % par an, est de 5,2 %. Quel est le prix de cette obligation ? Quel est le taux zéro-coupon à 18 mois ? Vous supposerez que tous ces taux sont exprimés en composition semestrielle.

4.4 Un investisseur reçoit 1 100 € pour un placement de 1 000 € réalisé un an plus tôt. Calculez le taux de ce placement en composition (a) annuelle, (b) semestrielle, (c) mensuelle, (d) continue.

4.5 Considérons la courbe zéro-coupon (en composition continue) donnée dans le tableau suivant.

Maturité (mois)	Taux (en % par an)
3	3,0
6	3,2
9	3,4
12	3,5
15	3,6
18	3,7

Calculez les taux forward, vus de la date 0, pour les trimestres 2 à 6.

4.6 En utilisant les taux de l'exercice 4.5, évaluez un FRA qui conduit son détenteur à obtenir un taux de 4,5 % pour trois mois dans un an sur un principal de 1 million d'euros. Le taux forward LIBOR pour la période de trois mois est de 5 % en composition trimestrielle.

4.7 La structure des taux a une pente positive. Rangez les taux suivants en ordre croissant :

a. le taux zéro-coupon à cinq ans ;

b. le taux actuariel d'une obligation à coupons de maturité cinq ans ;

c. le taux forward pour le trimestre débutant dans quatre ans et neuf mois.

Quelles sont les réponses si la courbe des taux est décroissante en fonction de la maturité ?

4.8 Quelle information vous apporte la duration sur la sensibilité d'un portefeuille d'obligations par rapport aux taux d'intérêt ? Quelles sont les limites de cette notion ?

4.9 Quel taux continu est équivalent à un taux de 8 % par an en composition mensuelle ?

4.10 Un compte d'épargne paie un taux continu de 4 % par an, mais l'intérêt est payé chaque trimestre. Combien la banque paie-t-elle d'intérêts (tous les 3 mois) sur un montant de 10 000 € ?

4.11 Les taux zéro-coupon pour des horizons de 6 à 30 mois avec un pas de 6 mois sont respectivement de 4 %, 4,2 %, 4,4 %, 4,6 % et 4,8 % en composition continue. Quel est le prix coupon couru d'une obligation de nominal 100 de maturité 30 mois ayant un taux de coupon de 4 % par an avec des coupons semestriels ?

4.12 Quel est le taux actuariel d'une obligation à 3 ans dont le prix coupon couru est de 104, sachant que le coupon est semestriel et que le taux de coupon est de 8 % ?

4.13 Les taux zéro-coupon à 6, 12, 18 et 24 mois sont respectivement de 5 %, 6 %, 6,5 % et 7 %. Quel est le taux actuariel au pair à deux ans ?

4.14 Considérons la courbe zéro-coupon (en composition continue) donnée dans le tableau suivant.

Maturité (années)	Taux (en % par an)
1	2,0
2	3,0
3	3,7
4	4,2
5	4,5

Calculez, vus de la date 0, les taux forward de maturité 1 an pour les années 2 à 5.

4.15 Utilisez les taux zéro-coupon de l'exercice précédent pour évaluer un FRA dans lequel vous payez 5 % (en composition annuelle) et vous recevez le LIBOR en année 3 sur un principal de 1 million d'euros. Le taux forward LIBOR (en composition annuelle) est pour cette troisième année de 5,5 %.

4.16 Le prix d'une obligation notée A, de maturité 10 ans et de taux de coupon 8 % par an, est de 90. Le prix d'une obligation notée B, de maturité 10 ans et de taux de coupon 4 %, est de 80. Quel est le taux zéro-coupon à 10 ans ? (Indication : considérez une position consistant en l'achat de deux titres B et la vente d'un titre A.)

4.17 Expliquez avec précision pourquoi la théorie de la préférence pour la liquidité est cohérente avec une courbe des taux plus souvent croissante que décroissante.

4.18 « Quand la courbe des taux ZC est croissante, le taux ZC pour une maturité quelconque est plus élevé que le taux au pair. Quand la courbe est inversée, c'est le contraire. » Expliquez pourquoi il en est ainsi.

4.19 Pourquoi les taux des obligations d'État sont-ils en général significativement plus faibles que d'autres taux « presque » sans risque ?

4.20 Pourquoi un prêt sur le marché du Repo présente-t-il un risque de crédit très faible ?

4.21 Expliquez pourquoi un FRA est équivalent à l'échange d'un taux variable contre un taux fixe ?

4.22 Une obligation de maturité 5 ans a un taux actuariel (continu) de 7 % et paie un taux de coupon de 8 % par an. Le coupon est payé en fin d'année.

a. Quel est le prix de cette obligation ?

b. Quelle est la duration de cette obligation ?

c. En utilisant la duration, calculez l'impact d'une baisse du taux actuariel de 0,2 % sur le prix.

d. En recalculant le prix avec un taux actuariel de 6,8 %, vérifiez le résultat de la question précédente.

4.23 Les bons du Trésor à 6 mois et 1 an cotent respectivement 94,0 et 89,0. Une obligation à 18 mois payant un coupon de 4 € chaque semestre cote actuellement 94,84 € (un coupon vient d'être payé). Une obligation à 2 ans payant un coupon de 5 € chaque semestre cote 97,12 € (un coupon vient d'être payé). Calculez les taux ZC à 6 mois, 1 an, 18 mois et 2 ans.

4.24 « Un swap de taux dans lequel le LIBOR 6 mois est échangé contre un taux fixe de 5 % sur un principal de 100 millions d'euros pour 5 ans est équivalent à un cash-flow connu et un portefeuille de neuf FRA. » Expliquez cette affirmation.

Questions complémentaires

4.25 Composé annuellement un taux est égal à 11 %. Combien vaut ce taux s'il est en composition (a) semi-annuelle, (b) trimestrielle, (c) mensuelle, (d) hebdomadaire et (e) journalière ?

4.26 Le tableau ci-dessous donne les taux zéro-coupon d'État (en composition continue) et les cash-flows d'une obligation d'État.

a. Quel est le prix théorique de l'obligation ?

b. Quel est le taux actuariel de l'obligation ?

Maturité (en années)	Taux zéro	Coupon	Nominal
0,5	2,0 %	20 $	
1,0	2,3 %	20 $	
1,5	2,7 %	20 $	
2,0	3,2 %	20 $	1 000 $

4.27 Une obligation à 5 ans a un taux de coupon annuel de 5 % payable semestriellement. Son prix est de 104. Quel est le taux actuariel de cette obligation ? Vous pouvez utiliser le solveur d'Excel pour répondre.

4.28 Supposez que les taux OIS pour des maturités de 3, 6, 12 mois, 2 et 3 ans, soient respectivement de 2,0 %, 2,5 %, 3,2 %, 4,5 % et 5,0 %. Les OIS de maturité inférieure ou égale à un an n'impliquent qu'un seul échange de flux à la date d'échéance. Pour les deux autres, les échanges sont trimestriels. Les fréquences de composition des taux correspondent à la durée entre deux échanges. Calculer la courbe de taux zéro-coupon OIS, en composition continue. Utilisez une interpolation linéaire des taux continus pour calculer les taux entre 6 et 12 mois, entre 12 mois et 2 ans, et entre 2 et 3 ans. L'utilisation du solveur d'Excel est conseillée.

4.29 Un taux d'intérêt vaut 5 % par an en composition semestrielle. Quel est le taux équivalent (a) en composition annuelle, (b) en composition mensuelle et (c) en composition continue ?

4.30 Les taux ZC à 6 mois, 12 mois, 18 mois et 2 ans sont respectivement de 4 %, 4,5 %, 4,75 % et 5 % en composition semestrielle.

a. Quels sont les taux continus correspondants ?

b. Quel est le taux forward pour une période de 6 mois débutant dans 18 mois ?

c. Quelle est la valeur d'un FRA dans lequel vous toucherez 6 % sur 1 million d'euros (en composition semestrielle) sur une période de 6 mois débutant dans 18 mois ?

4.31 Quel est le taux actuariel au pair à 2 ans quand les taux ZC sont ceux de l'exercice 4.32 ? Quel est le taux actuariel d'une obligation à 2 ans qui paie un coupon égal au taux actuariel au pair ?

4.32 Le tableau suivant donne les prix de différentes obligations.

Nominal	Maturité (en années)	Taux de coupon*	Prix
100	0,5	0,0	98
100	1,0	0,0	95
100	1,5	6,2	101
100	2,0	8,0	104

* La moitié du coupon annuel est payée chaque semestre.

a. Calculez les taux ZC pour les maturités de 6, 12, 18 et 24 mois.

b. Quels sont les taux forward à 6 mois, dans 6 mois, 12 mois et 18 mois ?

c. Quels sont les taux actuariels au pair d'obligations de maturités 6, 12, 18 et 24 mois si ces obligations paient des coupons semestriels ?

d. Estimez le prix et le taux actuariel d'une obligation à 2 ans qui paie un taux de coupon de 7 % par an (avec paiements semestriels).

4.33 Un portefeuille A comprend une obligation ZC à 1 an de nominal 2 000 € et un ZC à 10 ans de nominal 6 000 €. Un portefeuille B comprend un ZC à 5,95 ans de nominal 5 000 €. Toutes ces obligations ont un taux actuariel de 10 %.

a. Montrez que les deux portefeuilles ont la même duration.

b. Montrez que les variations en pourcentage des deux portefeuilles sont identiques si le taux actuariel varie de 0,1 %.

c. Si les taux actuariels augmentaient de 5 %, quelles seraient les variations en pourcentage des deux portefeuilles ?

4.34 Vérifiez que DerivaGem fournit des prix en accord avec ceux de la section 4.6. Testez si DV01 est une bonne mesure de la variation de prix en cas de déplacement de la courbe des taux d'1 bp. Utilisez DV01 et Gamma pour prévoir l'effet d'un déplacement de 200 bp, à la hausse, de la courbe des taux. Estimez la convexité avec Gamma (indication : dans DerivaGem, DV01 est égal à dB/dy, où B est le prix de l'obligation et y son taux actuariel en points de base, et Gamma est d^2B/dy^2, où y est en pourcents).

Chapitre 5

La détermination des prix forward et des prix futures

Dans ce chapitre, nous analysons les liens entre prix forward, prix futures et prix au comptant. Les prix forward sont plus simples à comprendre que les prix futures, car ils ne font pas l'objet d'une compensation journalière (*marking to market*) ; en d'autres termes, « les compteurs ne sont pas remis à zéro chaque jour » par des appels de marge. Néanmoins, les prix forward et futures restent très proches quand les contrats ont même échéance.

La première partie de ce chapitre présente les résultats essentiels sur la relation entre prix forward et prix spot (au comptant). Ces résultats permettent ensuite d'analyser cette relation pour les contrats sur indices, sur devises ou sur matières premières. Les contrats futures de taux seront examinés plus en détail dans le chapitre suivant.

5.1 Actifs d'investissement ou actifs de consommation

Dans l'étude des contrats forward et des futures, il est important de distinguer actifs d'investissement et actifs de consommation. Un actif d'investissement est un actif considéré par une majorité d'investisseurs comme un moyen d'investir ; c'est le cas des obligations, des actions ou encore de l'or et de l'argent. Par exemple, l'argent a des usages industriels multiples. Il est cependant considéré par un grand nombre d'agents économiques comme un véhicule d'investissement.

En revanche, un actif de consommation est un actif qui est prioritairement détenu pour la consommation. Il n'est donc pas, en général, utilisé pour investir. Le cuivre, le pétrole ou les carcasses de porcs sont des exemples de tels actifs.

Comme nous le verrons au cours de ce chapitre, l'argument d'absence d'arbitrage peut être utilisé pour calculer le prix forward ou le prix futures d'un actif d'investissement à partir du prix spot et d'autres variables de marché. Ce même raisonnement ne s'applique plus pour les actifs de consommation.

5.2 Les ventes à découvert

Certaines stratégies d'arbitrage nécessitent de vendre à découvert. Cette opération consiste à vendre des actifs que l'on ne possède pas ; c'est possible pour certains actifs d'investissement, mais pas pour tous.

Considérons, pour illustrer ce mécanisme, le cas d'une vente à découvert d'actions. Un investisseur (noté A) passe auprès de son intermédiaire (appelé B) un ordre de vente à découvert de 500 titres XYZ. Pour exécuter cet ordre, le broker va emprunter les titres à un autre client (appelé C) et les vendre sur le marché par la procédure usuelle. L'investisseur A peut maintenir cette position aussi longtemps qu'il le souhaite, tant que le broker B trouve un client qui prête les titres. À un moment, l'investisseur va clore sa position en achetant 500 titres XYZ. Ceux-ci vont alors être mis sur le compte du client prêteur. A réalise un profit si le cours a baissé et subit une perte si le cours a augmenté. Si, à un moment quelconque pendant cette opération, le broker B ne trouve plus de prêteur C, A est obligé de dénouer sa position immédiatement, même s'il ne le souhaite pas (on parle alors de *short-squeeze*).

L'investisseur, emprunteur de titres, doit payer à B les dividendes ou les intérêts que reçoit normalement le détenteur des titres vendus à découvert. B crédite alors le compte du client C, prêteur de titres. Par exemple, supposons que A ait vendu à découvert 500 XYZ en avril, alors que le cours était à 120 $, et qu'il dénoue sa position en juillet, alors que le cours est à 100 $. Supposons encore que XYZ ait payé en mai 1 $ de dividende par action.

L'investisseur A reçoit $500 \times 120\ \$ = 60\,000\ \$$ en avril, quand la vente à découvert est réalisée. Il paie $500 \times 1\ \$ = 500\ \$$ quand le dividende est versé. Enfin, il décaisse encore $500\ \times 100\ \$ = 50\,000\ \$$ en dénouant sa position en juillet. Le gain net est donc de :

$$60\,000 - 50\,000 - 500 = 9\,500\ \$$$

Le tableau 5.1 illustre cet exemple en montrant que les cash-flows de la vente à découvert sont symétriques de ceux d'un achat en avril suivi d'une revente en juillet.

Tableau 5.1 : Cash-flows d'une vente à découvert et d'un achat au comptant suivi d'une revente

Achat d'actions	
Avril : achat de 500 titres à 120 $	−60 000 $
Mai : encaissement du dividende	+500 $
Juillet : revente à 100 $	+50 000 $
Profit net	−9 500 $
Vente à découvert	
Avril : emprunt de 500 titres et vente à 120 $	+60 000 $
Mai : paiement du dividende	−500 $
Juillet : rachat à 100 $	−50 000 $
Profit net	+9 500 $

L'investisseur doit posséder chez son intermédiaire financier un compte de marge composé de cash ou de titres, qui lui garantissent qu'il pourra faire face à ses engagements en cas de hausse du titre vendu à découvert. Ce compte a la même fonction que celui décrit au chapitre 2 pour les contrats futures. Un deposit initial est obligatoire et des montants additionnels pourront être exigés si la situation se détériore (c'est-à-dire si le prix de l'actif monte). Ce compte de marge ne représente cependant pas réellement un coût pour l'investisseur car les fonds qui y sont déposés sont en général rémunérés. Si le taux proposé est trop faible, l'investisseur a la possibilité de déposer des titres (des obligations d'État, par exemple) qui rapportent des intérêts sous forme de coupons.

La régulation des ventes à découvert a changé récemment aux États-Unis. De 1938 jusqu'à son abolition par la SEC en juillet 2007, c'est la règle du *uptick* qui s'appliquait. Cette règle stipulait qu'une vente à découvert n'était possible qu'après une hausse du titre (*uptick*), c'est-à-dire après deux prix de transactions successifs en ordre croissant. Depuis février 2010, suite aux fortes baisses parfois erratiques observées pendant la crise, une nouvelle règle a été introduite. Quand le prix d'un titre a baissé de plus de 10 % au cours d'une journée, les ventes à découvert font l'objet de restrictions le jour même et le lendemain. Elles stipulent qu'un ordre de vente à découvert ne peut être réalisé qu'à un prix plus élevé que le meilleur prix bid existant au moment de la vente.

En 2008, on a aussi interdit les ventes à découvert dans de nombreux pays, en particulier sur les valeurs des secteurs financiers, banques et assurances notamment. L'objectif était en particulier de réduire la volatilité des rentabilités, jugée excessive pendant cette période.

Il existe aussi des ventes à découvert à nu pour lesquelles l'investisseur vend des titres qu'il ne possède pas, sans pour cela les emprunter. Ce type de ventes est souvent accusé d'accentuer les baisses de prix pendant les périodes de crise.

5.3 Hypothèses et notations

Dans ce chapitre, nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées, au moins pour certains intervenants du marché.

1. Il n'y a pas de frais de transaction.
2. Le taux d'imposition sur les profits est identique pour tous.
3. Prêts et emprunts peuvent être réalisés au même taux sans risque.
4. Les opérateurs profitent des opportunités d'arbitrage dès qu'elles apparaissent.

Il n'est pas nécessaire que ces hypothèses soient vérifiées pour tous les intervenants. Il suffit qu'elles le soient pour un sous-ensemble d'acteurs significatifs du marché, comme les grandes banques d'investissement. En fait, si les opérateurs importants sont à l'affût des éventuelles opportunités d'arbitrage, ils vont permettre de maintenir la relation théorique entre prix forward et prix spot.

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

T : délai jusqu'à la date de livraison d'un contrat forward ou futures (en années) ;

S_0 : prix de l'actif sous-jacent au contrat à la date 0 (aujourd'hui) ;

F_0 : prix forward ou futures aujourd'hui ;

r : taux ZC sans risque annuel continu pour un placement ou emprunt de T années, c'est-à-dire jusqu'à l'échéance du contrat considéré.

Le taux sans risque, r, est souvent interprété comme le taux des émissions du Trésor, c'est-à-dire le taux auquel un gouvernement emprunte dans sa propre devise. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 4, les grandes institutions financières et les opérateurs des marchés d'actifs dérivés utilisent plutôt le taux OIS comme substitut au taux sans risque.

5.4 Le prix forward d'un actif d'investissement

Le contrat forward le plus facile à évaluer est un contrat dont le sous-jacent est un actif n'engendrant pas de revenus pendant la durée de vie du contrat. Les actions ne versant pas de dividendes (ND dans la suite) et les obligations zéro-coupon (ZC dans la suite) sont des exemples de ce type d'actif.

Considérons un contrat forward d'échéance 3 mois sur une action ND[1]. Le cours de l'action est 40 € aujourd'hui et le taux sans risque est 5 % par an. Nous décrivons ci-après les stratégies offertes à un arbitragiste pour deux hypothèses extrêmes.

Le prix forward est 43 €, l'arbitragiste emprunte 40 € au taux sans risque, achète l'action et vend un contrat forward. À la fin des trois mois, il rembourse son emprunt :

$$40\,\mathrm{e}^{0,05\times\frac{3}{12}} = 40{,}50\ €$$

Il livre l'action et reçoit 43 €. En suivant cette stratégie, il a assuré un profit de :

$$43\ € - 40{,}50\ € = 2{,}50\ €$$

à la fin des trois mois.

Supposons maintenant que le prix forward soit 39 €. Dans ce cas, l'arbitragiste achète le forward, vend l'action à découvert et place le montant de cette vente au taux sans risque. Il obtient de ce placement :

$$40\,\mathrm{e}^{0,05\times\frac{3}{12}} = 40{,}50\ €$$

Il paie par ailleurs 39 € pour obtenir l'action qui lui permet de dénouer sa position de vente à découvert. Le profit net est dans ce cas :

$$40{,}5\ € - 39\ € = 1{,}5\ €$$

1. Les contrats forward sur actions individuelles sont relativement peu développés mais permettent d'exposer simplement les idées essentielles. Des contrats futures sur actions individuelles sont cotés sur Euronext.Liffe depuis 2001 et aux États-Unis depuis 2002.

Les résultats des deux stratégies que nous venons de présenter sont résumés dans le tableau 5.2.

Tableau 5.2 : Opportunités d'arbitrage quand les prix spot et forward d'un actif ne payant pas de flux intermédiaires sont incohérents (prix de l'actif = 40 €, taux sans risque = 5 %, maturité du contrat = 3 mois)

Prix forward = 43 €	**Prix forward = 39 €**
Stratégie aujourd'hui	**Stratégie aujourd'hui**
Emprunt de 40 € à 5 % pour 3 mois	Vente à découvert d'une unité d'actif (40 €)
Achat d'une unité d'actif	Placement des 40 € à 5 % pour 3 mois
Position courte sur le forward (à 43 €)	Position longue sur le forward (à 39 €)
Stratégie dans 3 mois	**Stratégie dans 3 mois**
Vente de l'actif à 43 €	Achat de l'actif à 39 €
Remboursement de l'emprunt : 40,5 €	Réception de 40,5 € du placement initial
Profit 2,5 €	**Profit = 1,5 €**

Quelles sont les conditions permettant le genre d'opération décrite dans le tableau 5.2 ? Le premier cas engendre un profit car le prix forward est plus grand que 40,50 €, le second parce que ce même prix forward est inférieur à 40,50 €. Il apparaît que l'absence d'opportunités d'arbitrage requiert un prix forward égal à 40,50 € exactement.

Encadré 5.1 Kidder Peabody

Les banques d'investissement ont développé une façon de créer des zéro-coupon, appelés *strip*, en découpant une obligation à coupons et en vendant séparément les différents flux associés. Joseph Jett, trader chez Kidder Peabody, avait une stratégie relativement simple. Il achetait des strips sur le marché au comptant et les revendait à terme à l'aide de contrats forward. Comme le montre l'équation (5.1), le prix forward d'un actif qui ne paie pas de revenu intermédiaire est toujours plus élevé que son prix spot. Par exemple, si le taux à 3 mois est de 4 % en base annuelle et si le prix spot d'un strip est de 70 €, le prix forward correspondant est de $70\,\mathrm{e}^{0,04\times 3/12} = 70{,}70$ € . Le système informatique de Kidder Peabody considérait la différence comme un profit au moment de la transaction. Évidemment, cette différence représentait simplement le coût de financement du strip. Mais, en renouvelant la position sur les contrats forward, Jett évitait que le coût de financement ne lui soit imputé. Par conséquent, le système comptabilisait un profit de 100 millions, impliquant une large gratification pour Jett, alors qu'en réalité il s'agissait d'une perte d'environ 350 millions. Cela montre que, même dans les institutions financières importantes, des dysfonctionnements importants peuvent survenir.

Généralisation

Considérons un contrat forward sur un actif d'investissement coté S_0. T est la durée de vie du contrat, r le taux sans risque et F_0 le prix forward. S_0 et F_0 sont liés par la relation :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{rT} \tag{5.1}$$

Si $F_0 > S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$, les arbitragistes achètent l'actif et vendent le forward. Si $F_0 < S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$, ils achètent le forward et vendent l'actif à découvert [2]. Dans l'exemple, $S_0 = 40$, $r = 0{,}05$ et $T = 0{,}25$; par conséquent, l'équation (5.1) entraîne :

$$F_0 = 40 \, \mathrm{e}^{0{,}05 \times 0{,}25} = 40{,}50 \text{ €}$$

C'est bien le résultat obtenu plus haut. Une position longue sur un contrat forward et un achat du sous-jacent conduisent tous deux à détenir l'actif sous-jacent à la date T. Le prix forward est plus élevé que le prix spot, car il faut financer l'achat du sous-jacent quand on prend position sur le sous-jacent. C'est ce point qui avait été négligé par Kidder Peabody en 1994, conduisant à une perte considérable (voir encadré 5.1).

■ **Exemple 5.1** Considérons un forward à 4 mois sur un zéro-coupon de maturité un an et de nominal 1 €. Le prix aujourd'hui du ZC est 0,93 € (l'obligation aura encore huit mois à vivre à l'échéance du contrat forward). Le taux sans risque à 4 mois (composé en continu) est de 6 % par an. Comme le ZC ne fournit pas de flux intermédiaire, nous pouvons utiliser l'équation (5.1) avec T = 4/12, r = 0,06 et S_0 = 0,95. Le prix forward est donc :

$$F_0 = 0{,}93 \, \mathrm{e}^{0{,}06 \times \frac{4}{12}} = 0{,}94879 \text{ €}$$

Ce sera le prix de livraison pour un contrat négocié aujourd'hui.

Et si les ventes à découvert ne sont pas possibles ?

Tous les actifs d'investissement ne peuvent être vendus à découvert. Cela ne pose cependant pas de problème. Pour que l'équation (5.1) soit valide, il n'est pas nécessaire de pouvoir vendre l'actif à découvert. Il faut simplement qu'un nombre significatif d'intervenants le détiennent à des fins d'investissement (par définition, c'est vrai pour un actif d'investissement). Si le prix forward est trop faible, ils auront intérêt à acheter le contrat et à vendre l'actif qu'ils détiennent.

Supposons que l'actif sous-jacent soit l'or et que celui-ci n'entraîne pas de coûts de stockage ; si $F_0 > S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$, un investisseur peut alors :

1. Emprunter S_0 au taux r pour T années ;
2. Acheter une once d'or ;
3. Vendre un forward sur une once d'or.

2. Une autre façon de montrer que l'équation (5.1) est correcte consiste à acheter une unité de l'actif et à vendre le forward. Cela coûte S_0 et rapporte à coup sûr F_0 à la date T. Par conséquent, S_0 doit être la valeur, actualisée au taux sans risque de F_0, c'est-à-dire $S_0 = F_0 \, \mathrm{e}^{-rT}$ ou encore $F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$.

À la date T, l'once d'or est vendue pour F_0 et le remboursement de l'emprunt entraîne un décaissement de $S_0\,\mathrm{e}^{rT}$, ce qui conduit à un profit de $F_0 - S_0\,\mathrm{e}^{rT}$.

Supposons maintenant que $F_0 < S_0\,\mathrm{e}^{rT}$; un investisseur qui détient l'or peut opérer de la manière suivante :

1. Vendre l'or ;
2. Investir le montant obtenu au taux sans risque ;
3. Acheter le forward.

À la date T, le placement rapporte $S_0\,\mathrm{e}^{rT}$, l'or est racheté pour F_0 et le profit est $S_0\,\mathrm{e}^{rT} - F_0$ alors que l'investisseur revient dans sa position initiale, dans laquelle il détenait l'once d'or.

Comme dans le cas du contrat forward sur action, on peut s'attendre à ce que le prix forward s'ajuste sur sa valeur théorique de façon qu'aucune des deux opportunités d'arbitrage n'apparaisse. La relation (5.1) doit donc être vérifiée.

5.5 Cas d'un flux intermédiaire connu

Analysons maintenant le cas où l'actif sous-jacent au contrat paie un flux (dividende ou coupon) pendant la durée de vie du contrat, le montant de ce flux étant supposé connu. Comme dans la section précédente, nous traitons un exemple numérique avant de présenter le raisonnement général.

Considérons un contrat forward sur une obligation à coupons, cotée aujourd'hui 900 €. L'échéance du forward est dans 9 mois. Cette obligation verse un coupon de 40 € dans 4 mois. Les taux sans risque pour 4 mois et 9 mois sont respectivement (en taux annuel) de 3 % et 4 %.

Si le prix forward est de 910 €, un arbitragiste emprunte 900 € pour acheter l'obligation et vendre le contrat. Le premier coupon a une valeur actuelle égale à :

$$40 \times \mathrm{e}^{-0{,}03\times(4/12)} = 39{,}60\ €$$

Par conséquent, sur les 900 € empruntés, 39,6 € peuvent être empruntés au taux 4 mois de 3 %. Le reste, soit 860,4 €, est emprunté pour un an au taux de 4 %. Après 9 mois, le remboursement sera égal à :

$$860{,}40 \times \mathrm{e}^{0{,}04\times(9/12)} = 886{,}60\ €$$

L'arbitragiste réalise alors un profit égal à :

$$910\ € - 886{,}60\ € = 23{,}40\ €$$

Supposons maintenant que le prix forward soit de 870 €. L'investisseur vend à découvert l'obligation [3] et prend une position longue sur le forward. Il place le montant obtenu

3. Si la vente à découvert n'est pas possible, les investisseurs qui possèdent l'obligation pourront toujours mettre en œuvre cette stratégie en vendant l'obligation qu'ils détiennent. La technique est alors analogue à celle utilisée sur l'or dans la section 5.4.

au taux sans risque, 39,6 €, à 4 mois et le reste, 860,4 €, à 9 mois. Après 4 mois, il obtient 40 € du placement, ce qui correspond au premier coupon de l'obligation, et après 9 mois, il encaisse 886,6 € du fait du placement à 9 mois. Le profit réalisé s'écrit donc :

$$886{,}60\ € - 870\ € = 16{,}60\ €$$

Les résultats des deux stratégies sont résumés dans le tableau 5.3. La première produit un profit dès que le prix forward est supérieur à 886,6 €, et la seconde dès que le prix forward tombe en deçà de 886,6 €. Par conséquent, en l'absence d'opportunités d'arbitrage, le prix forward doit être égal à 886,6 €.

Tableau 5.3 : Opportunités d'arbitrage quand les prix spot et forward d'un actif ne payant pas de flux intermédiaires sont incohérents (prix de l'actif = 900 €, taux sans risque à 4 et 9 mois = 3 % et 4 % respectivement, coupon = 40 € dans 4 mois, maturité du contrat = 9 mois)

Prix forward = 910 €	**Prix forward = 870 €**
Stratégie aujourd'hui	**Stratégie aujourd'hui**
Emprunt de 900 € : 39,60 à 3 % pour 4 mois et 860,40 à 4 % pour 9 mois	Vente à découvert d'une unité d'actif
Achat d'une unité d'actif	Placement de 39,60 pour 4 mois et de 860,40 pour 9 mois
Position courte sur le forward (à 910 €)	Position longue sur le forward (à 870 €)
Stratégie dans 4 mois	**Stratégie dans 4 mois**
Réception des 40 € de coupon	Encaissement des 40 €
Remboursement de 40 € sur le premier emprunt	du premier placement
	Paiement du coupon de 40 €
Stratégie dans 9 mois	**Stratégie dans 9 mois**
Vente de l'obligation à 910 €	Encaissement de 886,60 €
Remboursement du second emprunt pour 886,60 €	du second placement
	Achat de l'obligation à 870 €
Profit : 23,40 €	**Profit : 16,60 €**

Généralisation

On peut montrer que le prix forward d'un contrat, sur un actif payant des flux dont la valeur actuelle est I, est égal à :

$$F_0 = (S_0 - I)\,\mathrm{e}^{rT} \tag{5.2}$$

Dans l'exemple S_0 = 900 ; I = 40 $\times$ $\mathrm{e}^{-0{,}03\times 4/12}$ = 39,60, r = 0,04 et T = 0,75 ; par conséquent :

$$F_0 = (900 - 39{,}60) \times \mathrm{e}^{0{,}04\times 0{,}75} = 886{,}60$$

Cela concorde, bien sûr, avec les calculs précédents. L'équation (5.2) s'applique à n'importe quel actif payant un flux intermédiaire connu.

Si $F_0 > (S_0 - I)\,\mathrm{e}^{rT}$, l'arbitragiste achète l'obligation en empruntant et vend le contrat forward. Si $F_0 < (S_0 - I)\,\mathrm{e}^{rT}$, les investisseurs qui détiennent l'obligation trouveront profitable d'acheter le contrat et de vendre leur titre [4].

■ **Exemple 5.2** Considérons un forward à 10 mois sur une action cotée 50 €, qui paiera des dividendes égaux à 0,75 € par action dans trois, six et neuf mois. Le taux sans risque est de 8 % pour toutes les maturités. La valeur actuelle des dividendes est donc :

$$0{,}75 \times \left(\mathrm{e}^{-0{,}08\times\frac{1}{4}} + \mathrm{e}^{-0{,}08\times\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-0{,}08\times\frac{1}{4}}\right) = 2{,}162\ €$$

Comme T = 10 mois, le prix forward est égal à (voir équation (5.2)) :

$$F_0 = (50 - 2{,}162)\,\mathrm{e}^{0{,}08\times\frac{10}{12}} = 51{,}14\ €$$

Si le prix forward était plus faible, un arbitragiste vendrait le titre et achèterait le forward. Si, au contraire, F_0 était plus élevé, l'arbitragiste vendrait le contrat et achèterait l'actif.

5.6 Cas d'un actif à rendement connu

Considérons maintenant le cas d'un actif qui paie un rendement continu au taux q plutôt qu'un flux à une date donnée. Cela signifie que le flux intermédiaire est exprimé en pourcentage du prix de l'actif au moment où ce revenu est payé. Si on s'attend à un rendement de 5 % par an, le flux peut être payé en une seule fois et dans ce cas représente 5 % du cours au moment du paiement, ou en deux fois et c'est une composition semestrielle qui est adoptée pour obtenir les 5 %. À la section 4.4, nous avons expliqué que les taux sont le plus souvent mesurés en continu ; dans ces conditions, on utilisera aussi un taux continu, noté q, pour les flux intermédiaires d'un actif financier. Les formules permettant de passer d'un taux mesuré avec une fréquence de composition donnée à une autre fréquence ont été données à la section 4.4.

On peut montrer (voir problème 5.20) que :

$$F_0 = S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T} \tag{5.3}$$

■ **Exemple 5.3** Considérons un contrat forward à 6 mois sur un actif procurant un seul revenu de 2 % du prix de l'actif sur la période de six mois. Le taux sans risque continu est de 10 % par an. Le prix de l'actif est 25 € ; on a donc $S_0 = 25$; $r = 0{,}1$ et $T = 0{,}5$. Le taux de rendement est ainsi de 4 % sur l'année, composé semestriellement, ce qui correspond à un taux continu de 3,96 % (équation (4.3)). Le prix forward est alors donné par :

$$F_0 = 25 \times \mathrm{e}^{(0{,}1-0{,}0396)\times 0{,}5} = 25{,}77\ €$$

4. Une autre façon de montrer que l'équation (5.2) est correcte consiste à acheter une unité de l'actif et à vendre le forward. Le coût S_0 est connu et engendrera un flux F_0 en T ainsi que des flux intermédiaires de valeur actuelle I. Par conséquent, le décaissement initial S_0 doit être égal à la valeur actuelle des encaissements, c'est-à-dire $I + F_0\,\mathrm{e}^{-rT}$. On a donc $F_0 = (S_0 - I)\,\mathrm{e}^{rT}$.

5.7 L'évaluation des contrats forward

La valeur d'un contrat forward est toujours nulle au moment où il est créé. Il peut ensuite avoir une valeur positive ou négative. Il est important pour les banques et les institutions financières de connaître la valeur des contrats chaque jour (on évoque alors le *marking to market* des contrats). En utilisant les notations précédentes, F_0 est le prix forward aujourd'hui, T est la durée de vie résiduelle du contrat, K est le prix de livraison et r désigne le taux sans risque.

Notons aussi f : valeur du contrat forward aujourd'hui.

Il est important d'être clair sur la signification des variables F_0, K et f. Si la date d'aujourd'hui est celle de la négociation du contrat, le prix de livraison K est aussi le prix forward F_0. La valeur du contrat f est nulle à cette date. Quand le temps s'écoule, K reste constant (c'est une caractéristique juridique définissant le contrat) mais F_0 change en fonction de l'offre et de la demande. De même, f peut devenir positif ou négatif.

On peut montrer, pour tous les contrats forward portant aussi bien sur des actifs d'investissement que sur des actifs de consommation, que :

$$f = (F_0 - K)\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{5.4}$$

Pour comprendre pourquoi la relation (5.4) est correcte, il suffit de comparer un contrat avec un prix de livraison F_0 à un contrat dont le prix de livraison est K. La seule chose qui change entre les deux est la différence des flux payés en date T pour obtenir le sous-jacent. Le décaissement (nous supposons une position longue) sera F_0 pour le détenteur du premier contrat et K pour celui du second. La valeur actuelle de cette différence est $(F_0 - K)\,\mathrm{e}^{-rT}$. Le premier contrat a donc moins de valeur que le second si $F_0 > K$. Comme par définition le premier contrat a une valeur nulle, le second vaut $(F_0 - K)\,\mathrm{e}^{-rT}$.

De la même façon, la valeur d'une position courte sur un contrat dont le prix de livraison est K est égale à :

$$(K - F_0)\,\mathrm{e}^{-rT}$$

■ **Exemple 5.4** Une position longue sur un forward sur action a été prise par un investisseur il y a quelques mois. Il reste six mois avant l'échéance. Le taux sans risque est 10 %, l'action cote 25 € et le prix de livraison est 24 €. On a donc $S_0 = 25$, $r = 0{,}1$, $T = 0{,}5$ et $K = 24$. De l'équation (5.1), on déduit :

$$F_0 = 25 \times \mathrm{e}^{0{,}1 \times 0{,}5} = 26{,}28\ €$$

Et l'équation (5.4) donne la valeur du forward :

$$f = (26{,}28 - 24)\,\mathrm{e}^{-0{,}1 \times 0{,}5} = 2{,}17\ €$$

L'équation (5.4) montre que l'on peut évaluer une position longue sur un forward en supposant que le prix de l'actif à la maturité du contrat sera égal à F_0. En effet, quand on fait cette hypothèse, il s'ensuit que le flux de date T sera $F_0 - K$, dont la valeur

actuelle est $(F_0 - K)\,\mathrm{e}^{-rT}$. Il s'agit de la valeur de f dans l'équation (5.4). Le même raisonnement s'applique pour une position courte.

En utilisant conjointement (5.4) et (5.1), on peut écrire :

$$f = S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{5.5}$$

De même, quand l'actif paie des flux intermédiaires de valeur actuelle I, l'équation (5.4) combinée avec l'équation (5.2) donne :

$$f = S_0 - I - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{5.6}$$

Enfin, quand l'actif a un rendement q, en combinant (5.4) et (5.3), on obtient :

$$f = S_0\,\mathrm{e}^{-qT} - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{5.7}$$

Quand un prix futures évolue, le gain ou la perte sur le contrat est calculé en multipliant cette variation par le volume de la position. Les gains ou pertes sont réalisés presque immédiatement du fait du système des appels de marge. L'équation (5.4) montre que, quand un prix forward change, le gain ou la perte est la valeur actuelle de cette variation. Cette différence de mode de calcul entre forward et futures peut parfois prêter à confusion (voir encadré 5.2).

Encadré 5.2 Une erreur d'informatique ?

Un trader travaillant sur le marché des changes prend une position longue sur un forward à 3 mois portant sur 1 million de livres sterling au taux de 1,5000. Au même moment, un autre trader prend une position du même type sur des contrats futures (16 contrats portant chacun sur 62 500 $). Quelques minutes plus tard, les taux de change futures et forward sont passés à 1,5040. Le système informatique de la banque enregistre un profit de 4 000 $ sur le contrat futures et de 3 900 $ sur le contrat forward. Le trader du contrat forward se plaint auprès des services informatiques en évoquant une erreur d'enregistrement. A-t-il raison de se plaindre ?

La réponse est non ! Le *marking to market* quotidien des contrats futures fait que le gain de 4 000 $ est enregistré immédiatement. En revanche, si le trader souhaite réaliser son profit, il doit prendre une position courte sur le même contrat, avec un prix forward de 1,5040 et un horizon de 3 mois. Le profit de 4 000 $ est alors assuré, mais dans trois mois seulement. Le profit réel aujourd'hui est en fait la valeur actuelle de ces 4 000 $. Cette remarque est cohérente avec l'équation (5.4).

Le trader de contrats forward peut cependant se consoler en notant que le traitement est identique pour les pertes. Si les taux de change futures et forward étaient passés à 1,4960, il n'aurait perdu que 3 900 $ alors que son collègue du marché futures aurait perdu 4 000 $.

5.8 Les prix forward sont-ils égaux aux prix futures ?

L'égalité des prix forward et futures est vérifiée sous certaines conditions. La note technique n° 24 sur le site de l'éditeur développe le raisonnement d'arbitrage montrant que, si le taux sans risque est constant et indépendant de la maturité, prix forward et prix futures sont identiques pour des contrats de même maturité. Ce résultat peut être étendu au cas où le taux sans risque est une fonction déterministe du temps.

Quand les taux varient de façon aléatoire, il n'y a plus, d'un point de vue théorique, de raison pour que les deux prix soient égaux. On peut en avoir une intuition en examinant le cas où le prix de l'actif S est fortement corrélé positivement au taux sans risque. Quand S augmente, un investisseur qui détient une position longue sur un futures réalise un gain immédiat par le système d'appels de marge. La corrélation positive indique que le taux d'intérêt a aussi probablement augmenté. Le gain réalisé est donc placé à un taux plus élevé. De la même façon, quand S diminue, l'investisseur subit une perte immédiate car il est appelé en marge. Mais cette marge supplémentaire sera probablement financée à un taux plus faible. En revanche, un investisseur qui détient une position sur un contrat forward n'est pas affecté par les variations de taux. Dans l'exemple ci-dessus, le contrat futures est plus attractif que le contrat forward, par conséquent le prix futures devrait être supérieur au prix forward. Quand S est négativement corrélé avec les taux d'intérêt, un argument analogue montre que le prix forward devrait être plus élevé que le prix futures.

Quand l'échéance est proche, la différence entre les deux prix est suffisamment faible pour pouvoir être ignorée, du moins sur le plan théorique. En pratique, de nombreux facteurs non pris en compte dans les modèles théoriques peuvent engendrer des écarts de prix. Ce sont par exemple la fiscalité, les coûts de transaction ou les procédures d'appels de marge. Le risque de défaut de la contrepartie est moindre sur les contrats futures, à cause du rôle joué par la chambre de compensation. De plus, les contrats futures sont souvent plus liquides et donc plus faciles à échanger que les contrats forward.

En dépit de ces éléments, il est, dans la plupart des cas, raisonnable de supposer l'égalité des deux prix, forward et futures. C'est l'hypothèse que nous ferons le plus souvent dans ce livre. Nous noterons donc indifféremment F_0 le prix forward et le prix futures d'un actif aujourd'hui.

Les différences entre les deux prix augmentent avec la durée de vie des contrats et sont susceptibles de devenir significatives. Il est dans ce cas dangereux de supposer que les deux types de contrats sont parfaitement substituables. Cette remarque est notamment pertinente pour les contrats futures sur eurodollars parce que leur durée de vie peut atteindre dix ans. Nous étudierons ces contrats à la section 6.3.

5.9 Les prix futures des contrats sur indices

Les contrats futures sur indices ont été introduits à la section 3.5 ; nous avons montré leur utilisation pour la couverture d'un portefeuille d'actions. Le tableau 3.3 donnait les cotations de futures sur indices pour différents contrats. Nous pouvons maintenant chercher à comprendre comment se forment ces prix futures.

Un indice peut être analysé comme un actif d'investissement qui paie des dividendes [5]. L'actif d'investissement est le portefeuille d'actions qui constitue l'indice, et les dividendes sont ceux qui seraient reçus par le détenteur d'un tel portefeuille. Si l'on suppose, comme nous l'avons déjà fait, que les dividendes sont payés en continu à un taux q plutôt qu'à une ou plusieurs dates précises, le prix futures du contrat, F_0, s'écrit :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{(r-q)\,T} \tag{5.8}$$

Dans le tableau 3.3, vous pouvez noter que le prix futures du contrat S&P500 pour l'échéance décembre est inférieur de 0,7 % à celui de l'échéance juin. Cela indique qu'à cette date, le taux sans risque r était inférieur au taux de dividende estimé sur l'indice d'environ 1,4 % par an.

■ **Exemple 5.5** Considérons un contrat futures à 3 mois sur le CAC 40 et supposons que les titres composant le portefeuille paient un rendement en dividende de 1 %, en base annuelle, et que l'indice soit à 4 000. Le taux sans risque est de 6 %. Dans ce cas, $S_0 = 4\,000$, $r = 0{,}06$, $T = 0{,}25$ et $q = 0{,}01$. Le prix futures est alors :

$$F_0 = 4\,000 \, \mathrm{e}^{(0{,}06-0{,}01)\times 0{,}25} = 4\,050{,}3$$

En pratique, le rendement en dividende de l'indice varie de semaine en semaine. Par exemple, les actions composant l'indice CAC 40 paient leurs dividendes entre mai et août, avec une concentration plus importante en juin-juillet. Par conséquent, le taux q retenu doit être ajusté pour tenir compte de ces spécificités. Cette concentration des dividendes sur certains mois apparaît dans les cotations. Par exemple, si le 4 février 2019, les prix futures du contrat CAC40 pour les échéances mars, avril et juin sont respectivement de 4 048, 4 049 et 3 938, la différence entre les deux dernières cotations provient des paiements de dividendes attendus en mai et juin.

Encadré 5.3 Le contrat futures sur l'indice Nikkei

Les arguments de ce chapitre concernant la détermination des prix futures s'appliquent à des contrats dont les sous-jacents sont des actifs échangés sur les marchés. C'est pourquoi l'équation (5.8) ne s'applique pas au contrat futures sur l'indice Nikkei 225 coté sur le CME. La raison est assez subtile. Alors que S mesure la valeur de l'indice en yens, la variable sous-jacente au contrat futures sur cet indice, coté sur le CME, est égale à $5 \times S$, mais où S est en dollars US. En d'autres termes, le contrat considère un sous-jacent mesuré en yens, mais le traite comme s'il s'agissait de dollars US. Il n'est alors pas possible d'investir dans un portefeuille dont la valeur est constamment $5S$ dollars US. Le mieux que l'on puisse faire est d'avoir un portefeuille qui vaut toujours $5S$ yens, ou $5QS$ dollars US si Q est le taux de change

5. Il arrive cependant que ce ne soit pas le cas, comme l'illustre l'encadré 5.3.

entre les deux devises. Le raisonnement d'arbitrage utilisé jusqu'ici suppose que le sous-jacent du contrat futures peut toujours être échangé. Cela n'est pas tout à fait vrai pour le contrat Nikkei 225, qui est un exemple de « quanto ». Il s'agit de contrats dérivés tels que le sous-jacent est mesuré dans une devise et les flux engendrés par l'actif dérivé sont exprimés dans une autre devise. Les quantos sont étudiés au chapitre 30.

L'arbitrage sur indices

Si $F_0 > S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$, on peut réaliser un profit en achetant au comptant les actions composant l'indice et en vendant le contrat futures. Si $F_0 < S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$, il faut adopter la stratégie symétrique. Ces stratégies sont appelées « arbitrage sur indice » Quand $F_0 < S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$, l'arbitrage peut être monté par un fonds de pension qui possède un portefeuille répliquant l'indice. Le plus souvent, l'arbitrage sur indice est opéré à partir d'un système de *program trading*, qui émet les ordres de manière automatique.

Quand l'indice comporte un grand nombre de titres, la stratégie d'arbitrage peut être construite en traitant un portefeuille composé d'un sous-ensemble des titres de l'indice et reflétant au mieux les variations de l'indice.

La plupart du temps, les activités des arbitragistes entraînent que l'équation (5.8) est vérifiée, mais il peut arriver, en des circonstances inhabituelles, que l'arbitrage soit impossible à mettre en œuvre (voir encadré 5.4).

Encadré 5.4 L'arbitrage sur indices en octobre 1987

L'arbitrage sur indice suppose de pouvoir opérer simultanément sur le contrat futures et sur les actions composant l'indice. Dans des conditions normales de marché, on utilise le *program trading*, et F_0 est alors proche de $S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$. Les 19 et 20 octobre 1987 sont deux exemples de jours où les conditions de marché étaient tout sauf normales.

Le « lundi noir » du 19 octobre 1987, le marché de New York a chuté de plus de 20 % et le volume de transactions de 604 millions de titres a battu tous les records précédents. Le système informatique était surchargé et il pouvait s'écouler plus de deux heures entre le passage d'un ordre et son exécution. Pendant une grande partie de la journée, les prix futures étaient inférieurs à la valeur de l'indice. Par exemple, le S&P500 a clôturé à 225,06 (une baisse de 57,88 points dans la journée) alors que le prix futures échéance décembre valait 201,50 (une chute de 80,75 points dans la journée). Mais à cause des délais d'exécution, l'opportunité d'arbitrage était impossible à exploiter. Le jour suivant, les autorités de marché ont imposé des restrictions temporaires sur l'utilisation du *program trading*. Celles-ci rendaient l'arbitrage sur indice très difficile et l'écart entre les deux marchés a persisté. Jusqu'au point où

l'écart entre le prix futures et l'indice au comptant a atteint 18 %. Le marché est revenu quelques jours plus tard à des conditions normales, c'est-à-dire à des conditions dans lesquelles les activités des arbitragistes assurent que l'équation (5.8) est vérifiée.

5.10 Les contrats futures et forward sur devises

L'actif sous-jacent de ces contrats est une certaine quantité de devises. On posera, pour simplifier, S_0 le prix en dollars US d'une unité de devise étrangère (pour un Américain) et F_0 le prix forward correspondant. Cependant, comme nous l'avons mentionné à la section 2.9, ce n'est pas toujours de cette façon que les devises sont cotées. Par exemple, en France, on dira que le dollar US cote 1,15 contre l'euro pour signifier qu'il faut 1,15 $ pour acheter un euro (mais dans ce cas, c'est le nombre d'unités de devise étrangère pour une unité de devise domestique). Une devise a une propriété particulière : son détenteur peut la placer au taux sans risque du pays d'origine. Par exemple, un Français disposant de dollars US peut acheter des obligations du Trésor américain.

On notera donc r_f le taux sans risque du pays étranger correspondant à la devise. r désigne toujours le taux sans risque domestique. La relation entre F_0 et S_0 est alors :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{\left(r - r_f\right) T} \tag{5.9}$$

C'est la relation de parité des taux d'intérêt bien connue en finance internationale. Le graphique 5.1 montre pourquoi elle doit être vérifiée. Supposez qu'un investisseur détienne 1 000 unités d'une devise étrangère. Il y a deux façons de convertir cette somme en euros à la date T. Il peut tout d'abord investir ses 1 000 unités au taux sans risque r_f jusqu'en T et prendre une position courte sur un contrat forward lui permettant de vendre ses devises contre des euros en T. Il obtient dans ce cas $1\,000\mathrm{e}^{r_f T} F_0$ euros. La seconde possibilité est d'échanger immédiatement les devises en euros et de placer au taux euro r la somme obtenue. Au final, l'investisseur obtient $1\,000 S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$. En l'absence d'opportunités d'arbitrage on doit avoir :

$$1\,000 \, \mathrm{e}^{r_f T} \, F_0 = 1\,000 \, S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$$

de sorte que :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{\left(r - r_f\right) T}$$

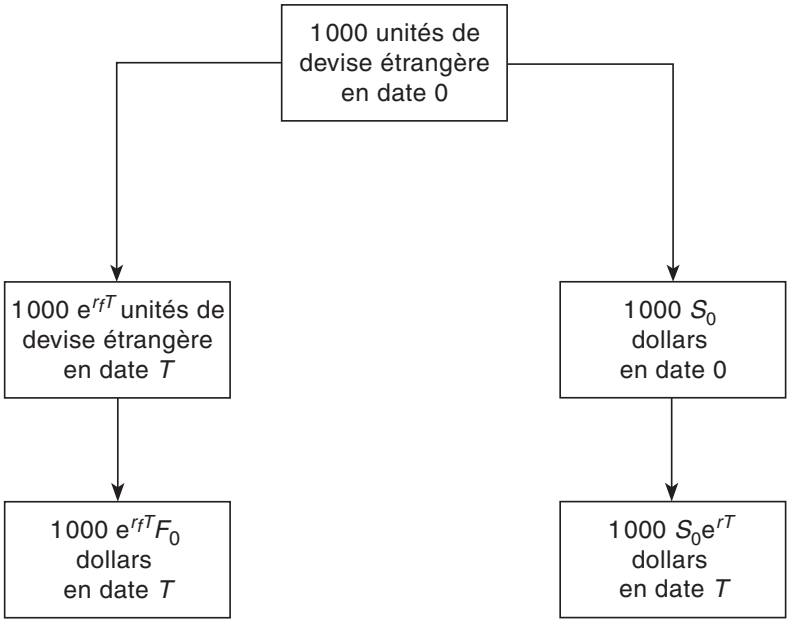
■ **Exemple 5.6** Supposons que les taux sans risque à 2 ans en France (r_f) et aux États-Unis (r) soient respectivement de 5 % et 3 % et que le taux de change euro contre dollar US soit de 1,10 $/€. De l'équation (5.9), on déduit :

$$1{,}1 \times \mathrm{e}^{(0{,}03 - 0{,}05) \times 2} = 1{,}057$$

Supposons que le taux de change forward soit à 1,04 ; un arbitragiste peut alors :

1. Emprunter 1 000 € au taux de 5 % par an pour 2 ans (ce qui implique un remboursement de $1\,000 \times \mathrm{e}^{0,05\times 2} = 1105{,}17$ € dans deux ans), les convertir en 1 100 $ et les placer à 3 % ;
2. Prendre une position longue sur un contrat forward pour 1 105,17 € au taux de 1,04, ce qui correspond à 1 149,37 $.

Les 1 100 $ sont investis à 3 % sur 2 ans et rapporteront 1 168,02 $. Sur ceux-ci, 1 149,37 $ seront utilisés pour acquérir 1 105,17 €, selon les termes du contrat forward. Ils permettront de rembourser l'emprunt. La stratégie donne donc lieu à un profit de $1\,168{,}02 - 1\,149{,}37 = 18{,}65$ $. Si le prix forward était par exemple à 1,08 $/€, une stratégie symétrique (emprunt de dollars US, vente d'un forward) permettrait de profiter de l'opportunité d'arbitrage.


1 000 unités de devise étrangère en date 0
1 000 $e^{r_f T}$ unités de devise étrangère en date T
1 000 S_0 dollars en date 0
1 000 $e^{r_f T} F_0$ dollars en date T
1 000 $S_0 e^{rT}$ dollars en date T

Graphique 5.1 : Deux façons de convertir 1 000 unités d'une devise en dollars US à la date T. S_0 est le taux de change spot, F_0 est le taux de change forward et r et r_f sont les taux d'intérêt domestique et étranger.

Le tableau 5.4 montre les cotations des futures sur devises le 3 mai 2016. La cotation est en nombre de dollars US par unité de devise étrangère (pour la devise japonaise, c'est un nombre de dollars US pour 100 yens et, pour la devise mexicaine, c'est le nombre de dollars US pour 10 pesos). C'est la convention habituelle pour les contrats futures. L'équation (5.9) s'applique alors avec le taux américain comme taux domestique.

À cette date, les taux japonais, suisses et euros étaient plus faibles que le taux US. Cela explique pourquoi les taux de change futures augmentent avec la maturité ($r > r_f$). En ce qui concerne le dollar canadien, le dollar australien et la livre sterling, c'est la situation symétrique qui est observée. Les taux de change futures sont décroissants avec la maturité.

Lorsque le taux étranger est plus élevé que le taux domestique ($r_f > r$), l'équation (5.9) indique que $F_0 < S_0$ et que F_0 est d'autant plus faible que la maturité est éloignée. Par

conséquent, la relation entre maturité et prix futures dépend de la façon dont est cotée la devise. Si, aux États-Unis, l'euro est coté en nombre de dollars US par euro, alors que le dollar en France est aussi coté en nombre de dollars US par euro, la différence $r - r_f$ n'a pas le même signe dans les deux pays.

Tableau 5.4 : Exemple de cotations de contrats futures sur devises le 3 mai 2016 (les colonnes indiquent : mois d'échéance, cours d'ouverture, plus haut, plus bas, compensation, dernier cours traité, variation par rapport à la veille, volume échangé)

	Ouverture	Plus haut	Plus bas	Compens. veille	Dernier cours	Variation	Volume
Dollar australien, 100 000 $ australiens, dollars US par dollars australiens (CME Group)							
Juin 2016	0,7651	0,7708	0,7477	0,7642	0,7479	− 0,0163	163 519
Sept. 2016	0,7628	0,7670	0,7451	0,7613	0,7451	− 0,0162	316
Livre sterling, 62 500 £, dollars US par livres sterling (CME Group)							
Juin 2016	1,4671	1,4771	1,4533	1,4668	1,4552	− 0,0116	117 683
Sept. 2016	1,4682	1,4767	1,4548	1,4674	1,4563	− 0,0111	108
Dollar canadien, 100 000 $ canadiens, dollars US par dollars canadiens (CME Group)							
Juin 2016	0,7978	0,8025	0,7870	0,7969	0,7870	− 0,0099	84 828
Sept. 2016	0,7980	0,8018	0,7874	0,7969	0,7888	− 0,0081	413
Déc. 2016	0,7980	0,7980	0,7875	0,7970	0,7875	− 0,0095	137
Euro, 125 000 €, dollars US par euros (CME Group)							
Juin 2016	1,1542	1,1630	1,1514	1,1537	1,1534	−0,00025	217 744
Sept, 2016	1,1585	1,1665	1,1554	1,1573	1,1575	+0,00020	744
Déc. 2016	1,1650	1,1700	1,1597	1,1613	1,1616	+0,00025	96
Yen, 12 500 000 ¥, dollars US par 100 yens (CME Group)							
Juin 2016	0,9406	0,9483	0,9401	0,9401	0,9417	+ 0,0016	100 707
Sept. 2016	0,9452	0,9509	0,9441	0,9432	0,9457	+ 0,0025	158
Swiss Franc, 125 000 francs suisses, dollars US par franc suisse (CME Group)							
Juin 2016	1,0489	1,0607	1,0485	1,0492	1,0506	+ 0,0014	29 070
Sept. 2016	1,0543	1,0650	1,0543	1,0540	1,0563	+ 0,0023	105

■ **Exemple 5.7** Dans le tableau 5.4, le prix futures du dollar australien d'échéance septembre est de 0,4 % inférieur à celui de l'échéance juin, ce qui représente approximativement un écart de 1,6 % pour deux maturités distantes d'un an. L'équation (5.9) nous permet donc d'estimer de combien le taux court australien dépasse le taux court US en mai 2016.

Une devise vue comme un actif rapportant un rendement connu

L'équation (5.9) est analogue à l'équation (5.3), si l'on remplace q par r_f. Ce n'est pas une coïncidence. Une devise, le dollar US pour un investisseur français par exemple, peut être vue comme un actif dont le rendement est le taux sans risque US.

Supposons qu'un investisseur français achète 1 million de dollars US, alors que le taux d'intérêt français est à 5 % et le taux US à 3 %. L'investisseur va obtenir 30 000 $ d'intérêts pour l'année. La valeur de ces intérêts en euros dépendra du taux de change dans un an. Si le taux de change est de 1 $ pour 1 €, ces intérêts valent 30 000 €. L'intérêt de 3 % représente donc bien un taux de rendement connu pour l'investisseur français sur un investissement en dollars US.

5.11 Les contrats futures sur matières premières

Nous allons analyser tout d'abord l'influence des coûts de stockage sur les prix futures des matières premières, qui sont des actifs d'investissement, comme l'or ou l'argent [6]. Nous supposons que ces actifs n'engendrent pas de revenus intermédiaires.

Les coûts de stockage

Comme nous l'avons montré dans l'encadré 3.1, les stratégies de couverture des producteurs d'or conduisent les banques à emprunter de l'or. Les détenteurs d'or, comme les banques centrales, facturent un taux d'intérêt pour ces prêts. C'est vrai aussi en ce qui concerne l'argent. En conséquence, la détention d'or ou d'argent est génératrice de revenus.

L'équation (5.1) donne la relation entre prix forward et prix au comptant en l'absence de coûts de stockage :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{rT} \tag{5.10}$$

Les coûts de stockage peuvent être interprétés comme des revenus négatifs dus à la détention de l'actif. Si U désigne la valeur actuelle de ces coûts, on peut écrire, en utilisant l'équation (5.2) :

$$F_0 = (S_0 + U) \, \mathrm{e}^{rT} \tag{5.11}$$

■ **Exemple 5.8** Considérons un contrat futures à un an sur un actif d'investissement ; le coût de stockage est de 2 $ par unité et par an, ce coût étant réglé en fin d'année. Le taux sans risque est 7 % et le prix spot du sous-jacent au contrat est de 450 $. On a alors :

$$U = 2 \times \mathrm{e}^{-0{,}07 \times 1} = 1{,}865 \text{ \$}$$

On déduit de l'équation (5.1) :

$$F_0 = (450 + 1{,}865) \, \mathrm{e}^{0{,}07 \times 1} = 484{,}63 \text{ \$}$$

Si $F_0 > 484{,}63$ $, un arbitragiste achète le sous-jacent et vend le contrat futures pour s'assurer un profit. Si l'inégalité est inversée, un investisseur qui détient déjà le sous-jacent le vend et achète le contrat futures pour dégager un profit d'arbitrage.

6. Rappelons qu'un actif peut être « d'investissement » même si ce n'est pas son seul usage. Il suffit qu'il soit détenu en tant que tel par un nombre suffisant d'investisseurs, éventuellement prêts à le vendre et à acheter des contrats forward si cette stratégie est profitable.

Si les coûts de stockage sont considérés comme proportionnels au prix de l'actif, ils peuvent être analysés comme un taux de rendement négatif. Dans ce cas, l'équation (5.3) implique :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{(r+u)\,T} \tag{5.12}$$

où u est le coût de stockage annuel en pourcentage du prix au comptant.

Les matières premières, actifs de consommation

Certaines matières premières sont essentiellement des actifs de consommation et les arguments d'arbitrage doivent être maniés avec prudence. Si, au lieu de l'équation (5.11), on observe :

$$F_0 > (S_0 + U) \, \mathrm{e}^{rT} \tag{5.13}$$

Un arbitragiste peut alors :

1. Emprunter $(S_0 + U)$ au taux sans risque pour acheter l'actif et payer les coûts de stockage ;
2. Prendre une position courte sur un forward.

Si un contrat futures est analysé comme un forward, cette opération engendre un profit $F_0 - (S_0 + U) \, \mathrm{e}^{rT}$ à la date T. Cette stratégie ne pose aucune difficulté. Les prix vont donc s'ajuster sous la pression de l'offre et de la demande jusqu'à ce que l'égalité soit rétablie.

Supposons maintenant que :

$$F_0 < (S_0 + U) \, \mathrm{e}^{rT} \tag{5.14}$$

Pour les matières premières ou marchandises qui ne jouent pas le rôle d'actifs d'investissement, le raisonnement d'arbitrage ne tient plus. En effet, les entreprises qui utilisent cette matière première ou cette marchandise dans leur activité ne seront pas prêtes à vendre leurs stocks pour réaliser l'arbitrage, simplement parce que les contrats forward qui seraient achetés ne permettent pas de continuer la production, contrairement à l'actif sous-jacent. Par conséquent, pour ce type d'actif, on a simplement la relation :

$$F_0 \leq (S_0 + U) \, \mathrm{e}^{rT} \tag{5.15}$$

De même, si les coûts de stockage sont exprimés par un taux u, on a :

$$F_0 \leq S_0 \, \mathrm{e}^{(r+u)\,T} \tag{5.16}$$

Le rendement d'opportunité (*convenience yield)*

Les inégalités (5.15) et (5.16) montrent que la détention d'une matière première procure des avantages que ne donnent pas les forward ou futures. Une raffinerie de pétrole ne considérera pas de la même façon le pétrole brut et un contrat futures sur ce pétrole. Le stockage permet en effet la poursuite du processus de production et protège, dans une certaine mesure, contre les pénuries. Cet avantage lié à la détention de la matière première est appelé « rendement d'opportunité » (*convenience yield*) et est noté y. Si U désigne toujours la valeur actuelle des coûts de stockage, y vérifie :

$$F_0 \, \mathrm{e}^{yT} = (S_0 + U) \, \mathrm{e}^{r\,T}$$

Si le coût de stockage est exprimé en pourcentage du prix spot (u), on a :

$$F_0 \, \mathrm{e}^{yT} = S_0 \, \mathrm{e}^{(r+u)\,T}$$

ou encore :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{(r+u-y)\,T} \tag{5.17}$$

où y mesure en quelque sorte l'écart entre les deux membres des inégalités (5.15) et (5.16). Pour les actifs d'investissement, y = 0, sinon il existe des opportunités d'arbitrage. Un rendement d'opportunité important se traduit sur les cotations par un prix futures décroissant avec la maturité, c'est-à-dire $r + u - y < 0$. Le tableau 2.2 du chapitre 2 montrait que le 3 mai 2016, le prix futures du bétail vivant était décroissant entre les maturités juin 2016 et avril 2017. Cela suggère que sur cet horizon, le rendement d'opportunité est supérieur à $r + u$.

Le rendement d'opportunité y reflète en fait les anticipations des opérateurs quant à la disponibilité future de l'actif. Si une pénurie menace, y peut être très élevé car la détention de l'actif procure une protection contre cette possibilité de pénurie. À l'inverse, lorsque les stocks (au niveau global de l'économie) sont très importants, y est proche de 0.

5.12 Le coût de portage

La relation entre prix spot, prix forward et prix futures peut être résumée par la notion de coût de portage, noté c. Il mesure le coût de stockage plus le coût de financement de l'actif moins le revenu engendré par cet actif.

Pour une action ne payant pas de dividende, $c = r$, puisqu'il n'y a ni coût de stockage ni revenus ; pour un indice $c = r - q$ et pour une marchandise ou une matière première qui engendre un coût de stockage proportionnel u, $c = r + u$.

De manière générale, on écrira donc, pour un actif d'investissement :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{c\,T} \tag{5.18}$$

et pour un actif de consommation :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{(c-y)\,T} \tag{5.19}$$

où y est le rendement d'opportunité.

5.13 Les options de livraison

Un contrat forward spécifie la date et le lieu de livraison, alors qu'un contrat futures laisse en général une marge de manœuvre au vendeur du contrat, qui peut choisir une date à l'intérieur d'une période donnée. Cette possibilité complique la détermination du prix futures. Doit-on retenir le début, le milieu ou la fin de la période de livraison ? Même si une grande majorité des contrats est débouclée avant l'échéance, il est important, sur le plan théorique, de préciser ce point.

Si le prix futures est une fonction croissante de la maturité, c'est-à-dire $c > y$ dans l'équation (5.19), il est préférable pour le vendeur de livrer au plus tôt, puisque les intérêts reçus sur le placement de la somme encaissée sont supérieurs à l'avantage découlant de la détention de l'actif. Le prix futures doit alors être calculé en faisant l'hypothèse d'une livraison au plus tôt. À l'inverse, si $c < y$, il est préférable de livrer au plus tard et cette hypothèse sera retenue dans l'évaluation.

5.14 Prix futures et espérance du prix spot futur

Une question toute naturelle consiste à se demander si le prix futures F_0 est égal à l'espérance du prix spot à l'échéance. En d'autres termes, F_0 est-il un estimateur sans biais de S_T ? Supposons qu'en juin le prix futures du contrat sur le maïs d'échéance septembre soit de 450 cts par boisseau. Est-ce le prix futur attendu par le marché à la fin du mois de septembre ?

Comme nous l'avons illustré dans le graphique 2.1, le prix futures converge vers le prix spot à l'échéance. Si le prix futur attendu du maïs est inférieur à 450 cts, le marché devrait anticiper une baisse du prix futures, de sorte que les traders en position courte seraient gagnants et les traders en position longue perdants. Un raisonnement symétrique peut être fait si le prix futur attendu est supérieur à 450 cts.

Keynes et Hicks

John Maynard Keynes et John Hicks ont un raisonnement différent de celui qui vient d'être avancé. Selon eux, les opérateurs en couverture tendent à détenir des positions courtes, alors que les spéculateurs sont plutôt sur des positions longues. Par conséquent, les hedgers acceptent un prix futures moins élevé, puisque la vente de futures diminue leur risque global. À l'inverse, les spéculateurs exigent une prime pour assumer les risques, ils veulent donc un prix futures plus faible [7].

Risque et rentabilité

Une explication alternative peut être avancée en considérant la relation risque-rentabilité dans l'économie. En général, plus le risque d'un investissement est élevé, plus l'espérance de rentabilité exigée par l'investisseur est importante. Les lecteurs familiarisés (voir l'annexe du chapitre 3) avec le CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) ou MEDAF (modèle d'équilibre des actifs financiers) savent que le risque a une composante systématique et une composante non systématique (ou spécifique). Cette dernière peut être éliminée par diversification. À l'inverse, le risque systématique ne peut être supprimé ; il est lié à la corrélation entre l'actif considéré et le marché dans son ensemble. Un investisseur exige une rentabilité supplémentaire pour supporter plus de risque systématique, mais peut accepter une rentabilité moindre si son risque systématique diminue.

7. Voir J. M. Keynes, *A Treatise on Money*, MacMillan, London, 1930, et J. R. Hicks, *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford, 1939.

Le risque d'une position en contrats futures

Considérons un spéculateur prenant une position longue dans un contrat futures, parce qu'il anticipe une hausse du prix spot. On suppose que l'investisseur place au taux sans risque un montant égal à la valeur actuelle du prix futures.

Nous assimilons ici le contrat futures à un contrat forward. Le flux obtenu en T par le placement initial est utilisé pour acheter l'actif sous-jacent, selon les termes du contrat futures. Les flux de cette stratégie sont donc $-F_0\,\mathrm{e}^{-rT}$ à la date 0 et S_T à la date T. La valeur actuelle espérée de l'investissement s'écrit alors :

$$-F_0\,\mathrm{e}^{-rT} + E\left(S_T\right)\mathrm{e}^{-kT}$$

si k est le taux d'actualisation ajusté au risque pour cet investissement. Si tous les investissements sur le marché ont une valeur actuelle nette espérée nulle, on a :

$$F_0 = E\left(S_T\right)\mathrm{e}^{(r-k)\,T} \tag{5.20}$$

où k dépend du risque systématique de l'investissement. Si l'actif n'est pas corrélé avec le marché, le risque systématique est nul et $k = r$, d'où $F_0 = E(S_T)$. Si l'actif est corrélé positivement avec le marché, $k > r$ et donc $F_0 < E(S_T)$. L'inégalité est inversée en cas de corrélation négative.

Un exemple d'actif dont le risque systématique est positif est un indice d'actions. Les investisseurs exigeront en général une rentabilité espérée supérieure au taux sans risque. Si l'indice paie un taux de dividende q, la rentabilité en capital exigée par les investisseurs sera supérieure à $r - q$. L'équation (5.8) est alors cohérente avec l'existence d'un prix futures sous-évaluant le prix futur espéré.

Lorsque le rendement de l'actif sous-jacent est négativement corrélé au rendement du marché, on a $k < r$ et l'équation (5.20) indique que le prix futures est supérieur au prix spot futur espéré. Ces résultats sont résumés au tableau 5.5.

Tableau 5.5 : Relations entre prix futures et prix spot futur espéré

Actif sous-jacent	**Rendement espéré par rapport au taux sans risque**	**Relation entre *F* le prix futur espéré**
Pas de risque systématique	$k = r$	$F_0 = E(S_T)$
Risque systématique positif	$k > r$	$F_0 < E(S_T)$
Risque systématique négatif	$k < r$	$F_0 > E(S_T)$

Déport normal et contango

De manière générale, quand le prix futures est inférieur au prix spot futur espéré, on parle de *normal backwardation*. On appelle *contango* la situation symétrique. Il faut toutefois noter que ces expressions sont parfois utilisées dans la comparaison du prix futures et du prix spot, l'interprétation étant alors différente.

Résumé

Dans de nombreux cas, prix futures et prix forward peuvent être supposés égaux. En théorie, ils sont identiques quand les taux évoluent de manière déterministe. Il est judicieux de diviser les supports de contrats en actifs d'investissement et actifs de consommation.

Pour les actifs d'investissement, trois cas ont été envisagés :

1. L'actif ne procure pas de flux intermédiaire ;
2. L'actif procure un revenu connu, exprimé en unités monétaires ;
3. L'actif procure un rendement connu, exprimé en pourcentage du prix spot.

Les résultats sont résumés dans le tableau 5.6. Ils permettent d'obtenir les prix futures pour les contrats sur indices, sur devises ou sur matières premières, telles l'or ou l'argent. Les coûts de stockage sont interprétés comme des revenus négatifs. Pour les actifs de consommation, il n'est pas possible d'obtenir les prix futures à partir des prix au comptant. Le rendement d'opportunité apparaît alors. Il mesure l'importance qu'accordent les détenteurs de l'actif à sa possession, du fait des avantages qu'il procure par rapport à la détention d'un contrat futures. Ces avantages sont, par exemple, la sécurité en cas de pénurie ou l'assurance de pouvoir continuer un processus de production. Dans ce cas, seule une borne supérieure pour F_0 peut être obtenue.

Tableau 5.6 : Résultats pour un contrat futures d'échéance T sur un actif de prix initial S_0 avec un taux sans risque r

Actif	Prix forward/futures	Valeur d'un contrat à prix de livraison K
Pas de revenus	$S_0\,\mathrm{e}^{rT}$	$S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$
Revenus de valeur actuelle I	$(S_0 - I)\,\mathrm{e}^{rT}$	$S_0 - I - K\,\mathrm{e}^{-rT}$
Rendement au taux q	$S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$	$S_0\,\mathrm{e}^{-qT} - K\,\mathrm{e}^{-rT}$

Le concept de coût de portage désigne le coût de stockage plus le coût de financement moins les revenus de l'actif. Pour les actifs d'investissement, le prix futures F_0 est supérieur au prix spot à cause de ce coût de portage. Pour les actifs de consommation, $F_0 > S_0$ si la différence entre coût de portage et rendement d'opportunité est positive.

Dans le cadre du CAPM, la relation entre prix futures et prix espéré de l'actif à l'échéance dépend de la corrélation de l'actif avec le marché. Une corrélation positive tend à impliquer $F_0 < E(S_T)$, et une corrélation négative entraîne $F_0 > E(S_T)$. L'égalité est obtenue quand la corrélation est nulle.

Références complémentaires

Cox, J. C., J. E. Ingersoll et S. A. Ross, "The Relation between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, décembre 1981, 321-346.

Jarrow R. A. et G. S. Oldfield, "Forward Contracts and Futures Contracts", *Journal of Financial Economics*, 9, décembre 1981, 373-382.

Richard S. et M. Sundaresan, "A Continuous-Time Model of Forward and Futures Prices in a Multigood Economy", *Journal of Financial Economics*, 9, décembre 1981, 347-372.

Routledge B. R., D. J. Seppi et C. S. Spatt, "Equilibrium Forward Curves for Commodities", *Journal of Finance*, 55 (3), 2000, 1297-1338.

Problèmes et exercices

5.1 Expliquez le mécanisme de vente à découvert d'une action.

5.2 Quelle est la différence entre un prix forward et la valeur d'un contrat forward ?

5.3 Vous prenez une position longue sur un forward 6 mois portant sur une action ND quand l'action cote 30 €, et le taux sans risque continu est 12 % par an. Quel est le prix forward ?

5.4 Un indice vaut aujourd'hui 350. Le taux sans risque est 8 % et le rendement en dividende 4 %. Quel est le prix futures théorique pour $T = 4$ mois ?

5.5 Expliquez avec soin pourquoi le prix futures d'un contrat sur l'or peut être déduit du prix spot (et d'autres variables) et qu'une telle relation ne peut être établie pour le cuivre.

5.6 Expliquez les expressions « rendement d'opportunité » et « coût de portage ». Quelle relation peut-on établir entre prix futures, prix spot, rendement d'opportunité et coût de portage ?

5.7 Expliquez pourquoi une devise étrangère peut être traitée comme un actif procurant un taux de revenu connu.

5.8 Le prix futures d'un contrat sur indice est-il plus élevé ou plus faible que la valeur espérée de l'indice à l'échéance ? Justifiez votre réponse.

5.9 Une position longue sur un forward à un an sur une action ND est prise quand l'action cote 40 € et le taux sans risque est de 10 % (en continu).

- **a.** Quel est le prix forward et quelle est la valeur initiale du contrat ?
- **b.** Six mois plus tard, l'action cote 45 € et le taux sans risque est toujours 10 %. Quel est le prix forward et quelle est la valeur du contrat ?

5.10 Le taux sans risque est 7 % et le rendement en dividende d'un indice est 3,2 %. L'indice est à 150. Quel est le prix futures à 6 mois ?

5.11 Le taux sans risque continu est 9 % et le rendement en dividende d'un indice varie pendant l'année. En février, mai, août et novembre, des dividendes sont payés en taux annuel de 5 %. Dans les autres mois, le dividende est payé au taux de 2 %. Le 31 juillet, l'indice vaut 300. Quel est, à cette date, le prix futures d'un contrat ayant comme échéance le 31 décembre ?

5.12 Le taux sans risque continu est 10 % et le rendement en dividende d'un indice est 4 %. L'indice vaut 400 et le prix futures à 4 mois est 405. Quelles sont les opportunités d'arbitrage ?

5.13 Estimez la différence entre les taux d'intérêt à court terme au Japon et aux États-Unis le 3 mai 2016 en utilisant le tableau 5.4.

5.14 Les taux d'intérêt à deux mois en Suisse et en France sont respectivement 1 % et 2 %. Le taux de change franc suisse contre euro est 1,05 €/franc suisse. Le prix futures d'un contrat à deux mois est 1,05 €/franc suisse. Quelles sont les opportunités d'arbitrage ?

5.15 L'argent vaut 25 $ l'once. Les coûts de stockage sont de 0,24 $ par an, payables trimestriellement en début de période. Si le taux sans risque continu est de 5 %, quel est le prix futures d'un contrat à 9 mois ?

5.16 Soient F_1 et F_2 les prix futures de deux contrats sur la même matière première et d'échéances T_1 et T_2 où $T_2 > T_1$. Montrez que :

$$F_2 \leq F_1 \, \mathrm{e}^{r(T_2 - T_1)}$$

où r est le taux sans risque. On suppose que les coûts de stockage sont nuls et qu'un prix futures est assimilable à un prix forward.

5.17 Quand un décaissement futur, en devise étrangère, est couvert par un contrat forward, il n'y a plus de risque de change. Quand la couverture est faite avec un contrat futures, il reste un risque résiduel du fait du marking to market. Quelle est la nature de ce risque ?

En particulier, est-il préférable pour une entreprise de choisir un contrat futures quand :

a. la valeur de la devise étrangère chute rapidement pendant la vie du contrat ?

b. la valeur de la devise étrangère monte rapidement pendant la vie du contrat ?

c. la valeur de la devise étrangère monte d'abord, puis revient à sa valeur initiale ?

d. la valeur de la devise étrangère chute d'abord, puis revient à sa valeur initiale ?

On supposera que prix futures et prix forward sont identiques.

5.18 On dit parfois qu'un taux de change forward est un estimateur sans biais du taux de change au comptant à l'échéance du contrat. Dans quelles circonstances cette affirmation est-elle justifiée ?

5.19 Montrez que le taux de croissance du prix futures d'un contrat sur indice est égal à l'excès du taux de rentabilité de l'indice par rapport au taux sans risque. On supposera que le taux sans risque et le rendement en dividende sont constants.

5.20 Montrez que l'équation (5.3) est vérifiée en considérant un investissement dans l'actif avec une position courte sur un contrat futures. On suppose que les revenus procurés par l'actif sont réinvestis dans celui-ci. Utilisez un argument analogue à celui des notes de bas de page 2 et 4, et expliquez ce que ferait un arbitragiste si l'équation (5.3) n'était pas vérifiée.

5.21 Expliquez en détail ce qu'on entend par prix futur attendu pour une matière première donnée, à une date future fixée. Supposez que le prix futures du pétrole (Crude Oil) décroît avec la maturité au rythme de 2 % par an. Supposez de plus que les spéculateurs soient plutôt en position courte sur le contrat futures Crude Oil et les hedgers en position longue. Quelles sont les implications des arguments de Keynes et Hicks sur le prix futur attendu du pétrole ?

5.22 Le Value Line Index reflète les variations de valeur d'un portefeuille équi-pondéré de 1 600 actions. Jusqu'au 9 mars 1998, la variation journalière de l'indice était calculée comme une moyenne géométrique des variations des titres composant l'indice. Dans quels cas l'équation (5.8) établit-elle une relation correcte entre le prix futures et la valeur au comptant ? Si ce n'est pas le cas, cela entraîne-t-il une sous ou une surévaluation ?

5.23 Une entreprise américaine cherche à couvrir son risque de change par rapport au dollar australien en utilisant les contrats cotés au CME. On note r le taux sans risque américain pour toutes les maturités et r_f le taux australien correspondant. On suppose que ces taux sont constants et que l'entreprise utilise à la date t des contrats d'échéance $T > t$.

a. Montrez que le ratio de couverture optimal est égal à $\mathrm{e}^{(r_f - r)(T-t)}$.

b. Montrez que, si $T - t$ est de l'ordre de la journée, le ratio optimal est très proche de S_0/F_0, où S_0 est le prix spot en t et F_0 le prix futures à cette même date pour le contrat d'échéance T.

c. Montrez que l'entreprise peut utiliser le *marking to market* quotidien pour ajuster dans le temps son ratio de couverture, de façon qu'il soit toujours égal au rapport du prix spot et du prix futures, même quand la durée de couverture est supérieure à une journée.

5.24 Qu'entend-on par (a) un actif d'investissement et (b) un actif de consommation ? Pourquoi la distinction entre les deux est-elle importante pour la détermination des prix forward et futures ?

5.25 Quels sont les coûts de portage pour :

a. une action ne payant pas de dividende ?

b. un indice d'actions ?

c. une matière première qui supporte des coûts de stockage ?

d. une devise étrangère ?

Questions complémentaires

5.26 Au début de 2015, le taux de change entre le franc suisse et le dollar US était de 1,0404 (dollar par franc suisse). Les taux d'intérêt aux États-Unis et en Suisse étaient respectivement de 0,25 % et 0 % par an en composition continue. Le taux de change forward 3 mois était de 1,0300 (dollar par franc suisse). Existe-t-il une stratégie d'arbitrage ? Quelle serait votre réponse si le taux de change était de 1,0500 ?

5.27 Un indice est à 1 200. Le taux sans risque à 3 mois est de 3 % par an et le taux de dividende pour les trois prochains mois est de 1,2 % par an. Le taux sans risque à 6 mois est de 3,5 % et le taux de dividende pour les six prochains mois est de 1 %. Estimez les prix futures des contrats sur l'indice pour les échéances 3 mois et 6 mois. Tous les taux sont d'intérêt et de dividende sont des taux continus.

5.28 Le taux de change dollar US/euro est de 1,2000 $/€. Le taux de change forward à 6 mois est de 1,1950 $/€. Le taux US à 6 mois est de 1 % par an en composition continue. Quel est le taux euro pour ce même horizon de 6 mois ?

5.29 Le prix spot du baril de pétrole est de 80 $ et le coût de stockage est de 3 $ pour un an, payable en fin d'année. Le taux sans risque est de 5 % par an en composition continue. Donnez une borne supérieure pour le prix futures du pétrole à un an.

5.30 Deux dividendes de 1 € sont attendus dans 2 mois et dans 5 mois sur une action qui cote 50 €. Le taux sans risque continu est de 8 % par an. Un investisseur prend une position courte sur un forward à 6 mois sur cette action.

a. Quels sont le prix forward et la valeur initiale du contrat ?

b. Trois mois plus tard, l'action cote 48 € ; quels sont le prix forward et la valeur de la position de l'investisseur (le taux sans risque est inchangé) ?

5.31 Une banque propose à un client d'emprunter en cash à 11 % ou d'emprunter en or à 2 % (dans ce cas les intérêts sont payables en or). Le taux sans risque est de 9,25 % et les coûts de stockage de 0,5 % par an. Les taux des emprunts sont censés être composés annuellement alors que le taux sans risque et les coûts de stockage sont composés en continu. Aucun revenu n'est payé par l'or. Comparez les deux types d'emprunt. Faites les mêmes calculs si l'or engendre un revenu de 1,5 % par an.

5.32 Une firme ne sait pas exactement quand elle paiera ou recevra une somme en devises. Elle cherche à négocier avec sa banque un contrat forward qui spécifie une période de livraison (plutôt qu'une date) : l'entreprise se réserve le choix de la date exacte de livraison. En vous mettant à la place du banquier, comment feriez-vous pour évaluer le produit financier demandé par l'entreprise ?

5.33 Un investisseur détient de l'or en portefeuille. Il peut acheter de l'or à 1 250 $ l'once et en vendre à 1 249 $ l'once. Il peut aussi emprunter des fonds à 6 % et en placer à 5,5 % par an (ces taux sont exprimés en composition annuelle). Quel est l'intervalle de prix forward à 1 an compatible avec l'absence d'opportunités d'arbitrage ? Vous supposerez qu'il n'y a pas de bid-ask spread (c'est-à-dire pas d'écart entre taux offert et taux demandé) sur les prix forward.

5.34 Une entreprise négocie un contrat forward avec une banque pour vendre une devise au prix K_1 à la date T_1. Le taux de change en T_1 est égal à $S_1 > K_1$. L'entreprise demande à la banque de prolonger la position jusqu'à une date $T_2 > T_1$. La banque donne son accord en spécifiant un nouveau taux de change K_2. Comment K_2 est-il calculé ?

Chapitre 6

Les futures de taux d'intérêt

Jusqu'à présent, nous avons vu les contrats sur matières premières, sur indices et sur devises. Nous avons décrit leur fonctionnement, précisé comment ils sont utilisés pour la couverture, et aussi comment les évaluer. Nous allons, au cours de ce chapitre, analyser les contrats futures de taux d'intérêt.

Les contrats les plus échangés sont les contrats futures Eurodollar ainsi que ceux ayant pour sous-jacents les obligations d'État. De nombreux contrats construits sur les mêmes principes sont échangés à travers le monde.

Nous montrons aussi comment ces contrats de taux, utilisés conjointement avec les mesures de duration présentées au chapitre 4, peuvent être utilisés pour couvrir le risque de taux d'une entreprise ou d'une institution financière.

6.1 Conventions de décompte des jours et cotations

À titre préliminaire, définissons la façon dont les jours sont comptés sur les différents marchés de taux, ainsi que la manière dont sont cotés les obligations et autres instruments de taux.

Le décompte des jours

Les conventions en matière de décompte des jours permettent de savoir comment sont capitalisés les intérêts au cours du temps. On connaît le plus souvent l'intérêt sur une période de référence (par exemple sur la durée entre deux paiements de coupons d'obligation), mais il est nécessaire de pouvoir le calculer sur n'importe quelle période de temps. Les conventions de décompte des jours sont généralement exprimées sous la forme X/Y. Quand on calcule l'intérêt entre deux dates, X définit la façon de compter le nombre de jours entre ces deux dates et Y stipule la mesure du nombre total de jours dans la période de référence. L'intérêt est alors calculé sous la forme :

$$\frac{\text{Nombre de jours entre les deux dates}}{\text{Nombre de jours de la période de référence}} \times \text{Intérêts sur une période de référence}$$

Les trois conventions les plus courantes sont :

1. Exact/Exact ;
2. 30/360 ;
3. Exact/360.

La convention Exact/Exact est utilisée pour les obligations d'État. Elle signifie que l'intérêt gagné entre deux dates est fondé sur le rapport du nombre de jours exact entre les deux dates et du nombre exact de jours de la période de référence. Si celle-ci est l'année, ce nombre sera 365 ou 366 ; s'il s'agit d'un semestre, le nombre de jours variera selon que le mois de février est ou non dans ce semestre et selon le nombre de mois de 31 jours. Par exemple, considérons une obligation britannique payant des coupons semestriels de 4 £ le 1er mars et le 1er septembre. On cherche à calculer le coupon couru entre le 1er mars et le 3 juillet. La période de référence est ici le semestre allant du 1er mars au 1er septembre, qui compte 184 jours, alors que 124 jours séparent nos deux dates. Le coupon couru entre le 1er mars et le 3 juillet sera donc :

$$\frac{124}{184} \times 4 = 2{,}6957$$

La convention 30/360 est utilisée pour les obligations du secteur privé (dites *corporate*) et pour les obligations municipales aux États-Unis. Cette référence suppose que tous les mois comptent 30 jours et que l'année en compte 360. Dans l'exemple précédent, si l'on calculait le coupon couru sur cette base, on obtiendrait :

$$\frac{122}{180} \times 4 = 2{,}7111$$

La convention 30/360 peut conduire à des résultats surprenants (voir encadré 6.1).

Encadré 6.1 Le décompte des jours peut être surprenant

Entre le 28 février 2015 et le 1er mars 2015, vous avez le choix entre détenir une obligation d'État et détenir une obligation du secteur privé de mêmes caractéristiques. Les prix et les taux de coupon sont identiques. Que préférez-vous ?

Intuitivement, vous devriez être indifférent (le risque de défaut pendant la nuit peut être négligé), mais, en fait, vous préférerez l'obligation du secteur privé. En effet, dans la convention 30/360, il y a trois jours entre le 28 février et le 1er mars, alors qu'il n'y en a qu'un dans la convention Exact/Exact. En détenant l'obligation privée, vous accumulerez environ trois fois plus de coupons qu'avec l'obligation d'État.

La référence Exact/360 pour un instrument monétaire indique que la période de référence est une année de 360 jours. On divise alors le nombre de jours réellement écoulés par 360. L'intérêt gagné sur 90 jours est exactement égal au quart du taux coté en base annuelle dans ce cas. Par conséquent, sur une année entière, l'intérêt gagné est 365/360 fois le taux coté.

Les conventions peuvent cependant varier d'un pays à l'autre et d'un instrument à l'autre. Par exemple, le LIBOR est coté en base Exact/360 dans toutes les devises, à l'exception de la livre sterling, dans laquelle la cotation est en Exact/365.

La cotation des bons du Trésor

Les instruments monétaires sont souvent cotés en taux. C'est l'intérêt gagné du fait de la détention, exprimé en pourcentage de la valeur faciale de l'instrument considéré. Supposons qu'un bon à 91 jours cote 8. Si le nominal est 100, l'intérêt payé est égal à 2,0222 $ sur les 91 jours. Cela correspond à un vrai taux de :

$$2{,}0222/(100 - 2{,}0222) = 2{,}064\ \%$$

sur les 91 jours. De manière générale, la convention de décompte des jours est Exact/360. Si Y est la valeur du bon et n sa durée de vie, l'expression :

$$P = \frac{360}{n} \times (100 - Y)$$

définit la cotation en taux (8 dans l'exemple ci-dessus), c'est-à-dire le taux de rendement annualisé. Dans notre exemple, on a $Y = 100 - (91 \times 8/360) = 97{,}778$.

La cotation des obligations

Selon le marché considéré, les obligations ne sont pas toujours cotées de la même façon. Sur le marché américain, elles sont cotées en dollars US et trente-deuxièmes de dollar US pour un nominal de 100 $. En Europe, la cotation est en pourcentage du nominal avec deux décimales.

Par exemple, une cotation de 90-16 pour une obligation américaine de nominal 1 000 $ correspond à un prix de 905 $ car 16 signifie 16/32 = 0,50 $. Cette cotation est équivalente à 90,5 sur le marché européen. Le montant décaissé (appelé prix coupon couru) pour acheter une obligation est égal au prix coté (appelé prix pied de coupon), auquel s'ajoute le coupon couru, c'est-à-dire l'intérêt accumulé depuis le dernier détachement de coupon.

Considérons par exemple une OAT (Obligation Assimilable du Trésor) de taux de coupon 4,75 % (payé annuellement), dont l'échéance est le 25 octobre 2025. Nous sommes le 5 mars 2017 et l'obligation cote 105, pied de coupon. Pour calculer le coupon couru, il faut tout d'abord évaluer le nombre de jours séparant le 25 octobre 2016, date de paiement du précédent coupon, du 5 mars 2017. On compte 132 jours. La durée de la période de référence est ensuite calculée, c'est-à-dire le nombre de jours séparant le 25 octobre 2016 du 25 octobre 2017. On compte 365 jours, puisque 2017 n'est pas une année bissextile. Par conséquent, le coupon couru est égal à :

$$\frac{132}{365} \times 0{,}0475 = 0{,}0171$$

pour un nominal de 1 €. Le prix de l'obligation, coupon couru en pourcentage du nominal, est donc 105 + 1,71 = 106,71.

6.2 Les contrats futures sur obligations

Le tableau 6.1 montre des cotations de futures de taux d'intérêt le 3 mai 2016 pour les contrats américains.

Tableau 6.1 : Cotations des futures de taux d'intérêt américains le 3 mai 2016 (les colonnes indiquent le mois d'échéance, le prix d'ouverture, les plus haut et plus bas de la journée, le prix de compensation, le dernier cours, la variation par rapport à la veille et le volume de transaction)

	Ouverture	Plus haut	Plus bas	Compens. veille	Dernier cours	Variation	Volume
Ultra Treasury Bonds, 100 000 $ (CME Group)							
Juin 2016	169-19	171-13	169-19	169-28	171-25	1-29	63 809
Treasury Bonds, 100 000 $ (CME Group)							
Juin 2016	161-30	164-10	161-30	162-06	163-26	1-20	237 430
Sept. 2016	160-28	162-29	160-28	160-26	162-13	1-19	323
Treasury Notes 10 ans, 100 000 $ (CME Group)							
Juin 2016	129-205	130-150	129-205	129-225	130-090	0-185	1 135 200
Sept. 2016	129-185	130-110	129-185	129-175	130-060	0-205	6 150
Treasury Notes *5* ans, 100 000 $ (CME Group)							
Juin 2016	120-225	121-050	120-220	120-227	121-012	0-105	603 709
Sept. 2016	120-180	120-255	120-180	120-107	120-240	0-132	6 120
Treasury Notes 2 ans, 100 000 $ (CME Group)							
Juin 2016	109-085	109-122	109-085	109-087	109-110	0-022	204 600
sept. 2016	109-087	109-087	109-080	109-050	109-080	0-030	1 546
Taux des Federal Funds, 30 jours, *5* 000 000 $ (CME Group)							
Sept. 2016	99,540	99,555	99,540	99,540	99,550	0,010	6 946
Mars 2017	99,390	99,415	99,390	99,380	99,410	0,030	1 589
Eurodollar, 1 000 000 $ (CME Group)							
Juin 2016	99,325	99,335	99,325	99,325	99,330	0,005	128 589
Sept. 2016	99,215	99,245	99,215	99,215	99,235	0,020	166 003
Déc. 2016	99,120	99,160	99,120	99,125	99,155	0,030	207 653
Déc. 2018	98,590	98,680	98,590	98,590	98,660	0,070	67 736
Déc. 2020	98,055	98,175	98,055	98,070	98,150	0,080	14 233
Déc. 2022	97,640	97,745	97,640	97,655	97,730	0,075	120

Un des contrats les plus échangés porte sur les obligations du Trésor américain (contrat *Treasury Bonds*), coté sur le CME Group. N'importe quelle obligation d'État d'une maturité supérieure à 15 ans peut être livrée à l'échéance de ce contrat. Un autre contrat appelé *Ultra T-Bons* a démarré en 2010 ; il autorise la livraison de n'importe quelle obligation d'une durée résiduelle supérieure à 25 ans.

Les contrats sur bons du Trésor (*Treasury Notes*) à 10 ans et 5 ans sont aussi très populaires ; la livraison porte, pour le premier, sur des obligations ayant une maturité variant entre 6,5 et 10 ans et, pour le second, sur des obligations de maturité 4,167 à 5,25 ans. Pour le contrat à 2 ans, la maturité doit être située entre 1,75 et 2,25 années.

Sur le marché européen, c'est le contrat FGBL qui est le plus populaire. Il porte sur des obligations de l'État allemand et c'est le produit phare des futures de taux long dans la zone euro. La livraison s'effectue à partir d'obligations d'État ayant une durée de vie résiduelle comprise entre 8,5 et 10,5 ans.

Les cotations

Les contrats futures sont cotés comme les obligations, à savoir en pourcentage du nominal avec deux chiffres après la virgule sur le marché européen, et en dollars US et trente-deuxièmes de dollar US sur le marché américain. La cotation de 162-06 sur l'échéance juin 2016 du contrat *T-bond* est alors équivalente à une cotation de 162,1875 sur le marché européen. Le cours de compensation du contrat sur les Treasury Notes à 10 ans devrait s'interpréter comme 129 + 17,5/32, soit 129,546875 pour l'échéance de septembre. Pour les notes à 5 ans et 2 ans, c'est encore plus précis, puisque le prix de compensation de 120-227 est en fait 120 + 22,75/32, soit 120,7109375. De même, le dernier prix coté de ce contrat est 121-012, c'est-à-dire 121 + 1,25 / 32 = 121,0390625.

Le facteur de concordance

Les contrats futures sur obligations sont fondés sur un principe qui peut paraître curieux au premier abord : l'actif sous-jacent n'existe pas ! Il s'agit d'un titre fictif appelé obligation notionnelle. Sur le contrat américain *Treasury Bonds* coté au CBOT, il s'agit d'une obligation d'une durée de vie de 30 ans payant un taux de coupon de 6 % et sur le contrat FGBL, l'obligation notionnelle a une durée de vie de 10 ans et un taux de coupon de 6 %. Le point important est que ces obligations fictives ont toujours, par convention, la même durée de vie et le même taux de coupon.

L'intérêt de choisir une obligation fictive réside dans la standardisation des contrats que permet ce choix. Chaque jour, le même contrat est négocié, avec le même sous-jacent (fictif) en termes de durée de vie, de taux de coupon et de coupon couru (toujours supposé nul). Une position longue prise aujourd'hui peut être dénouée demain en prenant une position courte sur le même contrat. Si le sous-jacent était réel, l'obligation aurait perdu demain une journée de maturité, induisant une différence entre le contrat coté aujourd'hui et celui coté demain.

Bien évidemment, il faut définir des règles de dénouement de ces contrats à l'échéance et les rattacher au marché réel. C'est pourquoi les autorités de marché définissent une liste d'obligations, bien réelles celles-là, qui pourront être livrées à l'échéance.

Supposons que le 3 mai 2021, les quatre obligations (Bunds) ci-dessous soient livrables (cet ensemble de titres est appelé gisement) pour un contrat FGBL d'échéance septembre 2021. Ces obligations sont caractérisées par leur taux de coupon, leur date d'échéance et leur facteur de concordance.

1. Bund1 1,75 % 04/07/2030 0,715427
2. Bund2 1,50 % 04/09/2030 0,694342
3. Bund3 1,50 % 15/02/2031 0,682731
4. Bund4 1,50 % 15/05/2031 0,676665

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les obligations livrables doivent avoir une durée de vie résiduelle entre 8,5 et 10,5 années. L'objectif est qu'elles soient aussi proches que possible du notionnel, mais qu'il ne soit pas nécessaire d'en changer trop souvent. Sur le contrat *T-Bond* du CME Group, les obligations d'État ayant une durée de vie supérieure à 15 ans sont livrables et le contrat porte sur 100 000 $ de nominal sous-jacent alors que sur le contrat *Ultra T-Bond* la durée de vie des obligations livrables est supérieure à 25 ans.

Bien évidemment, les taux de coupon des obligations livrables sont le plus souvent différents du taux de coupon du notionnel, à savoir 6 %. Par conséquent, ces obligations n'ont pas la même valeur que le notionnel. Le facteur de concordance est destiné à ajuster les termes du contrat pour tenir compte de cette remarque.

Supposons qu'à l'échéance septembre 2021 du contrat FGBL, le vendeur du contrat décide de livrer le Bund 1,75 %, alors que le prix futures est égal à 100. Si le notionnel existait, le vendeur livrerait 100 000 obligations notionnelles (de nominal 1 €) et recevrait 100 000 €, puisque le prix futures est supposé égal à 100.

Il livre en fait une obligation qui vaut moins, puisque le coupon est moins élevé (1,75 %, contre 6 % pour l'obligation notionnelle). Deux solutions sont possibles pour ajuster le contrat : garder le paiement de 100 000 € et modifier le nombre d'obligations livrées, ou garder le même nombre de Bunds, mais ajuster le prix touché par le vendeur. Cette seconde solution a été retenue sur les contrats futures sur obligations, pour des raisons techniques évidentes. Le montant payé par l'acheteur est donc égal au prix futures (100 dans notre exemple) multiplié par le facteur de concordance.

Le second ajustement concerne le coupon couru. Il est ajouté au prix à payer par l'acheteur quand les obligations livrées ont un coupon couru non nul.

Dans notre exemple, le Bund 1,75 % a un facteur de concordance égal à 0,715427 et un coupon couru de 0,388 % (du 4 juillet au 23 septembre, soit 81 jours). Par conséquent, l'acheteur paiera au vendeur :

$$100\ 000 \times \left(\frac{71{,}5427 + 0{,}3883}{100} \right) = 71\ 931\ €$$

Le facteur de concordance est en fait la valeur (au pied du coupon) qu'aurait l'obligation si la structure des taux était plate, au niveau du taux de coupon de l'obligation notionnelle.

En supposant, pour simplifier, qu'à l'échéance d'un contrat, le Bund 1,75 % ait exactement 9 ans à vivre et que le coupon vienne d'être payé, le facteur de concordance vaudrait alors :

$$\sum_{i=1}^{9} \frac{1{,}75}{1{,}06^i} + \frac{100}{1{,}06^9} = 71{,}09$$

Supposons maintenant que le Bund ait 9 ans et 3 mois de maturité. Le taux du notionnel pour trois mois est $1{,}06^{0{,}25} - 1 = 1{,}467\ \%$. Il faut donc actualiser la valeur de 71,09 trouvée ci-dessus sur trois mois, ce qui donne 71,09/1,01467 = 70,06. Mais, dans ce cas, le coupon couru est de 1,31 % (correspondant à 9 mois), qu'il faut déduire du résultat précédent. On obtient un facteur de concordance égal à $(70{,}06 - 1{,}31)/100 = 0{,}6875$.

L'obligation la moins chère à livrer

Pour chaque obligation livrable, le vendeur peut calculer, par l'intermédiaire du prix futures et du facteur de concordance, le prix qui lui sera payé selon le titre qu'il choisit de livrer. Pour choisir quelle obligation livrer, il évalue le coût d'achat de chacune des obligations. Pour chaque possibilité, la différence entre le montant reçu et le montant payé représente le gain (perte) réalisé sur ce choix particulier. En fin de compte, le vendeur choisira le titre qui maximise son gain ou minimise sa perte. C'est ce qui détermine l'obligation la *moins chère à livrer* (les professionnels disent simplement *cheapest*).

On peut noter que le coût d'achat des obligations comprend le coupon couru, de même que le montant reçu. Par conséquent, celui-ci est neutralisé lorsqu'on calcule la différence. Pour déterminer la moins chère à livrer, il suffit donc de maximiser la différence :

$$\text{Prix futures} \times \text{Facteur de concordance} - \text{Prix de l'obligation (pied de coupon)}$$

■ **Exemple 6.1** Considérons à nouveau les quatre obligations livrables du contrat FGBL septembre 2021. On suppose que le prix futures est de 140 le jour de la liquidation (23 septembre), et les prix et facteurs de concordance sont donnés dans les colonnes 2 et 3 du tableau 6.2.

Tableau 6.2 : Prix des obligations et facteurs de concordance

Obligation livrable	Prix pied de coupon	Facteur de concordance	Gain/Perte
Bund1 1,75 % 04/07/2030	100,4	0,715427	−0,2402
Bund2 1,50 % 04/09/2030	97,8	0,694342	−0,5921
Bund3 1,50 % 15/02/2031	95,9	0,682731	−0,3177
Bund4 1,50 % 15/05/2031	95,0	0,676665	−0,2669

Le gain du vendeur est présenté dans la dernière colonne du tableau. On constate que le gain maximal est obtenu sur le BUND 1,75 %, qui est dès lors l'obligation la moins chère à livrer.

Plusieurs facteurs déterminent la moins chère à livrer. Quand les taux actuariels des obligations sont plus élevés que le taux de coupon du notionnel, le système du facteur de concordance favorise les obligations à faible coupon et à maturité longue. Quand c'est l'inverse (c'est le cas ici), les obligations plus courtes et à taux de coupon élevé sont favorisées.

De la même façon, quand la courbe des taux est croissante, les obligations à échéance plus longue sont favorisées. Notons cependant que l'écart de maturité entre les obligations livrables est au maximum de deux ans sur le contrat FGBL. En revanche, sur le contrat américain sur *Treasury Bonds*, toutes les obligations du Trésor américain ayant plus de quinze ans de maturité sont livrables, à condition qu'elles ne comportent pas de clause de remboursement anticipé.

Nous avons vu que le vendeur choisit l'obligation qu'il va livrer et possède donc une option par ce biais. Il en possède une autre qu'on appelle *wild card*, liée au décalage temporel entre l'arrêt des cotations du contrat futures et l'arrêt des cotations des obligations livrables (voir encadré 6.2).

Encadré 6.2 La Wild Card

Considérons le contrat futures sur obligations du CME Group. La cotation du contrat cesse à 14 heures, mais les obligations continuent à être cotées jusqu'à 16 heures, et le vendeur a jusqu'à 20 heures pour notifier la livraison à la chambre de compensation. Si le prix de la moins chère à livrer baisse entre 14 et 16 heures, le vendeur peut acheter les obligations sur le marché et notifier ensuite son intention de livrer. Si les prix montent, il laisse la position ouverte et attend le lendemain. Cette stratégie peut être suivie pendant toute la période de livraison.

Bien sûr, les diverses options détenues par le vendeur ne sont pas gratuites ; leur valeur est reflétée dans le prix futures du contrat, qui est plus faible que ce qu'il serait en l'absence de telles options.

La détermination du prix futures théorique

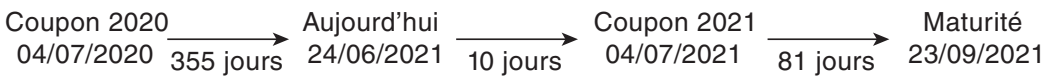
Un prix futures théorique exact n'est pas toujours facile à déterminer, en particulier du fait du choix laissé au vendeur concernant l'obligation qu'il va livrer et la date exacte de livraison. Cependant, si l'on suppose que la date de livraison est connue, ainsi que l'obligation la moins chère à livrer, le contrat est un futures sur un titre payant un flux connu [1]. L'équation (5.2) peut alors être utilisée pour écrire :

$$F_0 = (S_0 - I)\ \mathrm{e}^{rT} \tag{6.1}$$

où I est la valeur actuelle des coupons payés pendant la durée de vie du contrat, T est la durée restante jusqu'à l'échéance du contrat, r est le taux applicable pour cette durée, et F_0,S_0 désignent les prix futures et spot.

■ **Exemple 6.2** Supposons que l'obligation la moins chère à livrer du gisement Bund, le 24 juin 2021, soit le Bund 1,75 %, avec un facteur de concordance de 0,715427, et que la livraison ait lieu dans 91 jours, le 23 septembre 2021. Un coupon a été payé il y a 355 jours, le 4 juillet 2020. Le graphique 6.1 indique le schéma chronologique.

1. En pratique, les opérateurs supposent, pour déterminer la moins chère à livrer, que les taux zéro-coupon à l'échéance du contrat seront égaux aux taux forward observés aujourd'hui.



Graphique 6.1 : Chronologie

La structure des taux est supposée plate au niveau de 1,75 % (en continu). Supposons que l'obligation cote 100 au pied du coupon. Le prix de l'obligation coupon couru est alors :

$$100 + \frac{355}{365} \times 1{,}75 = 101{,}70$$

Un coupon sera payé dans 10 jours ; sa valeur actuelle est :

$$1{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}0175\times\frac{10}{365}} = 1{,}749$$

Le prix théorique du contrat futures (coupon couru) est donc égal à :

$$(101{,}70 - 1{,}749)\,\mathrm{e}^{0{,}0175\times\frac{91}{365}} = 100{,}39$$

À la date de livraison, il y a 81 jours de coupon couru. Par conséquent, si le contrat portait sur le Bund, le prix futures au pied du coupon serait donné par :

$$100{,}39 - \frac{81}{365} \times 1{,}75 = 100{,}00$$

Mais le facteur de concordance indique que le Bund est équivalent à 0,715427 obligation notionnelle ; par conséquent, le prix futures théorique du contrat est donné par :

$$\frac{100{,}00}{0{,}715427} = 139{,}78$$

6.3 Les contrats futures Eurodollar

Un des contrats de taux les plus échangés est le contrat futures Eurodollar 3 mois du CME Group. Un eurodollar est un dollar déposé dans une banque américaine ou étrangère en dehors des États-Unis. Le taux Eurodollar est alors le taux d'intérêt versé sur un dépôt de ce type. Il est analogue, pour d'autres devises, aux taux LIBOR, vus au chapitre 4.

Le contrat Eurodollar 3 mois du CME est un contrat portant sur les intérêts qui seront payés (par celui qui emprunte au taux Eurodollar) sur 1 million de dollars US pour une période future de trois mois. Ces contrats permettent à un trader de spéculer sur ce taux futur ou de couvrir une position exposée à ce type de taux.

Les maturités varient de 1 mois à 10 ans avec des échéances mensuelles pour l'horizon proche et 40 échéances trimestrielles du cycle mars, juin, septembre, décembre. Les flux engendrés par ce contrat (à l'échéance) correspondent au montant d'intérêts sur un placement de 1 million de dollars US à 90 jours (en négligeant la compensation quotidienne pour faciliter l'interprétation).

Le contrat Euribor 3 mois, coté sur Euronext.Liffe et Eurex, fonctionne sur le même principe, mais avec vingt échéances trimestrielles et donc un horizon de 5 ans ; il porte sur un nominal de 1 million d'euros.

Pour bien comprendre comment fonctionnent ces contrats, considérons le contrat juin 2016 du tableau 6.1. Le dernier jour de transaction se situe deux jours avant le troisième mercredi du mois de livraison, c'est-à-dire le 13 juin 2016. Le contrat fait l'objet d'une compensation journalière. Le 13 juin, le cours de compensation est noté $100 - R$, où R est le taux Eurodollar 3 mois de ce jour, en composition trimestrielle avec une convention Exact/360. Par conséquent, si R = 0,75 %, le prix de compensation est de 99,25. Compte tenu de la taille du contrat, une variation d'un point de base (0,01 %) du prix coté correspond à 25 $. Quand le prix augmente d'un point de base, l'investisseur en position longue gagne 25 $ et l'investisseur en position courte perd 25 $. Cette somme représente la variation d'intérêt qui sera reçue ou payée sur 1 million pour une période de 3 mois.

En bref, si Q désigne le prix coté du contrat, sa valeur est définie par :

$$10\,000\,[100 - 0{,}25 \times (100 - Q)] \tag{6.2}$$

Avec un dernier prix de 99,330 pour le contrat juin 2016 dans le tableau 6.1, la valeur du contrat est donc :

$$10\,000\,[100 - 0{,}25 \times (100 - 99{,}330)] = 998\,325\ \$$$

■ **Exemple 6.3** Un investisseur souhaite fixer un taux d'intérêt pour un placement à trois mois débutant deux jours avant le troisième mercredi de septembre sur un principal de 100 millions de dollars US. Le contrat Eurodollar septembre cote 96,50, ce qui correspond à un taux de 3,5 % par an. L'investisseur prend une position longue sur 100 contrats. Supposons que le 19 septembre, le taux soit de 2,6 %. La cotation finale est alors de 97,40. Le gain de l'investisseur s'écrit alors :

$$10\,000 \times 25\,(9\,740 - 9\,650) = 225\,000\ \$$$

L'intérêt gagné pendant la période s'élève à :

$$100\,000\,000 \times 0{,}25 \times 0{,}026 = 650\,000\ \$$$

Au total, le gain s'élève à 875 000 $, somme qui serait obtenue sur un placement à 3,5 % sur une période de 3 mois.

Le contrat futures a bien permis de fixer le taux de placement au niveau de 3,5 %. En fait, la couverture n'est pas tout à fait parfaite à cause (a) de la compensation journalière (b) du fait que les intérêts sur l'investissement ne sont reçus que trois mois plus tard, alors que l'échéance du futures est le 19 septembre. Dans le cas présent, il faudrait ajuster le nombre de contrats en le multipliant par :

$$1/(1 + 0{,}035 \times 0{,}25) = 0{,}9913$$

Il faudrait donc prendre position sur 99 contrats au lieu de 100.

Le tableau 6.1 montre d'autre part que la structure par termes des taux était croissante en mai 2016. Le taux 3 mois pour des périodes débutant respectivement le 13 juin 2016, le 19 septembre 2016, le 19 décembre 2016, le 17 décembre 2018, le 14 décembre 2020 et le 19 décembre 2022 étaient (en utilisant les prix de compensation) de 0,675 %, 0,785 %, 0,875 %, 1,410 %, 1,930 % et 2,345 %.

L'exemple 6.3 montre comment il est possible de couvrir le risque de taux sur une période future de 3 mois. L'ajustement n'est pas parfait, à cause de la compensation quotidienne et du décalage temporel des intérêts et il faut procéder à un léger ajustement du nombre de contrats.

Des contrats similaires portant sur des taux d'autres pays sont aussi échangés sur le CME. C'est le cas des contrats Euroyens. En Europe, des contrats Euribor sont traités sur le LIFFE (*London International Financial Futurs Exchange*) ainsi que des contrats futures Euroswiss.

Taux forward *versus* taux futures

Le contrat futures Eurodollar ressemble à un FRA (voir section 4.9), car il permet de fixer un taux d'intérêt pour une période future. Pour les maturités courtes (jusqu'à un an), les deux types de contrats peuvent être supposés identiques et le taux futures Eurodollar peut donc être supposé égal au taux forward correspondant. Pour des maturités plus longues, les différences ne peuvent plus être négligées. Comparons un contrat Eurodollar définissant un taux sur une période $[T_1; T_2]$ et un FRA correspondant à la même période. Le premier contrat fait l'objet d'un *marking to market* quotidien. Il se termine à la date T_1 et reflète le taux prévalant à cette date pour la période allant jusqu'à T_2. À l'inverse, le FRA se termine en T_2, même s'il reflète le taux de la même période [2].

En conséquence, deux éléments induisent des différences entre les deux contrats :

1. Le *marking to market* quotidien ;
2. Le fait que l'un des contrats ait une date finale de paiement en T_1, alors que pour l'autre la date finale est T_2.

Ces différences peuvent induire une certaine confusion. Les deux entraînent une diminution du taux forward par rapport au taux futures, mais, pour les contrats d'échéance longue, la réduction provenant du point (2) est bien moins importante que celle due au point (1). Le fait que le *marking to market* provoque une baisse du taux forward est lié aux arguments de la section 5.8.

Considérons un contrat dont le paiement est $R_M - R_F$ à la date T_1, où R_F est un taux prédéterminé pour la période $[T_1; T_2]$ et R_M est le taux observé pour cette période. S'il y a un *marking to market* quotidien, le contrat engendre des flux positifs quand les taux sont élevés et des flux négatifs quand les taux sont bas. Le *marking to market* est alors avantageux. En conséquence, R_F sera fixé à un niveau plus élevé pour compenser.

2. Comme nous l'avons mentionné dans la section 4.9, le paiement peut-être néanmoins réalisé en T_1, mais il est égal à la valeur actuelle du paiement qui devrait normalement être fait en T_2.

Pour comprendre le rôle du point (2), supposons maintenant que la fin du contrat soit fixée en date T_2. Si R_M est élevé, le flux est positif. Mais, dans ce cas, il aurait été préférable de recevoir ce flux en T_1. Le raisonnement symétrique peut être fait si R_M est faible. De ce fait, il est nécessaire d'introduire une compensation par une baisse du taux R_F [3].

L'ajustement de convexité

Les analystes réalisent alors un ajustement de convexité pour tenir compte de cette différence. La formulation usuelle de cet ajustement est [4] :

$$\text{Taux forward} = \text{Taux futures} - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,T_1\,T_2 \tag{6.3}$$

où T_1 est la maturité du contrat futures et T_2 est égal à T_1 plus la durée à laquelle s'applique le taux du contrat (3 mois dans l'exemple). σ est l'écart-type annuel des variations du taux court. Les deux taux dans l'égalité précédente sont exprimés en continu [5].

■ **Exemple 6.4** On suppose ici que $\sigma = 0{,}012$ et l'on cherche à calculer le taux forward quand le contrat futures à 8 ans cote 94. Dans ce cas, T_1 = 8 et T_2 = 8,25, et l'ajustement de convexité est donné par :

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2\,t_1\,t_2 = \frac{1}{2} \times 0{,}012^2 \times 8 \times 8{,}25 = 0{,}00475$$

c'est-à-dire 0,475 % ou 47,5 points de base. Comme le taux futures est de 6 % (le contrat cote 94) en base Exact/360 et avec composition trimestrielle, cela donne 6,038 % en continu. Le taux forward correspondant est donc $6{,}038 - 0{,}475 = 5{,}563$ % par an en continu.

Notons que le taux forward est plus faible que le taux futures et que l'ajustement est proportionnel (approximativement) au carré de la durée de vie du contrat. On voit sur le tableau 6.3 que cet ajustement est donc 16 fois plus important sur un contrat à 8 ans que sur un contrat à 2 ans.

L'extension de la courbe zéro-coupon LIBOR

La courbe des taux ZC LIBOR, appelée aussi courbe swap (voir chapitre 7), est généralement considérée comme la courbe des taux sans risque dans l'évaluation des actifs dérivés. Les taux spot LIBOR (voir section 4.1) sont utilisés pour les maturités courtes ; pour les maturités plus longues, on emploie les futures Eurodollar avec l'ajustement de convexité exposé dans la section précédente.

---

3. La quantification de cet effet sur la valeur d'un actif dérivé est discutée plus en détail au chapitre 30.

4. Voir la note technique n° 1 sur le site www.pearson.fr pour une démonstration.

5. Cette formule est basée sur le modèle de Ho et Lee qui sera discuté au chapitre 31. Voir T. S. Y. Ho et S. B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, décembre 1986, 1011-1029.

Avec des échéances mars, juin, septembre, décembre, la courbe ZC LIBOR peut être calculée. En effet, supposons que le i-ème contrat ait la date T_i comme échéance. Le taux forward déduit du prix de ce contrat s'applique à la période $[T_i; T_{i+1}]$. Une méthode de bootstrap peut ensuite être appliquée ; en effet, si F_i est le taux forward déduit du i-ème contrat et si R_i est le taux ZC pour la maturité T_i, on sait par l'équation (4.5) que :

$$F_i = \frac{R_{i+1}T_{i+1} - R_iT_i}{T_{i+1} - T_i}$$

ou encore :

$$R_{i+1} = \frac{F_i\,(T_{i+1} - T_i) + R_iT_i}{T_{i+1}} \tag{6.4}$$

Tableau 6.3 : Ajustements de convexité pour le taux futures

Maturité du contrat (années)	Convexité Ajustements de convexité (bp)
2	3,2
4	12,2
6	27,0
8	47,5
10	73,8

■ **Exemple 6.5** Le taux ZC LIBOR à 400 jours a été évalué à 4,8 %, en composition continue. À partir de cotations de contrat futures Eurodollar, on déduit que le taux forward continu à 90 jours débutant dans 400 jours est égal à 5,3 %, que le taux forward à 90 jours débutant dans 491 jours est égal à 5,5 % et que le taux forward à 90 jours débutant dans 589 jours est égal à 5,6 %. Tous ces taux sont en composition continue.

On peut utiliser l'équation (6.4) pour calculer le taux à 491 jours. Il est égal à :

$$\frac{0{,}053 \times 91 + 0{,}048 \times 400}{491} = 0{,}04893$$

soit 4,893 %. De la même façon, le taux à 589 jours est donné par :

$$\frac{0{,}055 \times 98 + 0{,}04893 \times 491}{589} = 0{,}04994$$

Le taux suivant de 5,6 % permettrait de poursuivre le calcul de la courbe des taux ZC. On peut noter que, même si les taux sous-jacents aux contrats Eurodollar sont des taux à 90 jours, on les applique à des durées de 91 ou 98 jours, qui sont les délais séparant deux échéances successives de contrats.

6.4 Les stratégies de couverture fondées sur la duration

Nous avons déjà introduit la duration à la section 4.8. Considérons ici la couverture d'une position dépendant des taux d'intérêt (comme un portefeuille d'obligations par exemple) par des contrats futures. Notons :

V_F : prix futures du contrat considéré ;

D_F : duration de l'actif sous-jacent à la date d'échéance du contrat ;

P : valeur forward du portefeuille à couvrir à la fin de la période de couverture (en pratique, on suppose souvent que c'est la valeur d'aujourd'hui) ;

D_P : duration du portefeuille à la fin de la période de couverture.

Si nous supposons que la variation Δy des taux est la même pour toutes les maturités (déplacement parallèle de la courbe), nous pouvons écrire en première approximation :

$$\Delta P = -PD_P\Delta y$$

La relation correspondante pour le contrat futures s'écrit :

$$\Delta V_F = -V_F D_F \Delta y$$

Par conséquent, le nombre de contrats nécessaires pour couvrir la position est défini par :

$$N^* = \frac{PD_P}{V_F D_F} \tag{6.5}$$

Cette quantité de contrats est le ratio de couverture fondé sur la duration [6] ; il permet de ramener la duration de la position globale à 0.

Quand le contrat futures est un futures sur obligations, le hedger doit faire une hypothèse sur l'obligation la moins chère à livrer. Si, par la suite, un changement de l'obligation la moins chère à livrer survient, la couverture doit être ajustée et sa performance sera peut-être moins bonne que celle qui avait été prévue.

De manière plus générale, quand la couverture est fondée sur des futures de taux, il est important de garder à l'esprit que taux et prix d'obligations varient en sens opposé. Par conséquent, une entreprise susceptible de perdre de l'argent quand les taux baissent doit prendre une position longue sur les futures de taux.

Le hedger choisit un contrat futures, dont la duration du sous-jacent est aussi proche que possible de celle du portefeuille qu'il cherche à couvrir. Les futures Eurodollar seront utilisés de manière privilégiée pour couvrir une exposition aux variations des taux courts, alors que les futures sur obligations seront préférés pour couvrir une exposition aux variations des taux longs.

6. Pour une discussion plus détaillée sur l'équation (6.5), voir R. J. Rendleman, "Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures", *Journal of Fixed Income*, 9 (1) juin 1999, 84-91.

■ **Exemple 6.6** Le 2 août, un gérant de fonds possède un portefeuille d'obligations d'État de 10 millions d'euros et s'inquiète d'une possible hausse des taux dans les trois mois à venir. Il décide d'utiliser, pour se couvrir, le contrat FGBL d'échéance décembre. Le prix futures est de 122,50. Comme chaque contrat porte sur 100 000 € de nominal, le prix futures est de 122 500 €. On suppose que la duration du portefeuille dans trois mois sera de 5,3 ans et que l'obligation la moins chère à livrer est un Bund dont la duration sera de 7,3 ans dans trois mois et qui paie un taux de coupon de 3 %. Le taux actuariel de ce Bund est actuellement de 4 %.

Le gérant envisage de prendre une position courte sur ce contrat pour couvrir son portefeuille. Si les taux montent, le gain sur le futures compensera la perte sur le portefeuille. Le nombre de contrats à vendre est donné par :

$$N^* = \frac{10\,000\,000}{122\,500} \times \frac{5{,}3}{7{,}3} = 59{,}27$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, le hedger prendra une position courte sur 59 contrats.

6.5 La couverture de portefeuilles d'actifs et de passifs

Les institutions financières cherchent fréquemment à couvrir leurs positions contre le risque de taux en s'assurant que la duration moyenne de leurs actifs coïncide avec celle de leurs passifs (qui peuvent être analysés comme une position courte sur un portefeuille d'obligations). Cette stratégie est appelée *immunisation de portefeuille* ou encore *duration matching*. Une fois mise en place, elle assure qu'un faible déplacement parallèle de la courbe des taux aura peu d'effet sur la valeur du portefeuille d'actifs et de passifs. Le gain (la perte) sur les actifs doit être compensé par la perte (le gain) sur les passifs.

Cependant, l'immunisation ne protège pas contre des déplacements non parallèles de la courbe des taux, c'est la faiblesse essentielle de cette approche. En pratique, les taux courts sont plus volatils que les taux longs, les deux types de taux n'étant pas parfaitement corrélés. Il peut même arriver qu'ils changent dans des directions opposées. Une stratégie de *duration matching* n'est donc qu'un premier pas et les institutions financières ont développé d'autres outils qui les aident à gérer leur risque de taux, comme l'illustre l'encadré 6.3.

Encadré 6.3 L'ALM (*Asset-Liability Management*) vu par les banques

Dans les années 1960, les taux étaient faibles et peu volatils. Les banques avaient donc pris l'habitude d'accepter des dépôts à court terme et de prêter simultanément à long terme. Dans les années 1970, les taux ont commencé à augmenter et ces établissements se retrouvaient dans la situation de devoir financer à taux élevé des prêts accordés précédemment à taux faible. Il s'ensuivit quelques faillites spectaculaires.

Les comités de gestion actif-passif (ALM pour le sigle anglo-saxon) gèrent maintenant de très près l'exposition au risque de taux des banques. Mettre en correspondance la duration des actifs et celle des passifs est un premier pas, mais cela ne protège pas contre des mouvements de la courbe des taux qui ne sont pas de simples translations.

Une approche souvent utilisée est le *gap management*, qui consiste à découper la courbe des taux zéro-coupon en plusieurs segments et à immuniser le portefeuille segment par segment. Supposons que le i-ème segment soit l'intervalle de maturités $[t_i \ ; \ t_{i+1}]$. L'institution financière qui cherche à se couvrir évalue l'impact d'une variation Δy des taux correspondant à ces maturités, les autres restant inchangés. Si l'exposition au risque est trop importante sur cette partie de la courbe, la position sera modifiée pour ramener le risque dans des limites acceptables. Heureusement, les banques ont aujourd'hui toute une gamme d'instruments financiers permettant de gérer ce type de risque. Il s'agit en particulier des swaps, des FRA, des futures sur obligations, des contrats Eurodollar, etc.

Résumé

Les deux contrats de taux les plus échangés sont les futures sur obligations d'État et les futures sur taux interbancaires Eurodollar ou Euribor. Dans un contrat sur obligations, le vendeur dispose de plusieurs options :

1. Le choix du jour de livraison quand une période de livraison est définie contractuellement ;
2. Le choix de l'obligation livrable dans un ensemble de titres appelé gisement ;
3. La cotation des contrats s'arrête chaque jour avant celle des obligations livrables ; quand il existe une période de livraison, le vendeur peut attendre pour savoir s'il va livrer ce jour, ou attendre le jour suivant en fonction de l'évolution du prix des titres livrables.

Toutes ces options tendent à réduire le prix futures du contrat.

Le contrat futures Eurodollar 3 mois porte sur un taux d'intérêt à 3 mois à partir de l'échéance du contrat. Les prix de ces contrats sont souvent utilisés pour estimer les taux forward LIBOR et construire la courbe zéro-coupon LIBOR. Quand des contrats de maturité longue sont employés dans ce but, il est important d'opérer un ajustement de convexité pour tenir compte du *marking to market* quotidien sur les contrats.

Le concept de duration est essentiel dans la couverture du risque de taux. La duration permet à un hedger de déterminer la sensibilité du prix d'un contrat futures aux variations du taux actuariel du sous-jacent au contrat. Sous l'hypothèse de déplacements parallèles de la courbe des taux, cette information permet de calculer le nombre de contrats à acheter ou à vendre pour couvrir une position.

Toutefois, les taux courts étant en général plus volatils que les taux longs, la performance de la couverture est susceptible d'être décevante par rapport à ce qui était prévu si l'obligation sous-jacente au contrat a une maturité très différente de celle de la position à couvrir.

Références complémentaires

Burghardt G. et W. Hoskins, "The Convexity Bias in Eurodollar Futures", *RISK*, 8 (3), 1995, 63-70.

Grinblatt M. et N. Jegadeesh, "The Relative Price of Eurodollars Futures and Forward Contracts", *Journal of Finance*, 51 (4), septembre 1996, 1499-1522.

Problèmes et exercices

6.1 Une obligation d'État paie un taux de coupon de 7 % le 7 janvier et le 7 juillet de chaque année. Quel est le coupon couru entre le 7 juillet et le 9 août si le nominal est de 100 € ? Votre réponse serait-elle différente s'il s'agissait d'une obligation du secteur privé ?

6.2 Le 9 janvier 2018, une obligation d'État américaine, de taux de coupon 6 %, dont l'échéance est le 12 octobre 2030, est cotée 102-07. Quel est son prix coupon couru ?

6.3 Comment est calculé le facteur de concordance d'une obligation ? À quoi sert-il ?

6.4 La cotation d'un contrat futures Eurodollar passe de 96,76 à 96,82. Quel est le gain/perte d'un investisseur ayant une position longue sur deux contrats ?

6.5 Quel est l'objectif des ajustements de convexité sur les taux des futures Eurodollar ? Pourquoi cet ajustement est-il nécessaire ?

6.6 Le taux LIBOR à 350 jours est de 3 % en composition continue et le taux forward calculé à partir d'un contrat futures Eurodollar dont l'échéance est dans 350 jours est de 3,2 % en composition continue. Calculez le taux ZC à 440 jours.

6.7 Le 30 janvier, vous détenez un portefeuille d'obligations valant 6 millions de dollars US. La duration du portefeuille sera de 8,2 ans dans six mois. Le prix futures du contrat sur obligations du Trésor, échéance septembre, cote 108-15, et l'obligation la moins chère à livrer aura en septembre une duration de 7,6 ans. Comment pouvez-vous couvrir votre portefeuille contre des variations de taux dans les six mois à venir ?

6.8 Un bon du Trésor à 90 jours est coté 10,00. Quel taux (continu) gagne un investisseur (en base Exact/365) détenant ce bon pour 90 jours ?

6.9 Le 5 mai 2017, une obligation d'État, payant un taux de coupon de 12 % et d'échéance le 27 juillet 2034, cote 110-17. Quel est son prix coupon couru ?

6.10 Supposons que le prix futures du contrat sur Treasury Bonds soit 101-12. Laquelle des quatre obligations suivantes est la moins chère à livrer ?

Obligation	Prix	Facteur de concordance
1	125-05	1,2131
2	142-15	1,3792
3	115-31	1,1149
4	144-02	1,4026

6.11 Le 30 juillet 2018, l'obligation la moins chère à livrer d'un contrat *Treasury Bonds* d'échéance septembre 2018 est une obligation de taux de coupon 13 % avec livraison le 30 septembre 2018. Les paiements de coupon ont lieu les 4 février et 4 août de chaque année. La structure des taux est plate au niveau de 12 %, en composition semestrielle. Le facteur de concordance pour l'obligation est de 1,5. Le prix actuel, au pied du coupon, de l'obligation est 110. Quel est le prix futures du contrat ?

6.12 Un opérateur cherche des opportunités d'arbitrage sur le marché du contrat futures FGBL. En quoi cette activité est-elle compliquée par la possibilité pour le vendeur de livrer n'importe quelle obligation du gisement ?

6.13 Les taux (continus) LIBOR à 6 et 9 mois sont respectivement 7,5 % et 8 % (tous les deux sont en composition continue et en base Exact/365). Quel est le prix futures d'un contrat Eurodollar 3 mois, d'échéance 6 mois ?

6.14 Supposez que le taux LIBOR à 300 jours soit de 4 % et que les contrats Eurodollar pour des maturités de 300, 398 et 489 jours cotent respectivement 95,83, 95,62 et 95,48. Calculez les taux ZC à 398 et 489 jours. Vous pouvez supposer pour ces calculs qu'il n'y a pas de différence entre taux forward et taux futures.

6.15 Un portefeuille d'obligations de duration 12 ans est couvert par un contrat futures pour lequel la duration du sous-jacent est de 4 ans. Quel peut être l'impact, sur la couverture, d'une volatilité moindre du taux 12 ans par rapport au taux 4 ans ?

6.16 Le 20 février, un trésorier sait que le 17 juillet, son entreprise va émettre 5 millions d'euros en billets de trésorerie à 180 jours. Si les billets étaient émis aujourd'hui, l'entreprise obtiendrait 4,82 millions (en d'autres termes, elle obtiendrait cette somme et rembourserait 5 millions dans 180 jours). Le contrat Euribor échéance septembre cote 92,00. Comment le trésorier devrait-il se couvrir ?

6.17 Le 1er août, un gérant détient un portefeuille d'obligations valant 10 millions d'euros. En octobre, la duration de ce portefeuille sera de 5,1 années. Le contrat FGBL échéance décembre cote 112,37 et l'obligation la moins chère à livrer aura une duration de 7 ans à l'échéance du contrat. Comment le gérant devrait-il procéder pour immuniser son portefeuille dans les deux prochains mois ?

6.18 Dans le problème 6.17, comment le gérant devrait-il opérer pour ramener la duration de son portefeuille à 3 ans ?

6.19 Entre le 30 octobre 2018 et le 1er novembre 2018, vous avez la possibilité de détenir une obligation d'État payant 12 % de taux de coupon ou une obligation du secteur privé de même taux de coupon. En ignorant le risque de défaut et en vous fondant sur les conventions de décompte des jours, laquelle préféreriez-vous détenir ?

6.20 Un contrat Eurodollar arrive à maturité dans 60 jours et cote 88. Quel est le taux forward LIBOR pour la période de 3 mois débutant dans 60 jours ? Vous ignorerez la différence entre prix futures et prix forward.

6.21 Le contrat futures Eurodollar 3 mois de maturité 6 ans cote 95,20. L'écart-type des variations du taux court est de 1,1 % par an. Estimez le taux forward LIBOR pour la période de 3 mois débutant dans six ans.

6.22 Expliquez pourquoi le taux forward est plus faible que le taux futures correspondant, déduit des cotations du contrat futures Eurodollar.

Questions complémentaires

6.23 Le 7 avril 2017, le prix pied de coupon d'une obligation du Trésor américain de taux de coupon annuel 6 % (payé semestriellement) est 120-00. Cette obligation arrive à échéance le 27 juillet 2033. Quel est son prix coupon couru ? Comment la réponse est-elle modifiée si cette obligation est une obligation corporate ?

6.24 Un contrat futures sur obligations du Trésor US cote 103-12. Les prix de trois obligations livrables sont 115-06, 135-12 et 155-28. Les facteurs de conversion respectifs sont 1,0679, 1,2264 et 1,4169. Quelle est l'obligation la moins chère à livrer ?

6.25 Le contrat Eurodollar décembre cote 98,40 et une entreprise envisage d'emprunter 8 millions de dollars US pour 3 mois à partir de décembre au taux LIBOR + 50 bp.

a. Quel taux l'entreprise peut-elle fixer à l'aide de futures Eurodollars ?

b. Quelle position doit-elle prendre ?

c. Si le taux 3 mois est de 1,3 % à l'échéance du contrat, quel est le prix de compensation final du contrat futures ?

6.26 Un contrat futures Eurodollar pour la période 5,1-5,35 ans cote 97,1. L'écart-type annuel des variations du taux trois mois est de 1,4 %. Quel est le taux forward du FRA correspondant ?

6.27 Nous sommes en mars 2017. L'obligation la moins chère à livrer pour le contrat *Treasury Bonds* décembre 2017 est une obligation payant 8 % de taux de coupon annuel avec livraison au 31 décembre 2017. Les coupons sont payés le 1er mars et le 1er septembre. Le taux d'intérêt continu est de 5 % pour toutes les maturités. Le facteur de concordance de l'obligation est de 1,2191 et l'obligation cote 137 $. Quel est le prix théorique du contrat futures ?

6.28 Une banque peut prêter et emprunter au même taux sur le marché LIBOR. Le taux à 90 jours est de 10 % par an, le taux à 180 jours est de 10,2 %, les deux étant des taux continus en base Exact/Exact. Le contrat futures Euribor dont l'échéance est dans 91 jours est coté 89,5. Quelles sont les opportunités d'arbitrage ?

6.29 Une entreprise canadienne souhaiterait créer un contrat futures LIBOR sur le dollar canadien en utilisant les futures Eurodollar et les contrats forward sur le change. En donnant un exemple, montrez comment elle pourrait procéder. Vous supposerez que contrats futures et contrats forward sont identiques.

6.30 Le 5 juin 2017, le prix futures du contrat sur *Treasury Bonds* d'échéance juin 2017 est 118-23.

a. Calculez le facteur de concordance d'une obligation dont l'échéance est le 1er janvier 2033 et qui paie un coupon (semestriellement) de 10 % par an.

b. Calculez le facteur de concordance d'une obligation dont l'échéance est le 1er janvier 2038 et qui paie un coupon (semestriellement) de 7 % par an.

c. Si les obligations décrites en (a) et (b) cotent (pied de coupon) 169 et 136, quelle est la moins chère à livrer ?

d. Si l'obligation déterminée au point précédent est effectivement livrée le 25 juin, combien recevra le vendeur ?

6.31 Un gérant de fonds pense utiliser le contrat FGBL pour couvrir un portefeuille d'obligations qui vaut aujourd'hui 100 millions d'euros et qui aura une duration de 4 ans dans 3 mois. Le prix futures est 122 et chaque contrat porte sur 100 000 €. L'obligation la moins chère à livrer est anticipée comme un titre de duration 7 ans à l'échéance du contrat. Quelle position le gérant doit-il prendre ?

a. Comment faut-il modifier la couverture si après un mois, la moins chère à livrer devient une obligation de duration 5 ans ?

b. Supposez qu'après 3 mois, tous les taux d'intérêt aient augmenté, mais que les taux longs aient augmenté plus que les taux de court et de moyen termes. Quel est l'effet de cette évolution sur la performance de la couverture ?

Chapitre 7

Les swaps

Le marché des swaps traités de gré à gré est né au début des années 1980, par un premier contrat portant sur des devises entre IBM et la Banque mondiale en 1981. La Banque mondiale avait des emprunts en dollars US (USD), alors qu'IBM avait des emprunts en Deutschmarks (DEM) et en francs suisses (CHF). La Banque mondiale accepta de payer les intérêts d'IBM en contrepartie du paiement par IBM des intérêts de la Banque mondiale en USD. Depuis, ces marchés ont connu une croissance considérable.

Un swap est un accord entre deux entreprises pour échanger des flux de trésorerie dans le futur. Cet accord définit les dates auxquelles les cash-flows seront échangés et la façon dont ils seront calculés. Généralement, ils dépendent d'une ou plusieurs variables économiques comme un taux d'intérêt ou un taux de change.

Un contrat forward peut être vu comme un swap. Si, le 1er mars 2019, une entreprise prend une position longue sur un contrat forward pour acheter 100 onces d'or à 1 200 $ l'once dans un an, elle pourra vendre l'or dès qu'elle l'aura reçu. Le contrat forward est alors équivalent à un swap, dans lequel l'entreprise s'engage à payer 120 000 $ le 1er mars 2020 et à recevoir 100 S, où S est le prix de l'once d'or à cette date.

Alors qu'un contrat forward correspond à un échange de flux à une date unique, les swaps comportent des échanges à plusieurs dates. Dans ce chapitre, nous analysons ces contrats, la façon dont ils sont élaborés et leur évaluation. L'essentiel de ce chapitre est consacré à deux types de swaps classiques, le swap de taux le plus courant (fixe contre variable) et les swaps de devises (fixe contre fixe). D'autres swaps seront abordés au chapitre 34.

Dans l'évaluation des swaps, il est nécessaire d'actualiser les flux à l'aide d'un taux sans risque. Comme nous l'avons mentionné à la section 4.3, le taux LIBOR était d'usage courant comme proxy du taux sans risque, mais depuis la crise de 2008, ce sont les taux OIS qui sont utilisés pour actualiser les flux. Les évaluations de ce chapitre reflètent cette évolution des pratiques de marché.

7.1 Le fonctionnement des swaps de taux

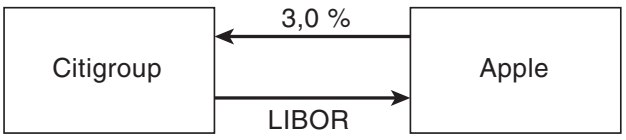
Le swap le plus courant est le swap de taux « vanille » (*plain vanilla*). Dans un tel contrat, une entreprise s'engage à payer des cash-flows égaux aux intérêts à taux fixe sur un principal donné, pendant un certain nombre d'années. En retour, elle reçoit des intérêts à un taux variable sur le même principal, pendant la même durée.

Le LIBOR

Le taux variable usuel dans les contrats de swap est le taux LIBOR (London Interbank Offered Rate), introduit au chapitre 4. C'est le taux offert dans différentes devises (Euribor pour l'euro) dans les échanges interbancaires (entre banques notées AA au moins) pour différentes échéances de court terme (un mois, trois mois, etc.). C'est la référence pour les prêts sur les marchés financiers internationaux. Pour comprendre son utilisation, considérons une obligation à 5 ans avec un taux spécifié comme le LIBOR 6 mois plus 50 points de base. La durée de vie de cette obligation est divisée en 10 périodes de 6 mois. Au début de chaque période, le coupon (qui sera payé en fin de période) est calculé à partir du taux LIBOR 6 mois prévalant à cette date, auquel on ajoute 0,5 %.

Illustration

Considérons un swap hypothétique à 3 ans entre deux entreprises, Apple et Citigroup par exemple, initié le 8 mars 2017. Apple s'engage à payer un taux d'intérêt de 3 % à Citigroup sur un principal de 100 millions de dollars US. En retour, Citigroup s'engage à payer des intérêts à Apple au taux LIBOR 6 mois. Les flux seront échangés tous les six mois et le taux fixe de 3 % est en composition semestrielle. Apple est le payeur de taux fixe et Citigroup le payeur de taux variable. Le diagramme du swap est représenté dans le graphique 7.1.



Graphique 7.1 : Swap de taux entre Apple et Citigroup

Le premier échange de flux du swap interviendra le 8 septembre 2017, six mois après la conclusion du contrat. Apple doit payer 1,5 million de dollars US à Citigroup, somme qui représente l'intérêt pendant la période de six mois sur le principal de 100 millions. Mais Citigroup doit payer à Apple l'intérêt au taux LIBOR 6 mois qui prévalait le 8 mars, sur le même principal. Si, par exemple, ce taux était à 2,2 %, Citigroup doit payer à Apple $0{,}5 \times 0{,}022 \times 100 = 1{,}1$ million[1]. On peut noter qu'il n'y a aucune incertitude sur ce premier échange, puisque le LIBOR était observable à la date de démarrage du swap.

1. Les calculs ne sont pas précis ici car nous négligeons les règles de décompte des jours. Ce point est examiné plus loin dans ce chapitre.

Le deuxième échange sera réalisé le 8 mars 2018. Apple doit payer à nouveau 1,5 million, alors que Citigroup paie l'intérêt au LIBOR 6 mois constaté le 8 septembre 2017. Si ce taux est par exemple de 2,8 %, Citigroup paie 1,4 million.

Au total, il y aura six échanges de flux sur ce swap de 3 ans. Les paiements d'Apple seront systématiquement de 1,5 million, alors que ceux de Citigroup changeront avec l'évolution du LIBOR 6 mois. Le swap est généralement conçu pour que seule la différence d'intérêts soit réglée par la partie qui doit payer le montant le plus élevé. Dans notre exemple, Apple paierait $1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4$ million à Citigroup le 8 septembre 2017, et $1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1$ million le 8 mars 2018.

Le tableau 7.1 fournit l'ensemble des paiements du swap, du point de vue de Apple. On peut noter que le principal de 100 millions ne sert qu'à calculer les intérêts, il n'est pas échangé, c'est pourquoi ce montant est le principal *notionnel* du swap. Si l'échange du principal avait lieu à la fin de la durée de vie du swap, cela ne changerait pas les flux nets, comme le montre le tableau 7.2. Cependant, cette présentation permet de voir le swap sous un autre angle. Les cash-flows de la troisième colonne sont ceux d'une position longue sur une obligation à taux variable, alors que ceux de la quatrième colonne sont ceux d'une position courte sur une obligation à taux fixe. Le swap peut donc être appréhendé comme l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable.

Tableau 7.1 : Cash-flows d'Apple pour un swap à 3 ans de principal 100 millions quand le taux fixe est 3 % et le taux variable est le LIBOR 6 mois

Date	LIBOR 6 mois (en %)	Flux variable	Flux fixe	Flux net
8 mars 2017	2,20			
8 septembre 2017	2,80	1,10	−1,50	−0,40
8 mars 2018	3,30	1,40	−1,50	−0,10
8 septembre 2018	3,50	1,65	−1,50	0,15
8 mars 2019	3,60	1,75	−1,50	0,25
8 septembre 2019	3,90	1,80	−1,50	0,30
8 mars 2020		1,95	−1,50	0,45

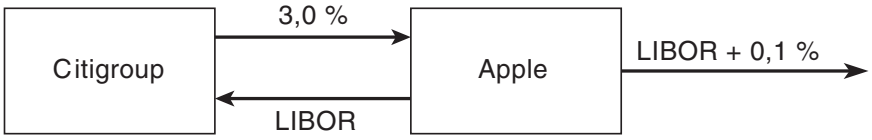
Apple, dont la position est décrite dans le tableau 7.2, a une position longue sur l'obligation à taux variable et une position courte sur l'obligation à taux fixe. La position de Citigroup est symétrique. Cette présentation du swap explique pourquoi le taux variable est défini six mois avant le paiement effectif ; en effet, sur une obligation à taux variable, le taux d'intérêt est généralement déterminé en début de période et le coupon correspondant payé en fin de période.

Tableau 7.2 : Cash-flows (en millions de dollars US) du tableau 7.1 avec un échange du principal à l'échéance du swap

Date	LIBOR 6 mois (en %)	Flux variable	Flux fixe	Flux net
8 mars 2017	2,20			
8 septembre 2017	2,80	1,10	−1,50	−0,40
8 mars 2018	3,30	1,40	−1,50	−0,10
8 septembre 2018	3,50	1,65	−1,50	0,15
8 mars 2019	3,60	1,75	−1,50	0,25
8 septembre 2019	3,90	1,80	−1,50	0,30
8 mars 2020		101,95	−101,50	0,45

L'utilisation des swaps pour transformer un engagement

Pour Apple, le swap pourrait être utilisé pour transformer une dette à taux variable en dette à taux fixe, comme illustré au graphique 7.2. Supposons qu'Apple ait contracté une



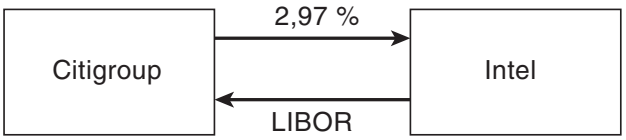
Graphique 7.2 : Apple utilise le swap du graphique 7.1 pour transformer un emprunt à taux variable en un emprunt à taux fixe

dette de 100 millions au taux LIBOR + 10 points de base, que nous noterons LIBOR + 10 (rappelons que 1 point de base est égal à 0,01 %). Dès la mise en place du swap, trois ensembles de cash-flows interviennent :

1. Le paiement de LIBOR + 10 à ses prêteurs ;
2. La réception du LIBOR sur le swap ;
3. Le paiement de 3 % selon les termes du swap.

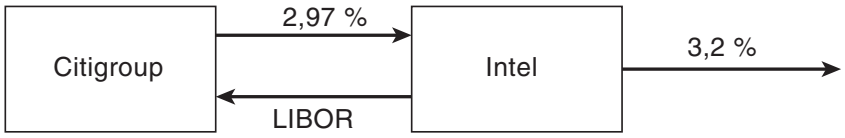
Ces trois ensembles de cash-flows sont équivalents à un emprunt à taux fixe à 3,1 %. Pour Apple, le swap transforme une dette à LIBOR + 10 en une dette à 3,1 %.

De la même façon, un swap de ce type pourrait être employé pour transformer une dette à taux fixe en dette à taux variable. Supposons qu'Intel ait contracté un emprunt au taux fixe de 3,2 % pour 100 millions et veuille échanger ce taux fixe contre un emprunt à taux variable. Intel contacte Citigroup et convient d'un swap comme celui décrit sur le graphique 7.3.



Graphique 7.3 : Swap de taux entre Intel et Citigroup

Intel paie le LIBOR et reçoit 2,97 %. Après la mise en place du swap, la situation est décrite sur le graphique 7.4.



Graphique 7.4 : Utilisation par Intel du swap du graphique 7.3 pour convertir une dette à taux fixe en une dette à taux variable

Trois types de cash-flows seront reçus ou payés par Intel :

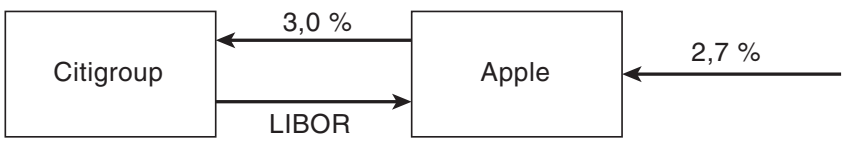
1. Le paiement de 3,2 % à ses prêteurs ;
2. La réception de 2,97 % sur le swap ;
3. Le paiement du LIBOR sur le swap.

En définitive, ces cash-flows sont équivalents à un emprunt à taux variable LIBOR + 23. Chez Intel, ce swap aurait pour effet de transformer la dette initiale à taux fixe en dette à taux variable.

Utilisation d'un swap pour transformer un actif

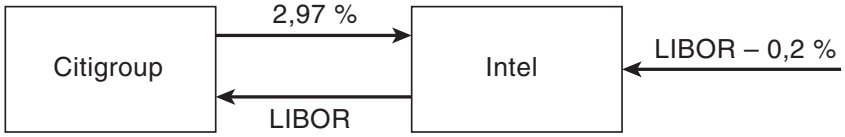
Comme dans la section précédente, un swap peut aussi servir, pour Apple, à transformer un actif rapportant un taux fixe en un actif rapportant un taux variable. Supposons qu'Apple détienne un portefeuille d'obligations de 100 millions qui paient 2,7 % de taux de coupon (coupon payé semestriellement) dans les trois prochaines années. Après la mise en place du swap, trois séries de cash-flows entrent en jeu (voir graphique 7.5) :

1. L'encaissement de 2,7 % sur le portefeuille d'obligations ;
2. La réception du LIBOR sur le swap ;
3. Le paiement de 3 % sur le swap.



Graphique 7.5 : Apple utilise le swap du graphique 7.1 pour transformer un investissement à taux fixe en un investissement à taux variable

En fin de compte, le portefeuille d'obligations à taux fixe a été transformé en un portefeuille obligataire à taux variable rapportant LIBOR – 30. Symétriquement, si Intel possède un portefeuille d'obligations à taux variable rapportant LIBOR – 20, le swap permet de transformer ce portefeuille en portefeuille de titres à taux fixe rapportant 2,7 % (voir graphique 7.6).



Graphique 7.6 : Utilisation par Intel du swap du graphique 7.3 pour transformer un investissement à taux variable en investissement à taux fixe

L'organisation des échanges

Comme indiqué à la section 1.2, les régulateurs exigent que les swaps standard soient échangés sur des plateformes électroniques. La compensation des transactions passe par des contreparties centralisées (CCP). Les swaps sont donc traités comme des contrats à terme dont la marge initiale et la marge de maintenance sont payées par les deux parties.

Les règles ne s'appliquent pas lorsque l'une des contreparties du swap est un utilisateur final dont l'activité principale n'est pas financière et qui utilise des swaps pour couvrir ou atténuer les risques liés à son activité commerciale ou industrielle (comme Apple ou Intel). Dans les exemples des figures 7.1 et 7.3, Apple et Intel sont des sociétés industrielles. En supposant qu'ils utilisent les swaps pour atténuer les risques, les transactions peuvent être conclues directement avec Citigroup ; la compensation est alors bilatérale. Parfois, une institution financière conclut des opérations de compensation avec deux sociétés non financières différentes (comme Apple et Intel) à peu près au même moment. Habituellement, cependant, lorsqu'elle entre dans un swap tel que celui de la figure 7.1, elle doit gérer son risque en entrant dans le swap opposé avec une autre institution financière. Le swap avec l'institution financière passera par une plateforme électronique et sera compensé par une CCP. L'institution financière peut alors être dans une position telle que le swap avec l'entreprise industrielle n'est pas compensé de façon centralisée, alors que l'autre est entièrement garanti (avec les marges des deux contreparties). Ce problème sera traité plus en détail à la section 9.2.

Dans la figure 7.1, Citigroup reçoit 3 % dans un swap à trois ans, alors que dans la figure 7.3, il paie 2,97 %. Citigroup est alors market-maker sur le marché des swaps de taux. Citigroup obtient en effet 3 bps par l'intermédiaire de ces swaps. Ce profit compense les frais opérationnels et le risque de défaut d'une contrepartie. Le tableau 7.3 donne un exemple de ce type de cotations [2].

2. Aux États-Unis, un swap classique suppose que les paiements à taux fixe sont réalisés tous les six mois et échangés contre des paiements variables effectués tous les trois mois. Dans le tableau 7.1, cette distinction a été négligée.

Tableau 7.3 : Exemple de taux offerts et demandés pour un swap à flux semi-annuels

Maturité (en années)	Demandé (%)	Offert (%)	Taux de swap
2	2,55	2,58	2,565
3	2,97	3,00	2,985
4	3,15	3,19	3,170
5	3,26	3,30	3,280
7	3,40	3,44	3,420
10	3,48	3,52	3,500

Le spread pour chaque maturité est de l'ordre de 3 ou 4 points de base. Le milieu de fourchette (intervalle entre taux demandé et taux offert) est appelé taux de swap. Il apparaît dans la dernière colonne du tableau 7.3.

7.2 Les conventions de décompte des jours

La façon de décompter les jours (déjà abordée à la section 6.1) influence les paiements d'un swap. L'exemple donné précédemment négligeait ce point précis.

Considérons à nouveau les taux LIBOR 6 mois du tableau 7.1 ; ces taux sont le plus souvent en base Exact/360. Le premier paiement du swap, calculé avec un LIBOR à 2,2 %, était de 1,1 million. Ce calcul, fondé sur 0,5 an, n'était pas tout à fait exact, car il y a 184 jours entre le 8 mars 2017 et le 8 septembre de la même année. Le paiement serait en réalité de :

$$100 \times 0{,}022 \times \frac{184}{360} = 1{,}1244 \text{ million}$$

En général, le flux de la jambe variable (nom donné à la série de cash-flows à taux variable) d'un swap, fondé sur le LIBOR, est calculé comme $\frac{L \times R \times n}{360}$, où L est le principal, R est le taux LIBOR pertinent, et n est le nombre de jours depuis le paiement précédent (ou depuis la date de départ du swap s'il s'agit du premier paiement).

De la même façon, les paiements de la jambe fixe sont calculés avec une convention qui peut les faire varier au cours du temps en fonction du nombre de jours entre deux paiements successifs (tous les semestres n'ont pas le même nombre de jours). Pour le taux fixe, la base Exact/365 est la plus courante. On remarque alors que, si cette base est utilisée, les deux taux ne sont pas directement comparables ; le taux LIBOR doit être multiplié par 365/360 pour être comparé au taux fixe, ou le taux fixe doit être multiplié par 360/365 pour être comparé au taux variable. Pour des raisons pédagogiques, nous ferons abstraction de ce point dans les exemples de ce chapitre.

7.3 La confirmation

La confirmation est un document à valeur légale qui spécifie les termes du contrat et qui est signé par les deux parties. L'élaboration de ces documents doit beaucoup à

l'International Swaps and Derivatives Association (www.isda.org). L'encadré 7.1 récapitule les points essentiels de ce document, pour le swap hypothétique entre Apple et Citigroup du début de ce chapitre. La confirmation spécifie en particulier que si une date de paiement tombe un week-end, le paiement aura lieu le jour ouvré qui suit. Par exemple le 8 septembre 2018 est un samedi ; le paiement sera effectivement réalisé le lundi 10 septembre.

Encadré 7.1 Extrait d'une confirmation pour un swap entre Apple et Citigroup

Date de transaction	1er mars 2017
Date de départ	8 mars 2017
Convention jours ouvrés	Suivant
Calendrier jours ouvrés	US
Date de fin	8 mars 2020
Paiements fixes	
Payeur du taux fixe	Apple
Principal du fixe	100 millions USD
Taux fixe	3 %
Décompte des jours	Exact/365
Dates de paiement	8 mars et 8 septembre de chaque année, commençant le 8 septembre 2017 jusqu'au 8 mars 2020 inclus
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Citigroup
Principal du variable	100 millions USD
Taux variable	LIBOR 6 mois sur USD
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	8 mars et 8 septembre de chaque année, commençant le 8 septembre 2017 jusqu'au 8 mars 2020 inclus

Le premier groupe d'informations spécifie la convention utilisée si une date de paiement est un jour férié ou un week-end. Dans ce cas, le paiement est réalisé le premier jour ouvré qui suit la date de paiement prévue. Les jours fériés entrant dans l'application de la convention jours ouvrés sont ceux du calendrier américain dans cet exemple [3].

3. Il existe aussi une convention appelée « jour suivant modifié » Elle stipule que si le jour ouvré suivant n'appartient pas au même mois, le paiement sera effectué le jour précédant la date de paiement convenue. Les conventions « jour précédent » et « jour précédent modifié » sont définies de manière analogue.

7.4 L'avantage comparatif

La popularité des swaps est souvent justifiée par l'argument de l'avantage comparatif. Pour un couple d'entreprises donné, la facilité relative d'accès aux marchés des emprunts à taux fixe et à taux variable n'est pas la même. Chaque entreprise aura donc intérêt à emprunter sur le marché qui lui est le plus favorable, quitte ensuite à faire un swap avec l'autre si le type d'endettement contracté (fixe ou variable) ne lui convient pas.

Illustration

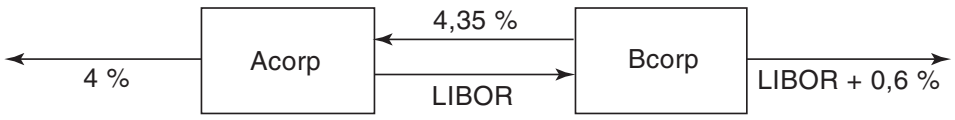
Deux entreprises, Acorp et Bcorp, souhaitent emprunter 10 millions d'euros pour 5 ans. Les taux qu'elles se voient proposer pour cet emprunt sont reportés dans le tableau 7.4.

Tableau 7.4 : Taux d'emprunt d'Acorp et Bcorp expliquant l'argument de l'avantage comparatif

	Fixe	Variable
Acorp	4,0 %	LIBOR −10
Bcorp	5,2 %	LIBOR +60

Acorp a un rating AAA, alors que Bcorp est notée BBB [4]. Cette dernière souhaite emprunter à taux fixe alors que Acorp préférerait un emprunt à taux variable, fondé sur le LIBOR 6 mois. Bien sûr, les conditions d'emprunt sont plus défavorables sur les deux marchés pour Bcorp, puisque cette entreprise a un rating plus faible.

L'élément clé qui conduit à l'utilisation d'un swap est le fait que la différence entre les taux auxquels les deux entreprises peuvent emprunter n'est pas la même sur les deux marchés. Elle vaut 1,2 % sur le taux fixe mais seulement 0,7 % sur le taux variable. Bcorp a de ce fait un avantage comparatif sur le taux variable [5], et Acorp un avantage sur le marché à taux fixe. Acorp va donc emprunter au taux fixe de 4 %, Bcorp au taux variable LIBOR + 60, et les deux sociétés vont conclure le swap décrit dans le graphique 7.7.



Graphique 7.7 : Swap entre Acorp et Bcorp sur la base des taux du tableau 7.4

4. Les notes attribuées par les agences S&P et Fitch (dans l'ordre décroissant de qualité) sont AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC. Les notes correspondantes pour Moody's sont Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B et Caa.

5. Ce qui ne signifie pas, comme on peut le voir dans le tableau 7.4, que son taux d'emprunt est plus faible que celui d'Acorp sur ce marché. On pourrait aussi dire que Bcorp est moins pénalisée sur le marché à taux variable que sur le marché à taux fixe.

Acorp paiera le LIBOR 6 mois sur un principal de 10 millions, et Bcorp paiera un taux fixe de 4,35 % sur le même principal. Acorp a donc trois types de cash-flows :

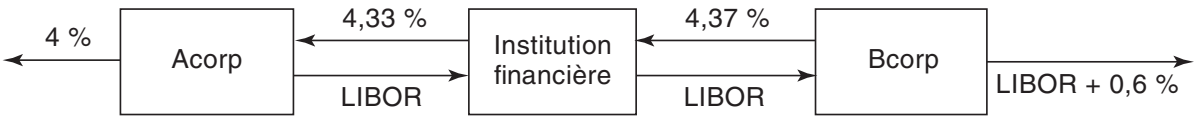
1. Paiement de 4 % au prêteur ;
2. Réception de 4,35 % dans le cadre du swap ;
3. Paiement du LIBOR dans le cadre du swap.

En définitive, le résultat de ces opérations revient à emprunter à LIBOR – 35, soit 25 points de base de moins que le taux proposé initialement.

Les cash-flows reçus ou payés par Bcorp sont les suivants :

1. Paiement de LIBOR + 60 au prêteur ;
2. Réception de LIBOR dans le cadre du swap ;
3. Paiement de 4,35 % dans le cadre du swap.

Globalement, c'est comme si Bcorp avait emprunté à un taux fixe de 4,95 %, soit 25 points de base de moins que le taux fixe initial. Par le swap, chaque entreprise a gagné 25 points de base. Si les deux entreprises avaient eu recours à un intermédiaire financier, le résultat aurait pu être celui du graphique 7.8. Dans ce cas, Acorp emprunterait à LIBOR –33, Bcorp à 4,97 %. Chaque entreprise gagne 23 points de base et l'intermédiaire 4 points, ce qui donne toujours un total de 50 points de base.



Graphique 7.8 : Swap entre Acorp et Bcorp sur la base des taux du tableau 7.4 avec un intermédiaire

Critique de l'argument de l'avantage comparatif

La question est de savoir pourquoi, dans le tableau 7.4, le spread de taux fixe (1,2 %) est supérieur au spread de taux variable (0,7 %). Alors que le marché des swaps existe depuis longtemps, on peut s'étonner que de telles différences existent encore.

Une des explications concerne la nature des contrats sur chacun des deux marchés. Sur le marché à taux fixe, comme son nom l'indique, le taux est fixé pour toute la durée de l'emprunt. Ce taux est modifié tous les six mois sur le marché à taux variable. Si la note de l'emprunteur vient à se dégrader, le prêteur a la possibilité de modifier l'écart de taux par rapport au LIBOR (qui est au départ de $-0{,}1$ % pour Acorp et 0,6 % pour Bcorp [6]). Les spreads de taux entre les deux sociétés reflètent la différence de qualité entre les deux emprunteurs, résumée par les ratings. Dans les six mois, la probabilité de défaut est minime pour chacune des deux entreprises. À plus long terme, la probabilité

6. Lorsque cet écart est fixé irrévocablement dès le départ, l'avantage comparatif est nul ou très marginal.

de défaut augmente plus rapidement pour Bcorp que pour Acorp, ce qui peut expliquer pourquoi l'écart de taux est plus faible pour les taux variables.

Après négociation du swap, il apparaît que Bcorp emprunte à 4,97 % sur cinq ans. Ce n'est pas tout à fait vrai si la notation se dégrade, car le spread par rapport au LIBOR peut augmenter. S'il passe par exemple à 1,6 %, le taux fixe de Bcorp devient 5,97 %. De fait, le coût espéré de l'emprunt est supérieur à 4,97 %.

Le swap du graphique 7.8 fixe le taux d'emprunt d'Acorp à LIBOR $--33$ pour toute la durée du swap, ce qui est avantageux par rapport au LIBOR -10 initial. L'inconvénient est que l'entreprise supporte le risque de défaut de l'intermédiaire, ce qui n'aurait pas été le cas si elle avait emprunté directement à taux variable.

7.5 L'évaluation des swaps de taux

Nous abordons maintenant l'évaluation des swaps de taux. Au moment où un swap est conclu, sa valeur est nulle, mais par la suite, elle peut devenir négative ou positive. L'évaluation d'un swap peut être assimilée, comme nous l'avons vu, à celle d'un portefeuille de FRA.

Les FRA ont été introduits au chapitre 4. Ce sont des accords pour l'application d'un taux d'intérêt défini, à un principal donné, pour une période future spécifiée. Nous avons montré qu'un FRA peut être vu comme un accord d'échange entre un taux déterminé et un taux de marché pour la période définie par le contrat. Cela montre qu'un swap n'est rien d'autre qu'un portefeuille de FRA. Le swap entre Citigroup et Apple, décrit au graphique 7.1, engage chacune des deux parties dans une série de six cash-flows. Considérons la position d'Apple ; le premier échange de flux est connu à la date de négociation du swap, et les cinq autres peuvent être analysés comme des FRA. Par exemple, l'opération du 8 mars 2018 est un FRA échangeant un taux fixe de 3 % contre le LIBOR 6 mois observé le 8 septembre 2017. Les autres échanges s'interprètent de la même façon.

Comme nous l'avons vu à la section 4.9, un FRA peut être évalué en supposant que les taux forward seront effectivement les taux spot futurs. On procède alors de la façon suivante.

1. Pour chaque taux LIBOR déterminant les cash-flows du swap, on calcule le taux forward correspondant.
2. On évalue chaque cash-flow en supposant que le taux LIBOR futur sera le taux forward observé aujourd'hui.
3. La valeur du swap est la somme de ces cash-flows actualisés aux taux sans risque.

■ **Exemple 7.1** Considérons un swap où une institution financière reçoit le LIBOR 6 mois et paie un taux fixe de 3 % (en composition semestrielle) sur un swap de principal 100 millions d'euros. On suppose que ce swap a une maturité résiduelle de 15 mois. Les dates de paiement restantes sont donc dans 3, 9 et 15 mois. Les taux sans risque continus pour ces trois maturités sont respectivement 2,8 %, 3,2 % et 3,4 %. On suppose que les taux forward LIBOR pour les périodes 3 à 9 mois et

9 à 15 mois sont respectivement de 3,4 % et 3,7 % en composition continue. Ces deux taux deviennent 3,429 % et 3,734 % en composition semestrielle.
Lors du dernier paiement, le LIBOR 6 mois était de 2,9 % (en composition semestrielle). Les calculs sont résumés sur le tableau suivant.

Tableau 7.5 : Évaluation d'un swap comme portefeuille de FRA (en millions de dollars US). Les flux variables sont calculés en supposant que les taux futurs seront les taux forward observés aujourd'hui.

Date	Cash-flow fixe	Cash-flow variable	Cash-flow net	Facteur d'actualisation	Valeur actuelle nette
0,25	−1,5	1,4500	−0,0050	0,9930	−0,0497
0,75	−1,5	1,7145	+0,2145	0,9763	+0,2094
1,25	−1,5	1,8672	+0,3672	0,9584	+0,3519
Total					+0,5117

La première ligne indique les cash-flows qui seront échangés dans trois mois. Ils sont déjà connus quand le swap est conclu. La jambe à taux fixe engendre un cash-flow de $100 \times 0{,}030 \times 0{,}25 = 1{,}5$ million. Le taux variable est de 2,9 % conduisant à un cash-flow de $100 \times 0{,}029 \times 0{,}25 = 1{,}45$ million.
La seconde ligne du tableau donne les cash-flows qui seront échangés dans 9 mois en supposant que les taux forward sont les taux spot futurs réalisés. Le cash-flow à taux variable fait donc intervenir le taux forward calculé comme suit :

$$\frac{0{,}032 \times 0{,}75 - 0{,}028 \times 0{,}25}{0{,}5} = 0{,}034$$

soit 3,4 % en composition continue. L'équation (4.4) donne un taux semestriel équivalent de 3,429 %. La valeur du FRA correspondant à l'échange de flux dans neuf mois est donc (en millions) :

$$100 \times 0{,}03429 \times 0{,}5 = 1{,}7145$$

La même démarche appliquée à l'échange dans quinze mois donne les flux de la troisième ligne du tableau 7.6. Les facteurs d'actualisation pour ces trois flux sont respectivement :

$$\mathrm{e}^{-0{,}028\times 0{,}25},\ \mathrm{e}^{-0{,}032\times 0{,}75},\ \mathrm{e}^{-0{,}034\times 1{,}25}$$

La valeur actuelle des flux nets dans 3 mois est donc $-0{,}0497$ million. Les valeurs des deux FRA suivants dans 9 et 15 mois sont 0,2094 et 0,3519 millions. La valeur totale du swap est alors 0,5117 million.

Taux forward LIBOR et bootstrap

Le bootstrap a été utilisé pour calculer des taux zéro-coupon (tels que les taux OIS utiles à l'évaluation) dans la section 4.7. Nous montrons maintenant une variante du bootstrap

qui permet de calculer les taux forward LIBOR. Les cotations des FRA servent à obtenir les taux forward LIBOR pour les maturités courtes et les cotations des swaps les taux pour des maturités plus longues.

■ **Exemple 7.2** Supposez que les taux zéro-coupon OIS (en composition continue) pour les maturités de 6, 12, 18 et 24 mois soient respectivement égaux à 3,8 %, 4,3 %, 4,6 % et 4,75 %. Supposez de plus que le taux LIBOR 6 mois soit de 4 % en composition semestrielle. Le taux forward LIBOR à 6 mois dans 6 mois est de 5 %, et celui à 6 mois dans 12 mois est de 5,5 %. Nous montrons ci-après comment se calcule le taux forward LIBOR à 6 mois dans 18 mois.

Supposez un taux de swap à 2 ans de 5 %. La valeur d'un swap à 2 ans recevant 5 % et payant le LIBOR est donc nulle. Ce swap peut être évalué en supposant que les taux forward sont égaux aux taux spot futurs. En supposant que le principal du swap est égal à 100, la valeur du premier paiement sera égale à :

$$0{,}5 \times (0{,}04 - 0{,}05) \times 100 \times \mathrm{e}^{-0{,}038 \times 0{,}5} = -0{,}4906$$

celle du second paiement à :

$$0{,}5 \times (0{,}05 - 0{,}05) \times 100 \times \mathrm{e}^{-0{,}043 \times 1} = 0$$

et celle du troisième à :

$$0{,}5 \times (0{,}055 - 0{,}05) \times 100 \times \mathrm{e}^{-0{,}046 \times 1{,}5} = 0{,}2333$$

La valeur cumulée des trois paiements est de $-0{,}4906 + 0 + 0{,}2333 = -0{,}2573$. Notons F la valeur inconnue du dernier paiement. Pour que la valeur du swap soit nulle il faut que :

$$0{,}5 \times (F - 0{,}05) \times 100 \times \mathrm{e}^{-0{,}0475 \times 2} = 0{,}2573$$

On en déduit $F = 0{,}05566$, ou encore 5,5566 %.

En pratique, l'évaluation d'un swap comme celui de l'exemple 7.2 nécessite une interpolation entre les taux forward estimés. Par exemple, le taux à 6 mois dans 9 mois est estimé comme la moyenne des taux à 6 mois dans 12 et 18 mois.

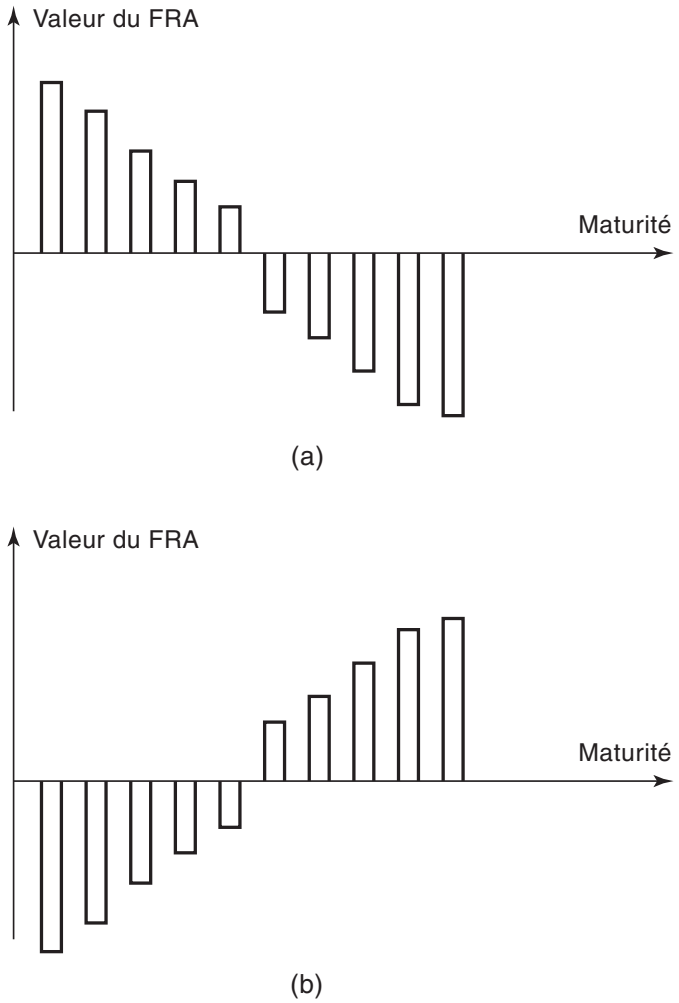
7.6 Évolution de la valeur d'un swap au cours du temps

Précisons que, si la valeur d'un swap est nulle à la date de départ, les valeurs des FRA qui le composent ne le sont pas. C'est la somme de ces valeurs qui s'annule. Certains FRA auront donc une valeur positive et d'autres une valeur négative. Pour le swap du graphique 7.1 entre Apple et Citigroup, la valeur de chaque FRA pour Apple est négative si le taux forward correspondant est inférieur à 3 %, et positive si ce taux est supérieur à 3 %.

Considérons une structure par termes des taux ZC croissante au moment où le swap est conclu. Les taux forward sont donc aussi croissants avec l'éloignement dans le temps.

Comme la somme de la valeur des FRA est nulle, le taux forward doit être inférieur à 3 % pour les maturités proches, et supérieur à cette valeur pour les maturités éloignées. Si la structure par termes est décroissante, la relation est inversée. Le graphique 7.9 résume ces deux situations.

Dans (a), la structure par termes est croissante et le taux fixe est reçu, ou la structure par termes est décroissante et le taux variable est reçu. Dans (b), la structure par termes est croissante et le taux variable est reçu, ou la structure par termes est décroissante et le taux fixe est reçu.



Graphique 7.9 : Valeur des FRA composant le swap en fonction de la maturité. Sur le graphique (a), la structure par termes est croissante et le taux fixe est reçu, ou la structure par termes est décroissante et le taux variable est reçu. Sur le graphique (b), soit la structure par termes est croissante et le taux variable est reçu, soit la structure par termes est décroissante et le taux fixe est reçu.

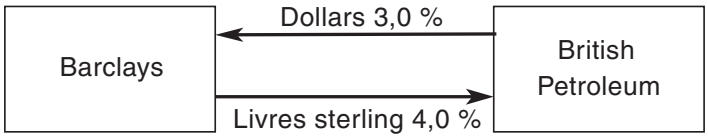
7.7 Les swaps de devises (fixe contre fixe)

Sous sa forme la plus simple, un swap de devises implique l'échange d'un principal et d'intérêts dans une devise contre un principal et des intérêts dans une autre. Un swap de devises nécessite de spécifier le principal dans chacune des deux devises. Ces

sommes sont échangées au début et à la fin de la durée de vie du swap. En général, ces montants sont choisis de façon à être équivalents au début du contrat, mais ils peuvent être très différents à la fin du contrat.

Illustration

Considérons un swap de devises hypothétique à 5 ans entre Barclays et British Petroleum, débutant le 1er février 2017. British Petroleum paie un intérêt de 3 % par an en dollars à Barclays et reçoit de sa part 4 % en livres sterling. Les principaux sont respectivement égaux à 15 millions de dollars US et 10 millions de livres sterling. Les intérêts sont payés une fois par an. Ce swap est décrit dans le graphique 7.10.



Graphique 7.10 : Swap de devises

À la date initiale, les principaux s'échangent dans le sens inverse des flèches apparaissant sur le graphique. En revanche, les intérêts payés pendant la durée de vie du swap et l'échange final de principal vont dans le sens des flèches. Par conséquent, au démarrage, Barclays paie 15 millions de dollars US à British Petroleum, qui lui paie 10 millions de livres sterling. Chaque année, Barclays reçoit 0,45 million de dollars US (3 % de 15 millions de dollars US) et paie 0,4 million de livres sterling (4 % de 10 millions de livres sterling). À la fin du swap, Barclays paie un principal de 10 millions de livres sterling et reçoit 15 millions de dollars US. Ces cash-flows sont résumés dans le tableau 7.6.

Tableau 7.6 : Flux du swap de devises pour Barclays

Dates	Flux en dollars US (millions)	Flux en livres sterling (millions)
1er février 2017	15,00	10,00
1er février 2018	−0,45	0,40
1er février 2019	−0,45	0,40
1er février 2020	−0,45	0,40
1er février 2021	−0,45	0,40
1er février 2022	−15,45	10,40

Utilisation d'un swap de devises pour transformer actifs et emprunts

Un swap comme celui que nous venons de décrire peut être utilisé pour transformer un emprunt dans une devise en un emprunt dans une autre devise. Supposons que British

Petroleum puisse émettre 10 millions de livres sterling d'obligations au taux de 4 %. Le swap a pour effet de transformer cet emprunt en un emprunt de 15 millions de dollars au taux de 3 %. L'échange initial a pour résultat de convertir les 10 millions de livres sterling de l'emprunt en 15 millions de dollars US. Les échanges suivants correspondent au paiement des intérêts et au remboursement du principal en dollars.

Un swap peut aussi être utilisé pour transformer la nature des actifs. Supposons que British petroleum puisse investir 15 millions de dollars aux États-Unis à 3 % par an pour les cinq prochaines années, mais pense que la livre sterling va se renforcer par rapport au dollar pendant ce temps. Le swap a pour effet de transformer l'investissement en dollars en un investissement en livres sterling à 4 %.

L'avantage comparatif

Les swaps de devises peuvent, comme les swaps de taux, être motivés par un argument d'avantage comparatif. Pour illustrer ce point, considérons un autre exemple hypothétique. Les coûts d'emprunt à taux fixe pour cinq ans en dollars australiens et en dollars US pour General Electric et Qantas Airways sont donnés dans le tableau 7.8. Ces données suggèrent que les taux australiens sont plus élevés que les taux US. De même, General Electric peut emprunter à des taux moins élevés dans les deux devises. Le point intéressant du tableau 7.7 est que le spread entre les deux entreprises n'est pas le même sur le dollar australien et sur le dollar US. Qantas Airways paie 2 % de plus en dollars US, mais seulement 0,4 % de plus en dollars australiens.

Tableau 7.7 : Taux d'emprunt d'Acorp et Bcorp

	Dollar US*	**Dollar australien***
General Electric	5 %	7,6 %
Qantas Airways	7 %	8 %

(*) Les taux, ajustés, tiennent compte des différentiels de taxation

La situation du tableau 7.7 est analogue à celle du tableau 7.4. Qantas Airways a un avantage comparatif pour les emprunts en dollars australiens et General Electric pour les emprunts en dollars US. Supposons donc que General Electric souhaite emprunter 20 millions de dollars australiens et Qantas Airways 15 millions de dollars US et que le taux de change soit de 0,75 dollar US/australien. En fait, chacune des deux entreprises va emprunter sur le marché sur lequel elle a un avantage comparatif, et les deux vont conclure un swap qui transformera l'emprunt de General Electric en un emprunt en dollars australiens et celui de Qantas Airways en un emprunt en dollars US. Par analogie avec les swaps de taux des sections précédentes, on s'attend à ce que le gain total du swap soit de 1,6 %, qui est la différence entre les spreads sur les deux marchés.

Le graphique 7.11 illustre une façon d'organiser le swap avec une institution financière comme intermédiaire.

Graphique 7.11 : Swap dont l'origine est l'avantage comparatif

General Electric emprunte des dollars US et Qantas Airways des dollars australiens. L'effet du swap est de transformer la dette en dollars US à 3 % de General Electric en une dette en dollars australiens à 6,9 %. Le gain est donc de 0,7 % pour General Electric. De même, la dette de Qantas Airways en dollars australiens à 8 % est transformée en une dette en dollars US à 6,3 %, ce qui représente un gain de 0,7 %. L'institution financière intermédiaire gagne 1,3 % sur ses cash-flows en dollars US et perd 1,1 % sur ses cash-flows en dollars australiens. Si on ignore la différence entre les deux devises, le gain net est de 0,2 %. Globalement, le gain pour l'ensemble des parties est bien de 1,6 %.

Chaque année, l'institution intermédiaire gagne 195 000 $ (1,3 % de 15 millions de dollars US) et perd 220 000 dollars australiens (1,1 % de 20 millions de dollars australiens). Elle peut se couvrir contre le risque de change en prenant une position longue sur un contrat forward pour 220 000 dollars australiens. Cela permet de fixer le profit en dollars US.

7.8 L'évaluation des swaps de devises

Chaque paiement d'un swap de devises peut être considéré comme un contrat forward. Comme nous l'avons vu dans la section 5.7, les contrats forward sur devises peuvent être évalués en supposant que les taux forward sont égaux aux taux spots futurs. Un swap de devises fixe contre fixe peut donc s'évaluer en faisant cette même hypothèse.

■ **Exemple 7.3** Supposons qu'une structure par termes des taux est plate à la fois au Japon et aux États-Unis. Les taux japonais sont à 1,5 % et les taux US à 2,5 % (les deux taux sont composés en continu). Une institution financière a conclu un swap à paiements annuels par lequel elle reçoit 3 % en yens et paie 4 % en dollars US. Les principaux sont de 10 millions de dollars US et de 1,2 milliard de yens. Le swap a encore une durée de vie de trois ans et le taux de change actuel est de 110 ¥ pour 1 $. L'institution financière paie donc $0{,}04 \times 10 = 0{,}4$ million de dollars et reçoit $1\,200 \times 0{,}03 = 36$ millions de yens chaque année. De plus, à la fin de l'année 3, elle paie le principal de 10 millions de dollars et reçoit le principal de 1,2 milliard de yens. Le taux de change actuel est de $1/110 = 0{,}009091$ dollar par yen. Dans ce cas, $r = 2{,}5$ % et $r_f = 1{,}5$ %, de sorte que le taux de change forward à un an est égal à $0{,}009091\, e^{(0{,}025-0{,}015)\times 1} = 0{,}009182$. Les taux à deux et trois ans sont calculés de la même façon et apparaissent dans le tableau 7.8. Les contrats forward sous-jacents au swap peuvent être évalués en supposant que les taux de change forward sont les taux spot futurs réalisés. Si le taux de change forward à un an est le taux spot dans un an, la valeur du cash-flow dans un an sera de $36 \times 0{,}009182 = 0{,}3306$ million de dollars et le cash-flow net à la fin de l'année 1 sera de $0{,}3306 - 0{,}4 = -0{,}0694$ million de dollars. La valeur actuelle (au taux continu de 2,5 %) de cette somme est de $-0{,}0677$ million de dollars. C'est la valeur du contrat forward lié à l'échange

de flux à la fin de l'année 1. La valeur des autres contrats forward se calcule de la même manière. Comme on peut le voir sur le tableau 7.8, la valeur totale des contrats forward est égale à 0,9629 million de dollars.

Tableau 7.8 : Évaluation d'un swap de devises (en millions de dollars US). Les flux variables sont calculés en supposant que les taux futurs seront les taux forward observés aujourd'hui.

Date (année)	Cash-flow en $	Cash-flow en ¥	Taux de change forward en $	Valeur en $ du cash-flow en ¥	Cash-flow net	Valeur actuelle
1	−0,4	36	0,009182	0,3306	−0,0694	−0,0677
2	−0,4	36	0,009275	0,3339	−0,0661	−0,0629
3	−10,4	1 236	0,009368	11,5786	1,1786	1,0934
Total						+0,9629

La valeur d'un swap de devises est normalement nulle au moment où le contrat est conclu. Si les deux principaux sont strictement équivalents à la date de départ, la valeur du swap est nulle tout de suite après cette date à laquelle a lieu le premier échange de principal. Cependant, comme dans le cas des swaps de taux, cela ne signifie pas que chacun des contrats forward qui composent le swap a une valeur nulle. On peut montrer que, quand les taux sur les deux devises sont très différents, le payeur de la devise à taux plus faible est dans une position dans laquelle les contrats forward de courte maturité ont une valeur positive pour lui et ceux de maturité plus longue ont une valeur négative, en particulier le contrat correspondant à l'échange final de principal. Le payeur de la devise à taux d'intérêt plus élevé est dans une position symétrique.

Pour le payeur de la devise à taux faible, le swap aura tendance à avoir une valeur négative pendant une grande partie de sa durée de vie. En effet, dès que les premiers échanges à valeur positive ont été réalisés, les suivants ont une valeur négative, en particulier l'échange du principal. La situation est symétrique pour le payeur de la devise à taux d'intérêt élevé. Cette remarque est importante dès qu'il s'agit de prendre en compte le risque de crédit.

L'évaluation comme portefeuille d'obligations

Un swap de devises fixe contre fixe peut aussi être évalué comme un portefeuille long-short d'obligations. Notons V_{swap} la valeur du swap en devise domestique dans le cas où celle-ci est reçue et où la devise étrangère est payée. On peut alors écrire :

$$V_{swap} = B_D - S_0 B_F$$

où B_F est la valeur, en devise étrangère, de l'obligation libellée en devise étrangère sous-jacente au swap, et B_D est la valeur en devise domestique de l'obligation domes-

tique correspondante. S_0 est le taux de change spot (en nombre d'unités monétaires domestiques par unité monétaire étrangère).

En utilisant les taux LIBOR de chacune des deux devises, on peut évaluer les obligations et donc le swap. La valeur du swap est l'opposé de la précédente si la devise étrangère est reçue et la devise domestique payée. Dans ce cas, on est dans la situation de l'exemple 7.4.

■ **Exemple 7.4** Considérons à nouveau la situation de l'exemple 7.3. Supposons qu'une structure par termes des taux est plate à la fois au Japon et aux États-Unis. Les taux japonais sont à 1,5 % et les taux US à 2,5 % (les deux taux sont composés en continu). Une institution financière a conclu un swap à paiements annuels par lequel elle reçoit 3 % en yens et paie 4 % en dollars US. Les principaux sont de 10 millions de dollars US et de 1,2 milliard de yens. Le swap a encore une durée de vie de trois ans et le taux de change actuel est de 110 ¥ pour 1 $. Les calculs de cette opération sont résumés dans le tableau 7.9.

Tableau 7.9 : Évaluation d'un swap comme portefeuille d'obligations en millions de dollars US). Les flux variables sont calculés en supposant que les taux futurs seront les taux forward observés aujourd'hui.

Date	Cash-flows sur l'obligation en $	Valeur actuelle (en $)	Cash-flows sur l'obligation en ¥	Valeur actuelle (¥)
1	0,4	0,3901	36	35,46
2	0,4	0,3805	36	34,94
3	10,4	9,6485	1,236	1 181,61
Total		10,4191		1 252,01

7.9 Le risque de crédit

Les swaps sont des contrats entre deux entreprises ou institutions financières et, de ce fait, ne sont pas exempts de risque de crédit, notamment lorsqu'ils ne sont pas compensés par l'intermédiaire d'une CCP. Considérons la transaction bilatérale du graphique 7.3 entre Intel et Citigroup. Si aucune des deux contreparties ne fait défaut, la position est sans risque. La baisse de valeur d'un des deux contrats est compensée par l'augmentation de valeur de l'autre. Cependant, la probabilité n'est pas nulle qu'une des deux contreparties connaisse des difficultés et fasse défaut. Supposons que, quelques mois après le début du contrat, la position de Citigroup vis-à-vis d'Apple ait une valeur positive et qu'Intel fasse défaut. Citigroup est susceptible de perdre toute la valeur du contrat. Une entreprise engagée dans un swap ne supporte un risque de crédit que lorsque la valeur du swap est positive pour elle. Que se passe-t-il quand la valeur est négative et que la contrepartie connaît des difficultés ? En théorie, l'entreprise devrait

faire un gain en s'affranchissant de son engagement. En pratique, la société en difficulté cherchera à revendre son contrat à un tiers, de façon que la valeur positive du contrat ne soit pas perdue. Le scénario le plus réaliste, pour résumer, est que si la contrepartie fait défaut, alors que le contrat a une valeur positive, l'entreprise subira une perte ; mais si la valeur est négative, il n'y aura pas d'effet, en vertu du mécanisme de cession que nous venons d'évoquer.

Les pertes potentielles en cas de défaut sur un swap sont cependant beaucoup moins importantes que celles sur un emprunt de même principal. En effet, la valeur du swap est bien inférieure à celle de l'emprunt correspondant (en particulier puisque le principal n'a pas été prêté). Les pertes potentielles sur un swap de devises sont plus importantes que celles sur un swap de taux car les principaux, dans deux devises différentes, sont échangés en fin de vie du swap.

Dans tout contrat, il est important de distinguer le risque de crédit du risque de marché. Le risque de crédit a pour origine une probabilité de défaut non nulle de la part des contreparties. Le risque de marché vient de la possibilité que les taux de change ou d'intérêt évoluent de façon que la valeur du contrat devienne négative pour l'entreprise. Le risque de marché peut être géré, voire éliminé par d'autres contrats, alors que les risques de crédit sont moins faciles à transférer.

L'un des cas les plus curieux sur le marché des swaps est celui de Hammersmith et Fulham (voir encadré 7.2). Il montre que, au-delà des risques de marché et de crédit, les banques qui contractent des swaps peuvent aussi supporter des risques légaux.

Encadré 7.2 L'histoire de Hammersmith et Fulham

Entre 1987 et 1989, l'antenne londonienne de Hammersmith et Fulham a contracté plus de 600 swaps de taux pour un montant avoisinant les 6 milliards de livres sterling. Les transactions ont été réalisées de manière spéculative, plutôt que pour couvrir des positions. Les deux employés responsables de ces prises de position semblaient n'avoir qu'une compréhension approximative des risques qu'ils prenaient et du fonctionnement du marché. En 1989, suite aux mouvements des taux britanniques, Hammersmith et Fulham perdit plusieurs centaines de millions de livres sterling. Pour les banques contreparties, ces opérations avaient donc une valeur de plusieurs centaines de millions, mais elles s'inquiétaient du risque de crédit. En effet, pour elles, il s'agissait d'opérations de couverture, mais, si Hammersmith et Fulham faisait défaut, elles devraient honorer leurs engagements vis-à-vis de leurs autres partenaires et subiraient une perte importante. Ce qui arriva fut un peu différent d'une situation de défaut. L'auditeur de Hammersmith et Fulham demanda l'annulation de ces transactions, en arguant du fait que l'entreprise n'avait pas le droit de les conclure. Les tribunaux furent de cet avis. En appel, le cas vint devant la chambre des Lords qui confirma la première décision. Il va sans dire que les contreparties furent très dépitées de l'annulation de ces contrats par les tribunaux.

7.10 Les swaps de défaut (CDS)

Depuis 2000, le marché des swaps de défaut (notés CDS pour *Credit Default Swap*) s'est considérablement développé. Un CDS est un contrat qui permet aux entreprises de couvrir les risques de crédit de la même manière qu'elles couvrent les risques de marché depuis de nombreuses années. Un CDS joue un rôle de contrat d'assurance si une société ou un pays fait défaut. La société ou le pays est appelé entité de référence. L'acheteur du CDS paie au vendeur une prime d'assurance périodique, appelée *spread du CDS*, jusqu'à l'échéance du contrat ou jusqu'au défaut de l'entité de référence. Supposons que le notionnel d'un CDS soit de 100 millions d'euros et que le CDS ait une maturité de 5 ans avec un spread de 120 points de base. La prime d'assurance sera de 1,2 millions d'euros par an. Si l'entité de référence ne fait pas défaut au cours des 5 dernières années, rien n'est reçu en retour. Si l'entité de référence fait défaut et les obligations émises par cette entité de référence cotent 40 cents par dollar de nominal immédiatement après le défaut, le vendeur de protection doit payer à l'acheteur 60 millions d'euros. L'idée ici est que, si l'acheteur de protection qui détient un portefeuille d'obligations d'un montant de 100 M€ émis par l'éntité de référence, le payoff lié à la protection doit être suffisant pour ramener la valeur du portefeuille à 100 millions d'euros. Les swaps de défaut sont examinés plus en détail au chapitre 25.

Résumé

Les deux types de swaps les plus courants sont les swaps de taux et les swaps de devises. Dans un swap de taux, une des parties s'engage à payer à l'autre un taux fixe, sur un principal donné, pendant un nombre d'années spécifié. En retour, l'autre partie s'engage à payer un taux variable sur le même principal pendant la même période. Dans un swap de devises, l'une des parties s'engage à payer à l'autre un intérêt sur un principal dans une devise et reçoit en retour un intérêt sur un principal dans une devise différente.

Dans un swap de taux, il n'y a pas en général d'échange de principal. À l'inverse, dans un swap de devises, les principaux sont échangés au début et à la fin du contrat. La partie qui paie l'intérêt dans la devise étrangère reçoit le principal dans cette devise au début du contrat et paie le principal dans la devise domestique à cette même date. À la fin du swap, les échanges se font dans l'autre sens.

Un swap de taux peut être utilisé pour transformer un emprunt à taux fixe en emprunt à taux variable, et réciproquement. Il peut aussi être employé pour transformer un investissement à taux fixe en investissement à taux variable, et réciproquement. Un swap de devises peut servir à transformer un emprunt dans une devise en un emprunt dans une autre devise, ou un investissement dans une devise en un investissement dans une autre.

Il y a deux façons d'évaluer les swaps. La première consiste à analyser le swap comme une position longue sur une obligation, combinée avec une position courte sur une autre obligation. La seconde revient à considérer le swap comme un portefeuille de contrats forward (FRA).

Références complémentaires

Alm, J. et F. Lindskog, "Foreign Currency Interest Rate Swaps in Asset-Liability Management for Insurers", *European Actuarial Journal*, 3, 2013, 133-58.

Corb, H. *Interest Rate Swaps and Other Derivatives*, Columbia University Press, New York, 2012.

Flavell R., *Swaps and Other Instruments*, Wiley, Chichester, 2002.

Johannes, M. et S. Sundaresan "The Impact of Collateralization on Swap Rates", *Journal of Finance*, 61 (1), février 2007, 383-410.

Litzenberger R. H., "Swaps, Plain and Fanciful", *Journal of Finance*, 47 (3), 1992, 831-850.

Memmel, C. et A. Schertler, "Bank Management of the Net Interest Margin : New Measures", *Financial Markets and Portfolio Management*, 27 (3), 2013, 275-97.

Purnanandan, A. "Interest Rate Derivatives at Commercial Banks : An Empirical Investigation", *Journal of Monetary Economics*, 54, 2007, 1769-1808.

Problèmes et exercices

7.1 Les entreprises A et B se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variable sur 20 millions d'euros pour cinq ans.

	Taux fixe	Taux variable
Entreprise A	5,0 %	LIBOR + 10
Entreprise B	6,4 %	LIBOR + 60

L'entreprise A cherche à emprunter à taux variable et l'entreprise B à taux fixe. Construisez un swap avec un intermédiaire qui gagnera 10 points de base, de façon que le swap soit aussi attractif pour A et B.

7.2 Un swap sur un principal de 100 millions a encore une durée de vie de 10 mois. Selon les termes du contrat, un taux LIBOR 6 mois est échangé contre un taux fixe de 4 % par an (en composition semestrielle). Le milieu de fourchette des taux (continus) de swap offerts et demandés est identique pour toutes les maturités et vaut 3 %. Le LIBOR 6 mois était il y a deux mois à 2,6 %. Quelle est la valeur du swap aujourd'hui pour la partie qui paie le taux variable ? Quelle est sa valeur pour la partie qui paie le taux fixe ?

7.3 L'entreprise X cherche à emprunter des dollars US à taux fixe, alors que l'entreprise Y veut emprunter des yens à taux fixe. Au taux de change d'aujourd'hui, le principal des emprunts est identique. Les taux qui leur sont proposés (on supposera que les différences fiscales ont déjà été intégrées) sont les suivants :

	Yen	Dollar US
Entreprise X	5,0 %	9,6 %
Entreprise Y	6,5 %	10,0 %

Construisez un swap qui laissera 50 points de base de profit à l'intermédiaire. Arrangez-vous pour que ce swap soit également attractif pour X et Y, et pour que le risque de change soit uniquement supporté par l'intermédiaire.

7.4 Expliquez ce qu'est un taux de swap à 7 ans.

7.5 Un swap de devises a encore 15 mois de durée de vie. Il implique l'échange des intérêts à 10 % sur 20 millions de livres sterling et des intérêts au taux de 6 % sur 30 millions de dollars US. La structure par termes des taux est plate aux États-Unis et au Royaume-Uni. Si le swap était négocié aujourd'hui, les taux seraient respectivement 4 % en dollars US et 7 % en livres sterling. Tous les taux sont exprimés en composition annuelle. Le taux de change est aujourd'hui de 1,55 dollar US par livre sterling. Quelle est la valeur du swap pour la partie qui paie la livre sterling ? Et pour la partie qui paie le dollar US ?

7.6 Expliquez la différence entre risque de crédit et risque de marché sur un contrat financier.

7.7 Un trésorier d'entreprise vous dit qu'il vient de négocier un emprunt à cinq ans au taux compétitif de 5,2 %. Pour ce faire, il a emprunté à LIBOR + 150 et réalisé un swap LIBOR contre un taux fixe de 3,7 %. Il précise qu'il a pu réaliser cette opération car sa société a un avantage comparatif sur le marché des emprunts à taux variable. Que manque-t-il dans le raisonnement ?

7.8 Une banque a conclu un swap (compensé bilatéralement) avec une entreprise, par lequel elle paie un taux fixe de 3 % et reçoit le LIBOR. Il n'y a ni garanties ni autres transactions conclues avec la même contrepartie. À quel risque de crédit la banque fait-elle face ? Pensez-vous que ce risque soit plus faible ou plus important selon que la courbe des taux a une pente positive ou négative ?

7.9 Les entreprises X et Y se voient offrir les taux annuels suivants pour des emprunts à taux fixe et à taux variable sur 5 millions d'euros à 10 ans.

	Taux fixe	Taux variable
Entreprise X	8,0 %	LIBOR
Entreprise Y	8,8 %	LIBOR

L'entreprise Y cherche à emprunter à taux fixe et l'entreprise X à taux variable. Construisez un swap dans lequel l'intermédiaire réalise un profit de 20 points de base, et qui soit également attractif pour X et Y.

7.10 Une institution financière a conclu un swap avec une entreprise X. Selon les termes du contrat, elle reçoit 4 % par an et paie le LIBOR 6 mois sur un principal de 10 millions de dollars US sur 5 ans. Les paiements sont effectués tous les 6 mois. Supposons que X fasse défaut au sixième paiement (à la fin de l'année 3), quand le taux d'intérêt (en composition semestrielle) est de 2 % par an pour toutes les maturités. Quelle est la perte pour l'institution financière ? Le LIBOR 6 mois était de 3 % au milieu de la troisième année et les taux OIS étaient à 1,8 % par an en composition continue. Les autres taux sont en composition semestrielle.

7.11 Une institution financière a contracté un swap d'une durée de 10 ans avec une entreprise Y. Selon les termes du contrat, elle reçoit 3 % par an en francs suisses et paie 8 % d'intérêts en dollars US. Les paiements ont lieu une fois par an. Les principaux sont respectivement de 7 millions de dollars US et de 10 millions de francs suisses. Supposons que Y fasse faillite à la fin de la sixième année, quand le taux de change est de 0,80 $ par franc suisse. Quel est le coût pour

l'institution financière ? Vous supposerez qu'à la fin de l'année 6, le taux est de 3 % pour toutes les maturités en francs suisses et de 8 % par an pour toutes les maturités en dollars US. Tous les taux sont exprimés en composition annuelle.

7.12 Deux entreprises, A et B, se voient proposer les taux suivants (ajustés pour les différences de fiscalité) :

	A	B
Dollar US (taux variable)	LIBOR + 50	LIBOR + 100
Dollar canadien (taux fixe)	5 %	6,5 %

Supposons que A cherche à emprunter en dollars US à taux variable et que B souhaite emprunter en dollars canadiens à taux fixe. Une institution monte un swap dans lequel elle retirera 50 points de base de profit. Si le swap est également attractif pour les deux, quel taux vont-elles payer en définitive ?

7.13 Après couverture du risque de change, l'institution financière qui est intermédiaire dans le swap du graphique 7.11 retire-t-elle un profit plus important ou plus faible que 20 points de base ? Justifiez votre réponse.

7.14 « Les entreprises dont le risque de crédit est élevé sont celles qui ne peuvent accéder directement au marché des emprunts à taux fixe. Ce sont celles qui sont le plus susceptibles de payer le fixe et recevoir le variable dans un swap de taux. » Supposez que cette affirmation soit exacte. Pensez-vous que cela augmente ou diminue le risque du portefeuille de swaps d'une institution financière ? Vous supposerez que le défaut est plus probable quand les taux d'intérêt sont élevés.

7.15 Pourquoi la perte espérée en cas de défaut dans un swap est-elle plus faible que celle qui est encourue dans le cas d'un prêt lorsque le principal est identique ? Supposez qu'il n'y a ni garanties ni autres transactions entre les contreparties et que le swap fait l'objet d'une compensation bilatérale.

7.16 Une banque considère que ses actifs et ses passifs ne sont pas correctement ajustés car elle rémunère des dépôts à taux variable et prête à taux fixe. Comment des swaps pourraient-ils couvrir ce risque ?

7.17 Expliquez comment évaluer un swap qui permet d'échanger un taux variable dans une devise contre un taux fixe dans une autre.

7.18 Les taux OIS sont à 3.4 % pour toutes les maturités. Le taux LIBOR 3 mois est à 3,5 %. Pour un swap à 6 mois dont les paiements sont trimestriels, le taux de swap est de 3,6 %. Tous les taux sont en composition trimestrielle. Quel est le taux forward LIBOR à 3 mois dans 3 mois ?

7.19 Le taux LIBOR 6 mois est de 5 %. Les taux forward pour 6 mois, dans 6 et 12 mois, sont égaux à 5,5 %. Les taux de swaps pour des swaps à 2 et 3 ans avec paiements semestriels sont respectivement de 5,4 % et 5,6 %. Estimez les taux forward LIBOR pour les périodes de 6 mois débutant dans 18, 24 et 30 mois. Supposez que le taux de swap à 2,5 ans est la moyenne des taux de swap à 2 et 3 ans et que les taux OIS pour toutes les maturités sont de 4,5 % (en composition continue) ; tous les autres taux sont en composition semestrielle.

Questions complémentaires

7.20 Répondez aux questions suivantes.

a. Une entreprise A se voit proposer les taux du tableau 7.3. Elle peut emprunter pour 3 ans à 3,45 %. Contre quel taux variable peut-elle échanger ce taux fixe ?

b. Une entreprise B se voit proposer les taux du tableau 7.3. Elle peut emprunter pour 5 ans à LIBOR + 75. Contre quel taux fixe peut-elle échanger ce taux variable ?

7.21 Répondez aux questions suivantes.

a. Une entreprise X se voit proposer les taux du tableau 7.3. Elle peut emprunter pour 4 ans à 2,8 %. Contre quel taux variable peut-elle échanger ce taux fixe ?

b. Une entreprise Y se voit proposer les taux du tableau 7.3. Elle peut emprunter pour 10 ans à LIBOR – 50. Contre quel taux fixe peut-elle échanger ce taux variable ?

7.22 Le taux ZC LIBOR à un an est 3 % et le taux forward pour 2 ans dans un an est de 3,2 %. Le taux de swap à 3 ans est de 3,2 %. Quel est le taux forward LIBOR pour un an dans deux ans si les taux zéro-coupon OIS pour les maturités de un à trois ans sont égaux à 2,5 %, 2,7 % et 2,9 %. Quelle est la valeur d'un swap dans lequel un taux fixe de 4 % est reçu contre un paiement du taux LIBOR, sur un principal de 100 millions ? Tous les taux sont en composition annuelle.

7.23 Selon les termes d'un swap de taux, une institution financière s'est engagée à payer 3,6 % par an et à recevoir en retour le LIBOR 3 mois sur un principal de 100 millions de dollars US, avec des paiements trimestriels. Le taux forward LIBOR démarrant dans trois mois est de 4 % par an pour toutes les maturités. Le swap a une durée de vie résiduelle de 14 mois. Le LIBOR 3 mois était à 3,2 % il y a un mois. Les taux OIS sont actuellement à 3,8 % (en composition continue) pour toutes les maturités. Tous les taux sont composés trimestriellement. Quelle est la valeur du swap ?

7.24 L'entreprise A, un industriel britannique, cherche à emprunter des dollars US à taux fixe, et l'entreprise B, une multinationale américaine, souhaite emprunter des livres sterling à taux fixe. Les taux suivants leur ont été proposés :

	Livre sterling	Dollar US
Entreprise A	11,0 %	7,0 %
Entreprise B	10,6 %	6,2 %

Construisez un swap qui laissera 10 points de base de profit à l'intermédiaire et qui produira un gain de 15 points de base pour chacune des deux parties.

7.25 On suppose que la structure par termes des taux est plate aux États-Unis et en Australie aux niveaux respectifs de 7 % et 9 %. Le dollar australien vaut actuellement 0,62 dollars US. Selon les termes d'un contrat de swap, une institution financière paie 8 % par an en dollars australiens et reçoit 4 % par an en dollars US. Les principaux sont 12 millions de dollars US et 20 millions de dollars

australiens. Les paiements sont annuels et l'un d'eux vient d'avoir lieu, alors qu'il reste deux ans jusqu'au terme du contrat. Quelle est la valeur du swap pour l'institution ? Vous supposerez que tous les taux sont exprimés en continu.

7.26 Le taux de swap à 5 ans est de 4 % quand les flux sont échangés semestriellement. Une entreprise souhaite conclure un swap par lequel elle reçoit 4,2 % par an sur un principal de 10 millions. La courbe des taux OIS est plate au niveau de 3,6 %. Combien la contrepartie devra-t-elle demander à cette entreprise pour ce swap (en ignorant le bid-ask spread, c'est-à-dire l'écart entre taux offert et taux demandé) ? Tous les taux sont en composition semestrielle.

Chapitre 8

Titrisation et crise financière de 2007

Les contrats forward, les futures, les swaps et les options sont des outils de transfert du risque d'une entité économique à une autre. Les sept premiers chapitres ont été centrés sur les contrats forward, les futures et les swaps. Avant d'entrer dans l'univers des options, nous présentons une méthode alternative de transfert de risque appelée titrisation.

Cette étude présente un intérêt particulier du fait du rôle de la titrisation dans la crise du crédit (le « credit crunch ») qui a débuté en 2007. La crise trouve son origine dans certains produits financiers construits à partir des prêts immobiliers aux États-Unis. Elle s'est rapidement diffusée aux autres pays ainsi qu'à l'économie « réelle ». Certaines institutions financières n'y ont pas survécu. D'autres ont été sauvées (nationalisées) par les États, et donc les contribuables. Il ne fait pas de doute aujourd'hui que la première décennie du XXI^{e} siècle a été catastrophique pour le secteur financier dans son ensemble.

Dans ce chapitre, nous décrivons les principes de la titrisation et son rôle dans la crise. Nous présentons quelques éléments importants concernant le marché immobilier américain et décrivons les asset-backed securities, les CDO (*Collateralized Debt Obligations*), ainsi que les mécanismes incitatifs sur les marchés financiers.

8.1 La titrisation

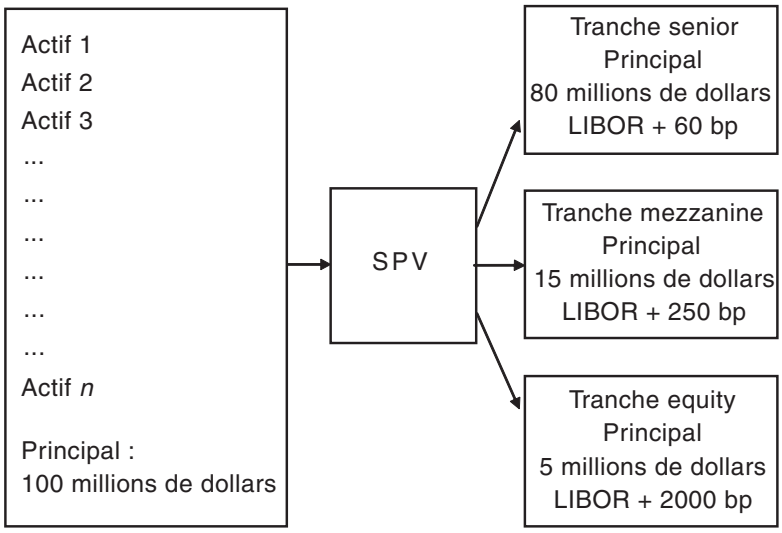
Traditionnellement, la banque qui accorde un prêt le finance avec des dépôts de clients. Les banques américaines ont constaté qu'elles ne pouvaient faire face à la demande avec cette technique. C'est ainsi que le marché des MBS (*Mortgage Backed Securities*) s'est développé. Des portefeuilles de prêts ont été regroupés et les promesses de cash-flows associées (intérêt et principal) ont été vendues sous forme d'actifs financiers. Le gouvernement américain a créé en 1968 la GNMA (*Government National Mortgage Association*, appelée familièrement Ginnie Mae) pour garantir sous conditions les cash-flows de ces prêts (moyennant rémunération) et les vendre sous forme de titres financiers.

Bien que les banques aient continué à consentir des prêts, elles avaient la possibilité de ne plus les garder dans leur bilan. Grâce à la titrisation, elles pouvaient accroître les volumes de prêts consentis, plus rapidement que ne le leur permettait l'évolution des dépôts. La garantie de la GNMA donnait la possibilité de protéger les investisseurs contre le défaut des emprunteurs [1].

Dans les années 1980, la titrisation s'est étendue à d'autres classes d'actifs ou de prêts, comme les prêts automobiles ou les cartes de crédit aux États-Unis. Petit à petit, les investisseurs ont négligé le fait que ces prêts n'étaient pas protégés contre le risque de défaut des emprunteurs.

ABS (*Asset-Backed Securities*)

Un ABS est un titre créé à partir des cash-flows d'actifs financiers, comme des prêts, des obligations, des cartes de crédit, des prêts immobiliers, des prêts automobiles. Le graphique 8.1 illustre le fonctionnement de l'actif financier créé. Un portefeuille d'actifs est vendu par l'émetteur des prêts à une entité (*special purpose vehicle* ou SPV) créée pour l'occasion. Les cash-flows des différents actifs sont alors alloués à différentes tranches. Sur le graphique 8.1, il existe trois tranches différentes, appelées respectivement senior, mezzanine et equity.

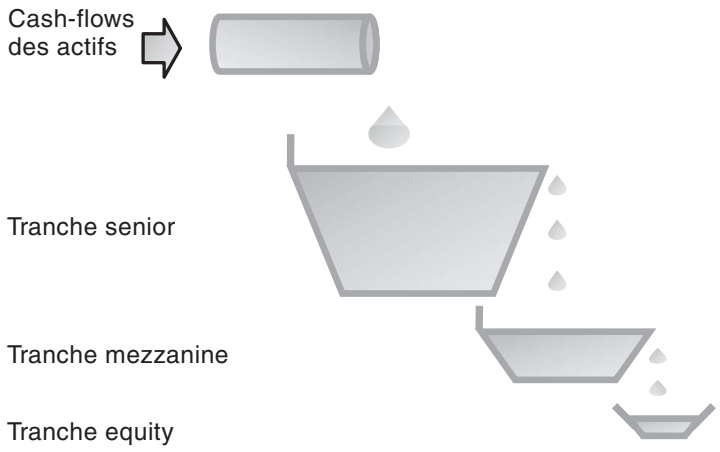


Graphique 8.1 : Un ABS simplifié (1 bp = 0,01 %)

Le portefeuille a un principal de 100 millions alloués comme suit : 80 millions à la tranche senior, 15 millions à la tranche mezzanine et 5 millions à la tranche equity. La première tranche offre une rentabilité de LIBOR + 60 bp, la deuxième de LIBOR + 250 bp et la troisième de LIBOR + 2 000 bp.

1. Les investisseurs en MBS restent toutefois exposés au risque de remboursement anticipé de la part des emprunteurs. Ce risque se matérialise notamment en cas de baisse des taux d'intérêt. Au début du développement de ce marché, nombre d'investisseurs ont vu leur rentabilité amoindrie par ces remboursements anticipés.

À première vue, la tranche equity semble la plus intéressante, mais ce n'est pas nécessairement le cas. En effet, le risque de ne pas réaliser la rentabilité attendue est beaucoup plus élevé pour cette tranche que pour les deux autres. L'allocation des cash-flows dégagés par les prêts sous-jacents à l'intérieur des tranches s'opère selon un principe de cascade (*waterfall*), illustré au graphique 8.2.



Graphique 8.2 : Le principe de cascade pour un ABS

Les cash-flows encaissés sont tout d'abord versés à la tranche senior jusqu'au moment où la rentabilité promise est atteinte. Ensuite, les cash-flows suivants viennent alimenter la tranche mezzanine. Si la rentabilité attendue est atteinte pour cette tranche, la tranche equity est alors servie. Cette règle de distribution des cash-flows à l'intérieur des tranches est extrêmement précise et fait l'objet d'un document de plus d'une centaine de pages ayant valeur légale.

Le graphique 8.2 décrit ce qui se passe généralement chaque année. Les paiements du principal sont distribués aux différentes tranches. La part du principal qui est effectivement remboursée dépend des pertes sur les actifs sous-jacents. Les premiers 5 % de pertes sont absorbés par la tranche equity. Si les pertes excèdent 5 %, la tranche equity est épuisée et les pertes sont absorbées par la tranche mezzanine. Enfin, si les pertes dépassent 20 %, la tranche senior est alors touchée.

Il y a deux façons de décrire un ABS, ce qui revient à dire qu'intérêts et principal font l'objet de deux cascades séparées. La première fait référence au principe décrit au graphique 8.2. Les cash-flows alimentent en premier lieu la tranche senior, puis la tranche mezzanine et enfin la tranche equity. La seconde se fait en termes de pertes. La perte en principal concerne d'abord la tranche equity, puis la tranche mezzanine et enfin la tranche senior.

Les agences de rating comme Fitch, S & P et Moody's ont joué un rôle clé dans la titrisation. En effet, la structuration d'un ABS est telle que la tranche senior est notée AAA et la tranche mezzanine BBB le plus souvent. La tranche equity n'est en général pas notée. L'objectif du concepteur de l'ABS est de maximiser le volume de la tranche senior sans perdre la note AAA, ce qui optimise le profit réalisé.

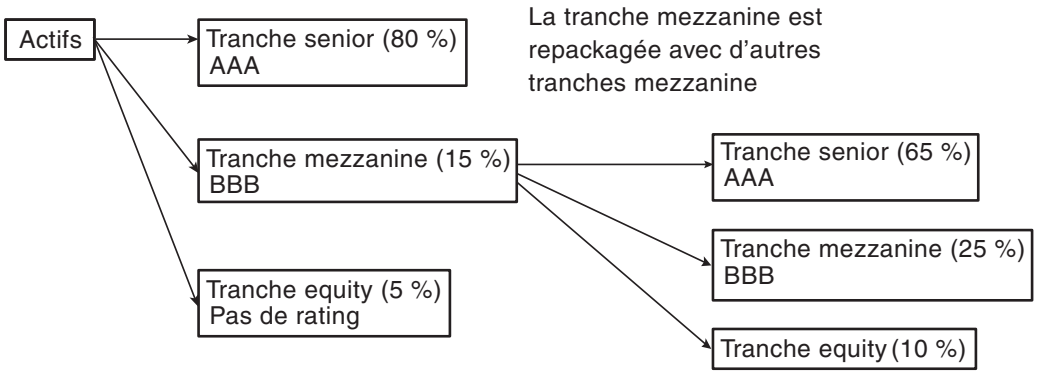
L'ABS présenté au graphique 8.1 est simplifié. Dans la réalité, il peut y avoir plus de trois tranches et la gamme des notations des tranches peut être plus étendue. De plus,

il se peut que (a) le total de principal des tranches soit inférieur à celui des actifs sous-jacents et (b) la rentabilité pondérée des tranches soit inférieure à la rentabilité pondérée attendue des prêts sous-jacents.

Les ABS CDO

On trouve facilement des acheteurs pour la tranche senior d'un ABS créé à partir de prêts et notée AAA. La tranche equity, quant à elle, est généralement détenue par l'émetteur ou revendue à un hedge fund. En revanche, la tranche mezzanine est plus délicate à commercialiser ; elle requiert de la créativité de la part des ingénieurs financiers… et ils n'en ont pas manqué ! Ils ont élaboré des ABS d'ABS à partir de tranches mezzanine de l'ABS initial. Ces produits sont connus sous le nom d'ABS CDO (CDO signifiant *Collateralized Debt Obligation*), ou Mezz ABS CDO (voir graphique 8.3). La tranche senior de l'ABS CDO est notée AAA, ce qui signifie que le montant de titres AAA créé représente 65 % du montant de la tranche mezzanine de l'ABS initial. La tranche mezzanine de l'ABS CDO compte pour 25 % et la tranche equity pour 10 %. Au total, cela signifie qu'environ 90 % des sous-jacents initiaux se retrouvent notés AAA (80 % + 65 % de 15 %). Cela paraît élevé, mais si la titrisation allait encore plus loin (et c'est arrivé !) en créant un nouvel ABS à partir des tranches mezzanine d'ABS CDO, ce pourcentage serait encore plus élevé [2].

La tranche senior peut être rémunérée au taux prévu si les pertes sur le portefeuille de prêts, absorbées par les tranches de rang inférieur, n'excèdent pas 20 %. La tranche AAA de l'ABS CDO du graphique 8.3 est, quant à elle, beaucoup plus risquée. En effet, le rendement promis ne peut être atteint que si les pertes sur le portefeuille sous-jacent ne dépassent pas 10,25 %. La tranche mezzanine de l'ABS CDO absorbe 5,25 % des pertes du portefeuille sous-jacent à l'ABS. Comme le principal de l'ABS CDO représente 15 % du principal de l'ABS, la perte maximale sur la tranche mezzanine est de 5,25/15, soit 35 % du principal. Au pire, une telle perte assèche les tranches mezzanine et equity de l'ABS CDO, mais laisse la tranche senior intacte. Cette dernière n'est atteinte que si les pertes dépassent 10,25 %.



Graphique 8.3 : Un ABS CDO (simplifié)

2. Il s'agit sans doute de l'équivalent financier de l'adage « faire du neuf avec du vieux » !

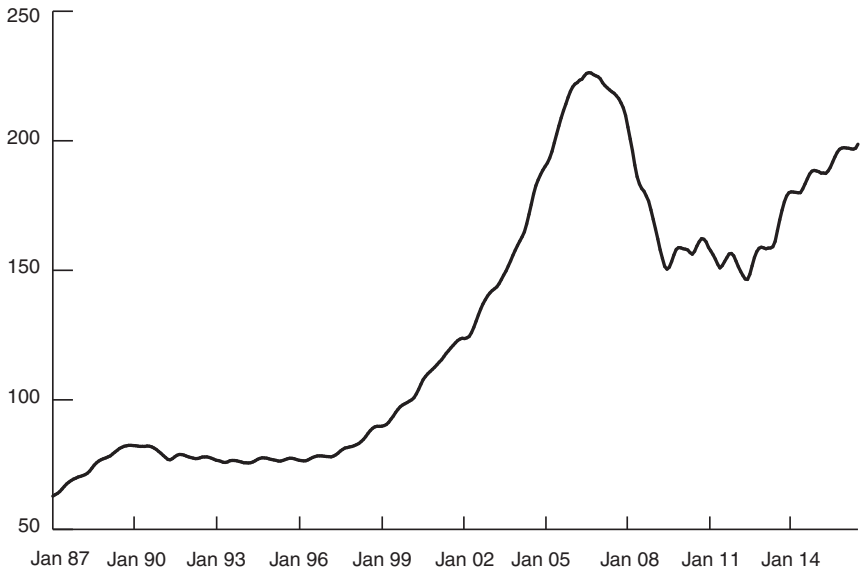
Supposons que la perte sur le portefeuille sous-jacent s'élève à 17 %, dont 5 % sont supportés par la tranche equity et 12 % par la tranche mezzanine de l'ABS. Dans ce cas, les pertes sur la tranche mezzanine sont de l'ordre de 12/15, soit 80 % du principal. Les premiers 35 % sont absorbés par les tranches equity et mezzanine de l'ABS CDO. La tranche senior de l'ABS CDO perd $45/65 = 69{,}2$ % de sa valeur. Le tableau 8.1 résume l'ensemble des résultats.

Tableau 8.1 : Pertes sur les tranches AAA de l'ABS CDO du graphique 8.3

Pertes sur le portefeuille	Pertes sur la tranche mezzanine de l'ABS	Pertes sur la tranche equity de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche mezzanine de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche senior de l'ABS CDO
10 %	33,3 %	100,0 %	93,3 %	0,0 %
13 %	53,3 %	100,0 %	100,0 %	28,2 %
17 %	80,0 %	100,0 %	100,0 %	69,2 %
20 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %

8.2 Le marché immobilier américain

Le graphique 8.4 décrit l'évolution de l'indice S&P/Case-Shiller Composite 10 des prix de l'immobilier entre janvier 1987 et février 2016. Il concerne les dix plus grandes villes des États-Unis. À partir des années 2000, le prix de l'immobilier a augmenté plus rapidement que durant la décennie précédente. Le niveau très bas des taux d'intérêt entre 2002 et 2005 est bien sûr un facteur explicatif clé, mais la politique d'attribution des prêts immobiliers a été un élément central dans cette accélération.



Graphique 8.4 : Évolution de l'indice S&P/Case-Shiller Composite 10 sur la période 1987-2016

La période 2000-2006 a vu augmenter de façon très importante les prêts immobiliers dits « subprime », qui présentent un risque de défaut plus élevé. Avant 2000, de nombreux

prêts subprime étaient des prêts secondaires, alors qu'après 2000, ils ont souvent été distribués comme prêts principaux.

Le laxisme dans l'attribution des prêts

À partir de 2000, les prêteurs ont assoupli les critères liés à l'attribution des crédits immobiliers, ce qui a permis à un grand nombre de ménages d'avoir accès à des emprunts jusqu'alors jugés trop risqués. Cette nouvelle demande a mécaniquement entraîné les prix à la hausse. Cette double augmentation, crédits attribués et prix de l'immobilier, était très intéressante à la fois pour les vendeurs de prêts (ou brokers) et les prêteurs. Pour les brokers, cette hausse engendrait des profits plus importants. Pour les prêteurs, l'augmentation des prix assurait une meilleure garantie par un collatéral plus solide. En effet, en cas de défaillance de l'emprunteur, la saisie du bien devait permettre d'éviter des pertes.

Comment les brokers et les prêteurs ont-ils pu continuer à augmenter leurs profits, alors que la hausse des prix réduisait considérablement le marché des acheteurs potentiels ? Afin de soutenir ce marché, et en particulier celui des nouveaux entrants, ces intermédiaires se sont fondés sur des critères d'attribution des crédits de moins en moins contraignants. Le montant prêté exprimé en pourcentage de la valeur du bien a augmenté. Les prêts immobiliers à taux ajustable (ARMS, *Adjustable Rate Mortgages*) se sont développés ; un taux très faible était offert aux clients (pouvant ne pas excéder 1 à 2 % dans certains cas)… mais il ne s'appliquait que pendant les deux ou trois premières années du prêt. Il était ensuite remplacé pour le reste de la durée de l'emprunt par un taux beaucoup plus élevé [3]. Une structure classique de prêt à taux ajustable consistait en un taux attractif autour de 6 % pendant une période très courte, suivi d'un taux variable du type Libor + 6 %, ajusté semestriellement, pour le reste de la durée de l'emprunt [4]. Enfin, les prêteurs ont fait preuve d'un laxisme accru dans le traitement des dossiers. Certaines informations, comme les revenus de l'emprunteur, n'étaient le plus souvent pas vérifiées.

La titrisation des prêts subprime

Les prêts subprime ont souvent fait l'objet d'une titrisation comme celle présentée aux graphiques 8.1 et 8.3. Les investisseurs qui achetaient les tranches d'ABS fondés sur les subprimes n'avaient aucune garantie quant aux cash-flows qui devaient être payés sur ces titres. De plus, la possibilité de titriser influençait aussi le comportement des prêteurs, qui savaient pouvoir se débarrasser du risque ainsi créé [5]. Lors de l'attribution d'un nouveau prêt, la question n'était donc pas de savoir si les emprunteurs pourraient

3. Puisque le prix de l'immobilier augmentait, les prêteurs avaient envisagé que les emprunteurs rembourseraient leur prêt par anticipation et emprunteraient à nouveau après la période de taux faibles. Les pénalités de remboursement anticipé, quasiment nulles pour les emprunts de bonne qualité (classés *prime*), étaient donc élevées sur les emprunts dits *subprime*.

4. Un prêt ARM 2/28, par exemple, est un prêt dans lequel le taux est fixe pendant deux ans et variable pour les 28 années suivantes.

5. Voir B. J. Keys, T. Mukherjee, A. Seru et V. Vig, "Did Securitization Lead to Lax Screening? Evidence from the Subprime Loans", *Quarterly Journal of Economics*, 125 (1), 2010, 307-62.

rembourser, mais de savoir s'il serait possible de faire de l'argent en vendant les actifs titrisés à d'autres investisseurs. Ces derniers n'avaient le plus souvent qu'une information assez pauvre sur la qualité des sous-jacents, comme le ratio montant de l'emprunt/valeur du bien ainsi que le score FICO [6] de l'emprunteur. De plus, ces informations pouvaient se révéler peu fiables car ceux qui évaluaient les biens immobiliers pouvaient subir des pressions de la part des prêteurs pour surévaluer ces biens. Une alternative consistait à pousser les emprunteurs à améliorer artificiellement leur score FICO [7].

Pourquoi le gouvernement américain n'a-t-il pas réglementé plus fortement le comportement des prêteurs ? Depuis les années 1990, il souhaitait promouvoir l'accès à la propriété en incitant les prêteurs à attribuer davantage de crédits aux familles à revenus modestes. Certains États, comme l'Ohio ou la Géorgie, ont perçu la dérive de cette politique et ont voulu condamner les prêts « prédateurs » [8]. Cependant, la justice a décidé que les standards nationaux devaient continuer à s'appliquer.

De nombreuses dénominations ont été utilisées pour décrire les prêts immobiliers octroyés dans la période précédant la crise. L'une d'elles est « prêts mensongers » (*liar loans*) car les particuliers candidats à un emprunt mentaient parfois lors de la constitution des dossiers, puisqu'ils savaient que ces derniers ne seraient pas attentivement contrôlés. L'expression « NINJA », signifiant « *No Income, No Job, No Assets* » (« pas de revenus, pas de travail, pas d'actifs »), était également fréquente pour décrire ces emprunteurs.

L'éclatement de la bulle

Le relâchement des conditions d'accès au crédit a entraîné le développement d'une bulle sur le marché de l'immobilier. Les prix ont augmenté très rapidement entre 2000 et 2006 et, comme dans le cas de nombreuses bulles, l'éclatement a suivi. En 2007, une fois passée la période initiale de taux fixes faibles sur les emprunts, de nombreux ménages ont été dans l'impossibilité de faire face aux remboursements des intérêts de leur emprunt, ce qui a donné lieu à de nombreuses saisies immobilières. Beaucoup de biens immobiliers ont alors été mis en vente, ce qui a mécaniquement fait baisser leurs prix. Les personnes ayant emprunté des sommes correspondant à 100 % (ou près de 100 %) de la valeur du bien se sont alors retrouvées quasiment ruinées.

Une des caractéristiques du marché immobilier américain est que lorsque l'emprunteur fait défaut, le prêteur est autorisé à prendre possession de son bien. En revanche, les autres actifs détenus par l'emprunteur sont protégés. Par conséquent, ce dernier détient une option de vente américaine, puisqu'il peut à tout moment céder son bien au prêteur pour la valeur du principal de l'emprunt. Les acteurs de ce marché ont réalisé tardivement à quel point cette option pouvait être coûteuse. Lorsque l'actif détenu perd de sa valeur, la solution optimale pour l'emprunteur est de stopper les remboursements et de

6. Il s'agit d'un score évaluant la qualité de l'emprunteur. Il a été développé par *Fair Isaac Corporation* et est largement utilisé aux États-Unis. Il varie entre 300 et 850.

7. Par exemple, en procédant à des versements réguliers pendant quelques mois sur leur compte de carte de crédit.

8. Un comportement prédateur décrit une situation dans laquelle un prêteur parvient à convaincre, sur la base de faux arguments, un emprunteur à accepter le contrat.

laisser le prêteur prendre possession du bien immobilier. Celui-ci doit alors vendre et augmente, à son tour, la pression à la baisse sur les prix.

Les emprunteurs ayant fait défaut n'étaient cependant pas tous dans une situation comparable. Certains ne pouvaient réellement plus payer et ont été très affectés par l'abandon de leur logement. D'autres étaient cependant des spéculateurs qui avaient acheté de nombreux logements en vue de les louer. Quand les prix du marché se sont mis à baisser, ils ont choisi d'exercer leur option. Afin de tirer parti de cette option, d'autres propriétaires encore, après avoir rendu les clés de leur maison aux prêteurs, ont racheté de nouvelles maisons saisies à des prix beaucoup plus faibles.

Imaginons deux propriétaires de maisons identiques valant chacune 200 000 $ sur le marché. Supposons que ces deux individus aient emprunté la somme de 250 000 $; en cas de saisie, les maisons peuvent être revendues pour une valeur de 170 000 $. Quelle est la stratégie optimale pour ces deux individus ? La réponse est simple : ils ont tous deux intérêt à exercer leur option de vente et à acheter la maison de leur voisin.

Soulignons pour terminer que les États-Unis n'ont pas été les seuls à subir une forte baisse sur le marché immobilier ; d'autres pays ont connu le même sort, en particulier la Grande-Bretagne. Comme le montre le graphique 8.4, les prix de l'immobilier aux États-Unis ont commencé à se redresser à partir de 2012.

Les pertes

L'augmentation du rythme des saisies a entraîné un accroissement des pertes sur les prêts. On pourrait penser qu'une baisse des prix de l'immobilier de 35 % entraîne une perte de 35 % sur le principal des prêts en situation de défaut. En fait, ce n'est pas le cas ; les pertes sont beaucoup plus importantes. Les biens immobiliers saisis sont le plus souvent en piteux état ou le deviennent rapidement. Ils sont donc revendus à un prix bien plus faible. En 2008 et 2009, les pertes se sont élevées à 75 % dans certaines zones géographiques, sur des biens revendus suite à des saisies.

Les investisseurs ayant acquis des tranches d'ABS sur subprimes ont aussi subi des pertes importantes. Un indice, nommé ABX, synthétisait ces valeurs. Les tranches initialement notées BBB avaient perdu 80 % de leur valeur à la fin de 2007 et jusqu'à 97 % à la mi-2009. Comme le montre l'indice TABX (synthèse des tranches d'ABS CDO), la valeur des tranches initialement notées AAA accusait une baisse de 80 % à la fin de 2007 et ces tranches ne valaient quasiment plus rien au milieu de l'année 2009.

Des institutions financières telles que UBS, Merryll Lynch ou Citigroup, qui détenaient des positions importantes sur ces produits, ont réalisé des pertes colossales, de même que le groupe d'assurances AIG, qui s'était porté assureur contre les pertes sur les tranches d'ABS CDO, initialement notées AAA. Le gouvernement américain est venu à la rescousse de plusieurs établissements financiers et 2008 restera dans les annales comme la plus mauvaise année qu'ait connu le système financier depuis bien longtemps. Bear Stearns a été racheté par J. P. Morgan Chase, Merrill Lynch par Bank of America. Goldman Sachs et Morgan Stanley, qui étaient des banques d'investissement, sont devenues des banques mixtes (à la fois banques commerciales et banques d'inves-

tissement) et, *last but not least*, Lehman Brothers a fait faillite en septembre 2008 (voir l'encadré 1.1).

La crise du crédit

Les pertes réalisées sur les actifs titrisés ont conduit à une crise sévère du crédit. En 2006, le niveau de capitalisation des banques était très satisfaisant, les prêts étaient faciles à obtenir et les spreads de crédit relativement faibles. En 2008, la situation était complètement différente. Le capital des banques avait subi une érosion sans précédent. Elles ne voulaient plus prêter du fait d'une aversion au risque grandissante et même les emprunteurs de bonne qualité, individus ou entreprises, éprouvaient des difficultés à se financer. Les spreads de crédit s'étaient considérablement accrus, ce qui a marqué le début d'une des plus fortes récessions que le monde ait connu. Comme nous l'avons évoqué dans la section 7.8, le spread LIBOR-OIS a atteint 364 points de base en octobre 2008. De même, le spread entre le LIBOR 3 mois et le taux des bons du Trésor de même maturité (nommé TED spread) a atteint 450 bp, alors qu'il se situe entre 30 et 50 bp dans des conditions de marché normales.

8.3 L'origine des difficultés

« Exubérance irrationnelle » est une expression due à Alan Greenspan, l'ancien directeur de la *Federal Reserve*. Elle décrit le comportement des investisseurs pendant la bulle des années 1990, mais elle peut aussi s'appliquer à la période précédant le déclenchement de la crise du crédit.

Les prêteurs, les souscripteurs de tranches d'ABS et d'ABS CDO, dont les sous-jacents étaient des prêts immobiliers, ainsi que les institutions ayant vendu de la protection contre les défauts faisaient sans doute l'hypothèse que cela allait toujours durer, que les prix de l'immobilier continueraient à monter, même s'ils envisageaient sans doute de possibles baisses dans certains secteurs géographiques. En revanche, ils n'envisageaient pas que le retournement observé sur le graphique 8.2 puisse se produire.

De nombreux facteurs sont à l'origine de la crise financière qui a débuté en 2007. Les émetteurs ont été de plus en plus laxistes quant aux critères d'attribution des prêts. Des produits ont été créés afin de permettre aux émetteurs de transférer le risque à d'autres investisseurs. Ces produits étaient très complexes et, bien souvent, les investisseurs et les agences de notation ne disposaient que d'informations incomplètes sur la qualité des actifs sous-jacents. Les agences de notation ont quitté le secteur traditionnel de la notation des émetteurs obligataires pour le marché de la notation des produits structurés. Elles ont alors attribué des notes AAA à des produits très dépendants des corrélations de défaut des actifs sous-jacents. Ces produits semblaient particulièrement intéressants pour les investisseurs qui ont préféré se fier à l'avis des agences, plutôt que de se forger leur propre opinion. Les rentabilités sur ces produits étaient élevées et ces derniers, notés AAA, ne mobilisaient que très peu de capital.

Le risque des produits structurés comme ceux décrits aux graphiques 8.1 et 8.3 dépend des corrélations de défaut des emprunts sous-jacents. Cette dépendance est encore plus importante pour les tranches d'ABS CDO. Si ces emprunts ont une corrélation de défaut

modérée, ce qui est généralement le cas, il existe une probabilité très faible de voir apparaître un taux de défaut important sur l'ensemble du portefeuille de crédit. Dans ce cas, la tranche AAA présente peu de risque. En revanche, dans une période de tension sur les marchés, les corrélations de défaut peuvent augmenter de manière inhabituelle et des taux de défaut importants sont alors envisageables.

Au moment de l'évaluation des tranches de CDO notées BBB, construites à partir des tranches mezzanine d'ABS, les analystes financiers ont commis l'erreur d'évaluer le risque sous-jacent comme s'il s'agissait d'une note BBB attribuée à des obligations. Ce n'est pas le cas. La tranche BBB d'un ABS CDO peut avoir la même espérance de pertes qu'une obligation BBB, mais la distribution des pertes peut être très différente. Par exemple, la probabilité de perdre 100 % du principal est plus importante pour une tranche BBB d'un ABS que pour une obligation de même notation. Cela signifie que les risques sur ces deux produits ne sont pas strictement identiques et cette différence est d'autant plus importante que la tranche est étroite. Comme nous l'avons vu dans l'exemple illustré au graphique 8.3, les tranches mezzanine des ABS CDO sont relativement étroites.

Arbitrer les contraintes réglementaires

La plupart des prêts ayant servi de sous-jacents à la titrisation étaient émis par les banques, banques qui étaient en même temps les principaux investisseurs dans les produits titrisés. Ce paradoxe n'est qu'apparent : cette stratégie permettait de faire baisser les capitaux réglementaires requis car ceux-ci étaient inférieurs pour les tranches d'ABS par rapport à ceux exigés pour les sous-jacents eux-mêmes.

Les incitations

Les coûts d'agence décrivent, en économie, les coûts liés à une situation dans laquelle les intérêts de deux parties ne sont pas parfaitement alignés. Il est clair, après ce qui vient d'être dit, qu'il existait des coûts d'agence sur le marché des crédits immobiliers américain. La crise actuelle aurait été moins sévère si le législateur avait contraint l'émetteur des crédits immobiliers (ou d'autres actifs dont le risque peut être transféré) à garder en propre un pourcentage de chacune des tranches. Les intérêts des investisseurs, qui achètent les tranches, et ceux des émetteurs auraient ainsi été plus « proches ». Le marché des produits structurés a quasiment disparu pendant la crise. Cependant, le secteur financier a une mémoire très courte et ce marché peut renaître de ses cendres. Si tel est le cas, les régulateurs et les agences de notation devront prendre garde aux situations dans lesquelles les intérêts des différentes parties ne sont pas alignés.

La raison principale pour laquelle les émetteurs devraient être contraints de garder un pourcentage des tranches est que, dans ce cas, ils seraient encouragés à sélectionner les emprunteurs comme s'ils étaient eux-mêmes investisseurs. Une autre raison est que l'émetteur est généralement l'administrateur des emprunts (collecte des intérêts, saisie de biens, etc.) et il est important que ce rôle soit assumé selon les intérêts des investisseurs. L'émetteur garde en général la tranche equity des ABS, ce qui semble aller dans ce sens. Cependant, cette tranche est quasiment gratuite pour lui, puisqu'il a reçu une compensation adéquate pour les emprunts lors de la vente des autres tranches sur le

marché. De ce fait, une fois la tranche equity épuisée, l'émetteur n'est plus concerné par la performance des crédits immobiliers composant le portefeuille sous-jacent.

Notons qu'il existe une différence entre un vendeur de crédit qui titrise 80 % des crédits attribués et un vendeur qui titrise 100 % des crédits tout en gardant 20 % du principal de chacune des tranches émises. Dans le premier cas, il existera toujours un doute sur la façon dont les crédits ont été distribués et sur le laxisme des règles retenues lors de la sélection des dossiers. Les agences de notation devraient donner une meilleure note aux tranches émanant de la seconde procédure. Cependant, l'exigence en capital devrait être identique dans les deux cas.

Cette idée aurait pu réduire les excès du marché pendant la période précédant la crise de 2007. Cependant, l'ironie de cette crise est que l'activité de titrisation n'a pas obligatoirement permis aux banques de sortir les crédits immobiliers des bilans bancaires. En effet, les tranches AAA ont pu être achetées par une autre « partie » de la même banque. Comme les banques sont à la fois investisseurs et émetteurs, on aurait pu espérer un alignement fort des intérêts. Malheureusement, les activités d'investissement dans les crédits immobiliers et d'attribution de ces crédits sont réalisées, dans la même banque, par des services éloignés les uns des autres, qui n'échangent souvent aucune information.

Certains régulateurs ont proposé une participation de l'émetteur dans les tranches émises ; sans surprise, ils se sont heurtés à une opposition très forte des banques. Mais ces dernières ont reçu l'aide de capitaux publics de montants colossaux et ne semblent plus aujourd'hui en mesure de s'opposer à ces propositions.

Une autre source de coûts d'agence a trait à la relation des institutions financières avec leurs employés. Les rémunérations de ces derniers peuvent être classées en trois catégories : le salaire annuel, les bonus de fin d'année et la distribution des stock options. De nombreux cadres dans ces institutions, dont les traders, reçoivent une part importante de leur rémunération sous la forme de bonus fortement conditionnés par les performances de court terme. Si un trader réalise un profit important une année donnée et une perte tout aussi importante l'année suivante, il ne restituera pas le bonus reçu à la fin de la première année. Il pourra perdre son emploi, mais cela ne sera pas dramatique, car les institutions financières, de façon surprenante, recrutent fréquemment des employés qui présentent des pertes sur leur *curriculum vitae*.

Supposez que vous soyez trader en ABS CDO pour le compte d'une institution financière en 2006. Vous êtes à cet instant conscient de l'existence d'une bulle sur le marché américain de l'immobilier et quasiment certain que celle-ci risque tôt ou tard d'éclater. Malgré cela, vous décidez de maintenir votre investissement en ABS CDO, attiré par les bonus importants que générera votre position si la bulle n'éclate pas avant la fin de l'année 2006.

8.4 Les conséquences

La régulation des banques est organisée par le Comité de Bâle et elles doivent aussi se conformer à la législation des pays dans lesquels elles opèrent. Une des conséquences de la crise a consisté en une avalanche de propositions de nouvelles réglementations

et législations. Comme nous l'avons déjà évoqué, de nombreux contrats dérivés sont maintenant dénoués de manière centralisée dans le cadre d'une CCP, équivalent de la chambre de compensation sur les marchés organisés. Pour les transactions dénouées de manière bilatérale, le régulateur peut imposer des garanties plutôt que laisser les contreparties s'arranger entre elles.

Les bonus sont maintenant examinés avec beaucoup plus d'attention et peuvent même dans certains cas être limités par la loi. Le mode de paiement évolue aussi. Il est de plus en plus courant de voir le paiement des bonus étalés sur plusieurs années. Ceux-ci sont même parfois confisqués lorsque les résultats ultérieurs sont trop mauvais.

Le Dodd-Frank Act aux États-Unis et des législations analogues au Royaume-Uni et dans la zone Euro renforcent le contrôle sur les institutions traitant des opérations pour compte propre (aux États-Unis, cela s'appelle la *Volcker rule* en référence au chairman de la Federal Reserve Paul Volcker). Au Royaume-Uni, c'est un comité dirigé par Sir John Vickers qui traite de ces problèmes et dans l'Union européenne, c'est le comité Likanen qui œuvre pour que les activités de trading à haut risque soient séparées des autres activités des banques. Enfin, pour les établissements qui pratiquent la titrisation, une règle récente leur impose de garder 5 % de leurs émissions.

Le Comité de Bâle définit des standards appliqués par les banques du monde entier. Avant la crise, il s'agissait de Bâle I et Bâle II, comme l'illustre l'encadré 8.1. L'essentiel de la régulation consistait à définir les capitaux requis en fonction des risques pris [9]. À la fin de l'année 2009, Bâle III a été proposé. Cette nouvelle version augmente le montant et la qualité des capitaux réglementaires requis. Elle impose aussi des contraintes de liquidité car l'une des sources essentielles des problèmes dans les crises bancaires est la disparition de la liquidité et l'assèchement des marchés de crédit. Ce point a été discuté dans l'encadré 4.2. Les institutions financières ont tendance à choisir des ressources de court terme pour leur financement. Dès que le marché s'inquiète pour la santé d'une institution, cette source de financement disparaît ou se réduit considérablement.

Encadré 8.1 Le comité de Bâle

Avec la globalisation des activités bancaires dans les années 1980, il est devenu nécessaire pour les régulateurs des différents pays de se coordonner de sorte à définir des standards internationaux. C'est ainsi que le Comité de Bâle s'est créé. En 1988, il a défini un ensemble de règles (regroupées sous le nom de Bâle I) définissant les exigences en capital pour les activités de crédit. Elles ont été amendées en 1995 pour tenir compte du netting (voir chapitre 24). En 1996, une nouvelle réglementation a été publiée concernant le risque de marché et appliquée en 1998. En 1999, des changements significatifs ont été introduits concernant les risques de marché et de crédit et le concept de risque opérationnel a fait son apparition (Bâle II). L'applica-

9. Pour plus de détails sur le fonctionnement du Comité de Bâle et sur la régulation, voir J. C. Hull, C. Godlewski et M. Merli, *Gestion des risques et institutions financières*, 3^{e} édition, Pearson, Montreuil, 2013.

tion de cette réglementation date de 2007, juste avant le début de la crise. Ensuite, ce fut Bâle II.5 qui augmenta les exigences en capital pour les risques de marché. On en est maintenant à Bâle III, qui renforce encore les contraintes et introduit de nouvelles exigences pour la couverture du risque de liquidité.

Résumé

La titrisation est un procédé par lequel des banques créent des actifs financiers adossés à des prêts engendrant des revenus aléatoires. Ces actifs sont ensuite revendus à des investisseurs. Cela fait disparaître les prêts risqués du bilan des banques et les autorise à prêter plus que ce que l'évolution des dépôts permet. Les premiers sous-jacents d'actifs titrisés dans les années 1960 et 1970 furent des prêts immobiliers. Les investisseurs étaient cependant protégés du défaut des emprunteurs par la GNMA. Ensuite, les sous-jacents des produits titrisés se sont diversifiés (mais, cette fois, sans garantie), incluant les prêts subprime.

La titrisation a joué un rôle non négligeable dans la crise qui a débuté en 2007. Des ABS ont été créés à partir de prêts subprimes et des ABS CDO à partir des ABS initiaux.

Le marché immobilier américain, quant à lui, a joué un rôle central dans cette crise. Le gouvernement américain a mis en place une politique qui favorisait l'accession à la propriété. Les taux d'intérêt étaient bas, et les vendeurs de crédit et les brokers ont assoupli les critères d'attribution des crédits afin de soutenir leur activité.

Des produits de titrisation ont été développés pour permettre à l'émetteur de ne pas supporter le risque de crédit en le vendant sur le marché. Les agences ont attribué à certaines tranches de ces produits la note AAA. Ces tranches ont facilement trouvé preneurs sur les marchés financiers, car leur rendement était largement supérieur à celui obtenu sur d'autres produits notés AAA.

Les banques ont pensé que cette période faste allait durer et, concentrées sur une vision à court terme, elles ont ignoré la bulle immobilière et la complexité des produits qu'elles détenaient.

Les prix de l'immobilier ont augmenté sous la pression des nouveaux entrants et des spéculateurs sur ce marché. Certains prêts immobiliers proposaient une période de taux extrêmement bas de deux ou trois ans, suivie par une hausse importante des taux d'intérêt de l'emprunt. De nombreux emprunteurs n'ont pas pu faire face à cette augmentation et ont fait faillite, ce qui a entraîné un grand nombre de saisies et de ventes de biens immobiliers. Les prix, qui avaient augmenté entre 2000 et 2006, ont alors commencé à baisser. Les spéculateurs, voyant la valeur du collatéral de leur emprunt baisser, se sont volontairement mis en faillite, ce qui a encore accentué la baisse des prix.

Les banques paient le prix de cette crise sous la forme de nouvelles législations et régulations qui réduisent leur profitabilité. Les exigences en capitaux propres augmentent, les exigences de liquidité apparaissent, les dérivés négociés de gré à gré font l'objet de propositions de régulation et de nouvelles taxes sont introduites.

Références complémentaires

Gorton G., “The subprime panic”, *European Financial Management*, 15 (1), 2008, 10-46.

Hull J. C., “The Financial Crisis of 2007 : Another Case of Irrational Exuberance”, dans *The Finance Crisis and Rescue : What Went Wrong ? Why ? What Lessons Can Be Learned ?*, University of Toronto Press, 2008.

Hull J. C. et A. White, “Ratings Arbitrage and Structured Products”, *Journal of Derivatives*, 20 (1), automne 2012, 80-86.

Keys B. J., T. Mukherjee, A. Seru et V. Vig, “Did Securization lead to Lax Screening ? Evidence from Subprime Loans”, *Quarterly Journal of Economics*, 125 (1), février 2010, 307-362.

Krinsman A. N., “Subprime Mortgage Meltdown : How did it Happen and How will it End”, *Journal of Structured Finance*, été 2007, 13-19.

Mian A. et A. Sufi, “The Consequences of Mortgage Credit Expansion : Evidence from the US Mortgage Default Crisis”, *Quarterly Journal of Economics*, 124 (1), novembre 2010, 1449-1496.

Sorkin A. R., *Too Big to Fail*, Penguin, New York, 2009.

Tett G., *Fool’s Gold : How the Bold Dream of a Small Tribe at JP Morgan Was Corrupted by Wall Street Greed and Unleashed a Catastrophe*, Free Press, New York, 2009.

Zimmerman T., “The Great Subprime Meltdown”, *Journal of Structured Finance*, automne 2007, 7-20.

Problèmes et exercices

8.1 Quel était le rôle de la GNMA sur le marché des MBS dans les années 1970 ?

8.2 Expliquez ce que signifient (a) ABS et (b) ABS CDO.

8.3 Qu’appelle-t-on tranche mezzanine ?

8.4 Qu’est-ce que le principe de cascade dans la titrisation ?

8.5 Que devient le tableau 8.1 pour un taux de perte de (a) 12 % et (b) 15 % ?

8.6 Qu’est-ce qu’un prêt subprime ?

8.7 Pourquoi l’évolution du prix de l’immobilier entre 2000 et 2007 aux États-Unis est-elle qualifiée de bulle ?

8.8 Pourquoi les vendeurs de prêts immobiliers ont-ils fréquemment omis de demander certaines informations importantes aux emprunteurs durant la période 2000-2007 ?

8.9 De quelle manière les risques des ABS CDO ont-ils été mal évalués par le marché ?

8.10 Que représentent les coûts d’agence ? Comment ces derniers ont-ils joué un rôle dans la crise ?

8.11 Comment un ABS CDO est-il créé ? Quel est le but de cette création ?

8.12 Expliquez l’influence des corrélations de défaut sur (a) les risques associés à la tranche senior d’un ABS et (b) les risques associés à la tranche equity.

8.13 Expliquez pourquoi la tranche AAA d’un ABS CDO est plus risquée que la tranche AAA d’un ABS.

8.14 Expliquez pourquoi les bonus de fin d’année sont des incitations de très court terme.

8.15 Ajoutez des lignes au tableau 8.1 correspondant à des pertes sur les actifs sous-jacents de (a) 2 %, (b) 6 %, (c) 14 % et (d) 18 %.

Questions complémentaires

8.16 Supposons que les montants de principal des tranches senior, mezzanine et equity soient respectivement de 70 %, 20 % et 10 %, au lieu de 80 %, 15 % et 5 % sur le graphique 8.3. Comment les résultats du tableau 8.1 sont-ils affectés ?

8.17 « Retitriser était vraiment une très mauvaise idée. Les tranches AAA créées à partir des tranches mezzanine d'ABS ont forcément des probabilités de défaut plus élevées que les tranche AAA d'ABS. » Discutez ce point de vue.

8.18 Supposons que les tranches mezzanine d'ABS CDO analogues à celles du graphique 8.3 soient regroupées sous la forme d'un CDO *square*. Comme pour les tranches d'ABS du graphique 8.3, 65 % du principal est alloué à la tranche AAA, 25 % à la tranche BBB et le reste à la tranche equity. Quel doit être le pourcentage de perte sur le sous-jacent pour que la tranche AAA qui vient d'être créée commence à être affectée (vous supposerez que les taux de perte sont identiques sur tous les portefeuilles d'actifs qui ont servi à construire le CDO *square*) ?

8.19 Qu'arrive-t-il quand, simultanément, l'étendue de la tranche mezzanine du graphique 8.3 est réduite et que cette réduction de principal est répartie en parts égales sur les tranches senior et equity ? En particulier, quelles sont les conséquences sur les données du tableau 8.1 ?

8.20 Supposons que la structure du graphique 8.1 ait été créée en 2000 avec une durée de vie de 10 ans. Il n'y a aucun défaut jusqu'à la fin de la huitième année où le taux de défaut passe à 17 % du principal. Il n'y a pas de défaut pendant les deux dernières années. Évaluez la performance des tranches. Vous supposerez que le taux LIBOR est constant à 3 %. Envisagez aussi bien le cas des intérêts que du principal.

Chapitre 9

Problèmes de crédit et coûts de financement

Avant d'aborder l'évaluation des options et d'autres actifs dérivés complexes, nous étudions dans ce chapitre plusieurs procédures d'ajustement qui sont devenues importantes sur les marchés d'actifs dérivés. Il s'agit notamment d'ajustements destinés à tenir compte du risque de défaut (CVA pour *Credit Valuation Adjustment* ou DVA pour *Debt Valuation Adjustment*) ou des conditions de financement (FVA pour *Funding Valuation Adjustment*, MVA pour *Margin Valuation Adjustment* et KVA pour *Capital Valuation Adjustment*). De manière générique, ces ajustements sont appelés les XVA. Certains d'entre eux ont une justification théorique solide, d'autres sont purement empiriques. Comme nous allons le montrer, les théoriciens n'ont pas de problème avec les CVA et DVA, mais ont de fortes réserves sur les FVA, MVA et KVA.

9.1 Risque de crédit : CVA et DVA

Il est important de garder à l'esprit que le taux d'actualisation retenu dans l'évaluation des actifs dérivés n'est pas destiné à tenir compte du risque de crédit. Jusqu'à présent, quels que soient les taux retenus (OIS ou LIBOR), nous avons supposé qu'aucune des deux parties ne faisait défaut. Nous employons l'expression « valeur hors défaut » pour qualifier cette évaluation. CVA et DVA sont des ajustements de la valeur hors défaut destinés justement à tenir compte de la possibilité d'un défaut d'une des contreparties. Cette question du risque de crédit sera détaillée au chapitre 24.

Supposons qu'une banque et une contrepartie soient engagées dans une transaction bilatérale de gré à gré. Notons d'abord que l'arrangement entre les deux parties indique très probablement que le netting s'applique au contrat si nécessaire. Cela signifie que l'ensemble des actifs dérivés qui lient ces deux contreparties est considéré comme un contrat unique en cas de défaut. Quand une des deux parties est en faillite ou ne fait pas face à ses engagements (en ce qui concerne le collatéral ou par rapport à une autre de ses obligations contractuelles), l'autre partie déclarera le défaut. Cela conduit à une fin prématurée des contrats liant les deux parties. Il est alors établi un montant

compensatoire que la partie en défaut doit payer à l'autre, montant qui doit tenir compte des coûts encourus par la partie qui n'est pas en défaut pour réajuster sa position en faisant appel à d'autres contreparties.

Supposons dans un premier temps qu'il n'y a pas de collatéral. Si la fin prématurée du contrat survient alors que le portefeuille a une valeur positive pour la banque et une valeur négative pour l'autre partie, la banque est alors créancière sans garantie et risque fort de perdre de l'argent, car elle a peu de chances de récupérer l'intégralité de la valeur du portefeuille. Dans le cas contraire, la banque doit de l'argent à l'autre partie et n'encourt pas de perte. L'ajustement pour risque de crédit, noté CVA (pour *Credit Value Adjustement*), est défini comme l'estimation par la banque de la valeur actuelle espérée du coût d'un défaut de la contrepartie.

Supposons que la maturité maximale des actifs dérivés en portefeuille soit de T années. Pour calculer le CVA, la banque divise la période totale de T années en N sous-intervalles et calcule pour chaque intervalle :

1. La probabilité q_i d'une fin prématurée des contrats pendant l'intervalle considéré ;
2. La valeur actuelle espérée de la perte sur le portefeuille, v_i, en cas de fin prématurée au milieu de l'intervalle considéré.

Le CVA est alors :

$$\text{CVA} = \sum_{i=1}^{N} q_i v_i \tag{9.1}$$

où N est le nombre d'intervalles. Même si cette formule est élémentaire, le calcul de ses composants, notamment les v_i, peut s'avérer complexe. Nous revenons sur ce point au chapitre 24.

Si f_{nd} désigne la valeur du portefeuille hors défaut, la prise en compte du défaut conduit à une évaluation égale à :

$$f_{nd} - \text{CVA}$$

Cependant, l'histoire ne s'arrête pas là, car la banque elle-même peut faire défaut. Par conséquent, la contrepartie fait un calcul analogue à celui du CVA, qu'on appelle DVA (*Debt Value Adjustment*). Du point de vue de la banque, c'est le gain espéré sur le portefeuille si elle-même fait défaut. On a alors :

$$\text{DVA} = \sum_{i=1}^{N} q_i^* v_i^* \tag{9.2}$$

où les q_i^* sont les pendants des q_i et les v_i^* les pendants des v_i pour ce qui concerne le défaut de la banque.

Finalement, la valeur du portefeuille d'actifs dérivés s'écrit :

$$f_{nd} - \text{CVA} + \text{DVA}$$

L'idée qu'une banque puisse profiter de son propre défaut paraît curieux. Une façon de comprendre cette bizarrerie consiste à garder à l'esprit le fait que les actifs dérivés sont

des jeux à somme nulle ; le gain d'une des contreparties est toujours égal à la perte de l'autre. Si la contrepartie Y de la banque considérée (appelée X) est dans une situation pire que celle de X, le résultat net sera positif pour X, puisque X ne sera pas obligée d'honorer ses contrats lorsque la valeur hors défaut de ceux-ci est négative.

Sans ajustement comme le DVA, ce serait difficile d'accepter d'entrer dans une transaction bilatérale. En effet, considérons X et Y qui négocient un swap de taux (sans collatéral) où X paiera un taux fixe et recevra le LIBOR. Supposons, pour cet exemple, qu'il n'y a pas d'autre transaction en cours entre X et Y. Les deux parties conviennent que, s'il n'y a pas de risque de défaut, le taux fixe devrait être de 2,2 %. Mais lorsque X prend en compte le potentiel défaut de Y, le taux devrait être de 2,1 % au lieu de 2,2 %. Dans le même temps, si Y prend en compte le risque de défaut de X, le taux devrait être de 2,35 %. On voit bien que s'il n'y a pas d'ajustement, les deux parties ont peu de chances de se mettre d'accord sur une transaction. En revanche, si chaque contrepartie calcule un DVA en tenant compte de son propre défaut potentiel, un accord a plus de chances d'être trouvé, car les flux seront évalués de la même façon de chaque côté. Le DVA a cependant une conséquence contre-intuitive. À mesure que la solvabilité de la banque diminue, q_i^* augmente dans l'équation (9.2) et le DVA croît. Cela a pour effet d'augmenter la valeur du portefeuille d'actifs dérivés pour la banque. À mesure que la solvabilité de la banque s'améliore, q_i^* diminue, et le DVA fait de même, baissant ainsi la valeur du portefeuille. Pourquoi la banque devrait-elle tirer profit d'une détérioration de sa qualité de crédit ? La raison est simple : comme la banque devient plus susceptible de faire défaut, il est plus probable qu'elle n'aura pas à respecter ses engagements sur son portefeuille d'actifs dérivés.

Le collatéral (les garanties)

Quand le contrat de gré à gré comporte des garanties, les calculs sont plus compliqués. On ajoute alors au contrat une annexe (CSA, pour *credit support annex*) qui spécifie comment le montant du collatéral est calculé et sous quelle forme il sera payé. En général, quand il s'agit de cash, le taux d'intérêt sur ce collatéral est voisin du taux au jour le jour. Quand il s'agit de titres, leur valeur de marché n'est pas prise en compte dans son intégralité.

Pour calculer v_i et v_i^*, il faut évaluer les garanties qui seraient effectivement apportées par la banque ou la contrepartie en cas de fin prématurée du contrat. Ce n'est pas simple, car on peut justement anticiper qu'en cas de défaut, le dépôt des garanties cesse plusieurs jours avant la fin prématurée effective du contrat.

Les garanties sont constituées de cash ou d'actifs négociables (les actifs pouvant être utilisés comme garantie, ainsi que la décote associée, sont précisés dans le contrat). L'intérêt payé sur ces garanties est en général le taux sans risque.

9.2 FVA et MVA

Les ajustements liés au financement (FVA et MVA) correspondent aux financements nécessaires à la prise de position sur les actifs dérivés. Pour illustrer ce processus, sup-

posons qu'un trader d'actifs dérivés (une banque A) soit dans la situation décrite au graphique 9.1.

Graphique 9.1 : Swaps conclus par la banque A. La transaction avec la banque B est compensée grâce à une CCP, alors que celle avec le client final est bilatérale.

La banque A est entrée dans un contrat de swap de taux à 5 ans avec une entreprise pour contrepartie. La banque a couvert son risque en entrant dans un swap parfaitement symétrique avec une banque B. On remarque que A s'est assurée un profit sans risque de 0,1 % dans cette opération, puisqu'elle reçoit 3 % alors qu'elle ne paie que 2,9 %. Supposons que la transaction entre la banque A et la banque B soit gérée par l'intermédiaire d'une CCP, les deux contreparties déposant une marge initiale et faisant éventuellement face à des variations de cette marge (c'est un processus standard depuis la crise de 2008).

Si la transaction de la banque A avec l'entreprise est gérée selon les mêmes règles, avec la même compensation centralisée, la situation de la banque A est simple. Si ce n'est pas le cas, en particulier si la transaction est bilatérale sans garanties, cet ensemble de transactions n'est pas neutre du point de vue du financement. Le swap entre les banques A et B est susceptible d'appels de marge, et si le taux d'emprunt de la banque A est supérieur à la rémunération des fonds immobilisés, cette opération entraîne un coût supplémentaire, qu'on note MVA (*Margin Valuation Adjustment*). Ce coût réduit, pour la banque A, la valeur du contrat avec l'entreprise.

Les variations de marge liées aux compensations centralisées peuvent également engendrer des besoins de financement. Supposons que la transaction avec la banque B ait une valeur négative pour la banque A, impliquant une valeur positive pour le contrat avec l'entreprise. Dans ce cas, la banque A aura des fonds immobilisés auprès de la CCP, fonds qui n'ont pas de contrepartie du côté de l'entreprise. Cette situation entraîne un besoin de financement, car la banque A doit recourir à du financement externe. Dans la situation symétrique où la transaction avec B a une valeur positive et celle avec l'entreprise a une valeur négative, la banque A reçoit une variation de marge de la CCP et ne doit rien payer à l'entreprise. Ce cas constitue une source de financement.

Continuons à supposer que le coût de la marge est supérieur aux intérêts reçus. C'est un véritable coût dans le premier cas (la banque A doit recourir à un financement externe) et un bénéfice dans le second (la banque A réduit son financement externe). Le FVA est un ajustement de la valeur des contrats dérivés qui reflète ces coûts et profits. La valeur actualisée des coûts de financement futurs prévus est notée FCA (*Funding Cost Adjustment*) et la valeur actuelle des bénéfices de financement futurs est notée FBA (*Funding Benefit Adjustment*). L'ajustement FVA réduit la valeur des actifs dérivés de la différence FCA – FBA. Il y a un ajustement positif ou négatif de la valeur des swaps du graphique 9.1 selon que le swap avec la banque B est susceptible d'avoir une valeur positive ou négative lorsque le temps passe. Cela dépend de la forme de la structure de taux des taux d'intérêt, comme l'explique la section 7.6.

La situation décrite au graphique 9.1 n'est pas le seul cas d'apparition de FVA ou de MVA. Le FVA peut être nécessaire à chaque fois qu'une banque noue un contrat sans collatéral avec une contrepartie. Dès que le contrat a une valeur positive, il y a un coût de financement. Dès que cette valeur est négative, il y a un bénéfice de financement. C'est la raison pour laquelle les changements de régulation s'orientent vers des exigences plus importantes en termes de marges pour les transactions bilatérales entre institutions financières aussi bien que pour les transactions qui passent par des CCP.

Pour calculer le MVA ou le FVA, il faut répondre à la question du coût de financement de la marge dans la situation du graphique 9.1. C'est à ce stade que se situent les désaccords entre théoriciens et praticiens. De nombreuses banques avancent que le coût de financement de la marge doit être égal au coût moyen de la dette. Supposons que la marge soit exprimée en dollars ; si l'intérêt reçu sur la marge est égal au taux des *federal funds* moins 20 bps, et si le coût moyen de la dette est égal au taux des *federal funds* plus 100 bps, ces banques considèrent que le coût de financement est de 120 bps par an.

D'un point de vue théorique, le taux spécifique auquel on finance un investissement ne doit pas influer sur la rentabilité exigée de cet investissement ; cette dernière doit être fixée en fonction du risque du projet. Or, la marge à financer sur les contrats dérivés peut être vue comme un investissement à très faible risque. Par conséquent, la banque devrait se contenter d'une rentabilité proche du taux sans risque. Dans l'exemple précédent, si la rémunération de la marge était de *federal funds* + 10 bps, compte tenu du faible risque, le coût de financement serait de 30 bps, et non de 120 bps comme nous l'avons calculé plus haut.

Hull et White (2012) utilisent deux arguments pour justifier cette approche. Le premier est qu'il y a un gain potentiel pour la banque sur les 100 bps de spread de crédit, puisqu'elle a la possibilité de faire défaut sur sa propre dette. C'est le même argument que pour le DVA expliqué précédemment, et c'est pourquoi Hull et White utilisent la notation DVA2. Du fait de cette économie potentielle, la banque n'a pas à transférer ce coût de financement au département des actifs dérivés.

Pour illustrer le second argument, considérons un taux sans risque de 2 % pour un coût de financement de 3,5 %. Si un projet sans risque rapporte 3 %, la banque doit-elle l'éviter sous prétexte que 3 % est inférieur à 3,5 % ? La réponse est évidemment que ce projet doit être entrepris. Le taux d'actualisation approprié est alors de 2 %, et le projet a une valeur actuelle nette positive.

Pour insister sur ce point, imaginons que la banque ait la possibilité de doubler ses projets et que tous les projets nouveaux soient sans risque ; le coût de financement moyen deviendrait 2,75 % au lieu des 3,5 % précédents… mais tous ces projets ne seraient pas entrepris s'ils étaient évalués avec un taux d'actualisation de 3,5 %.

Andersen *et al.* (2016) posent aussi la question de l'utilisation du coût de financement moyen dans le calcul de FVA. Ils considèrent le cas dans lequel les prêteurs n'anticipent pas l'investissement dans la marge des contrats dérivés qui sera effectué par la banque. Ces prêteurs sont agréablement surpris, puisque la banque devient moins risquée. Il y a donc un transfert de richesse des actionnaires vers les obligataires [1].

1. Voir L. B. G. Andersen, D. Duffie et Y. Song, "Funding Value Adjustments", *Working Paper* ssrn2746010.

Le débat général sur les XVA est analogue à la situation suivante. Dans le premier cours de finance d'entreprise, les étudiants apprennent le coût moyen pondéré du capital (WACC ou CMPC) d'une entreprise (non financière, le plus souvent) ainsi que le taux d'actualisation à utiliser pour les cash-flows futurs. Ils apprennent que ce taux dépend du risque du projet et non de la façon dont le projet est financé. Pour les sujets qui sont plus risqués que la moyenne, le taux d'actualisation doit être plus élevé que le CMPC, et pour les projets moins risqués que la moyenne, il doit être plus faible que le CMPC. Il existe cependant de nombreuses entreprises n'utilisant qu'un seul CMPC pour tous les projets. Cette pratique tend à rendre plus attractifs les projets plus risqués. De ce fait, les entreprises utilisant un seul taux d'actualisation ont tendance à devenir plus risquées au fil du temps.

L'analogie entre le cas ci-dessus et les XVA est que parmi les investissements d'une banque concernés par les FVA ou MVA, nombreux sont ceux dont le risque est inférieur à la moyenne. Un investissement dans la marge d'un contrat dérivé est généralement de risque faible par rapport aux autres investissements de la banque. Par conséquent, l'effet marginal est de diminuer le coût de financement de la banque [2].

Les différences de vues exprimées dans ce débat se résument à la différence entre un coût marginal (choix des théoriciens) et un coût moyen (choix des praticiens). Le dialogue imaginaire ci-dessous résume ce débat.

L'économiste financier : Le taux utilisé pour actualiser doit refléter le risque du projet. Utiliser un coût moyen revient à supposer que tous les projets de la banque ont le même niveau de risque.

L'ingénieur financier : Mais bloquer des fonds pour financer la marge (peu risquée) d'un contrat d'actifs dérivés empêche d'utiliser les fonds pour autre chose ! En moyenne, la banque peut obtenir une rentabilité plus élevée que l'intérêt qu'elle obtient sur la marge. Les projets à faible rentabilité et faible risque représentent un coût.

L'économiste financier : Vous parlez comme si les fonds qui financent vos projets étaient rares. Mais si vous avez de bons projets, faiblement ou fortement risqués, vous trouverez toujours à les financer.

L'ingénieur financier : Je ne suis pas persuadé que les choses fonctionnent de cette façon dans la pratique.

9.3 Le KVA

Cet ajustement, lié au capital, est une charge supplémentaire dans une transaction sur actifs dérivés, à cause des exigences en capital qui peuvent être associées à tel ou tel contrat. Supposons un contrat d'actifs dérivés qui nécessite d'augmenter les capitaux propres d'un montant de 1 million de dollars. Combien cela coûte-t-il ? Ici encore, il y a une divergence entre théoriciens et praticiens. De nombreux praticiens diront que si les actionnaires exigent une rentabilité de 15 % et si la banque investit dans un projet

2. Voir J. C. Hull et A. White, "The FVA Debate", *Risk, 25th anniversary edition*, juillet 2012, 83-85.

quel que soit son risque, le coût du million de dollars supplémentaire est de 15 % (c'est l'équivalent du CMPC appliqué à tous les projets pour les entreprises non financières). Dans le contexte de l'évaluation des actifs dérivés, ces éléments impliquent un ajustement, noté KVA (*Capital Valuation Adjustment*), pour s'assurer que la rentabilité du capital supplémentaire est de 15 %. Les théoriciens défendent l'idée que la façon dont une entreprise est financée ne devrait pas affecter la façon dont elle évalue les projets (à l'exception d'éventuels effets fiscaux). Comme la banque augmente ses capitaux propres lors d'une opération de ce type, elle devient moins risquée, et ses financeurs (prêteurs et actionnaires) devraient devenir moins exigeants. Cet argument a plus d'un demi-siècle et sa validité théorique a résisté au passage du temps [3]. De nombreux praticiens réfutent cette théorie. Comme pour les MVA et FVA, la différence entre les deux approches réside dans le choix du coût moyen ou du coût marginal du capital. On peut ici imaginer le dialogue suivant.

Le théoricien : Le KVA n'est pas nécessaire. Tant que la position globale sur les actifs dérivés engendre une rentabilité qui reflète son risque, les investisseurs seront satisfaits.

Le praticien : Les exigences en capital ont augmenté depuis la crise pour les positions en actifs dérivés. Mes investisseurs demandent 15 % de rentabilité par an. Si je signe un contrat qui exige des capitaux propres supplémentaires du fait des nouvelles règles, je dois être sûr que la rentabilité sur ce capital sera bien de 15 % au moins.

Le théoricien : Puisque plus la banque se finance par capitaux propres, moins elle est risquée, la rentabilité exigée par les actionnaires va diminuer. Cela est vrai même si le risque moyen au niveau agrégé ne change pas. Par conséquent, le coût marginal de ces nouveaux capitaux propres est faible.

Le praticien : Je ne suis pas persuadé que les choses fonctionnent ainsi dans la pratique.

9.4 Les questions de calcul

Tous les ajustements XVA consomment beaucoup de temps de calcul. Des simulations de Monte-Carlo sont nécessaires pour évaluer les expositions futures au risque de crédit, les coûts de financement futurs espérés, ainsi que les exigences en capital espérées. Le CVA fait en général l'objet d'une gestion active par les banques. Parfois, elles achètent une assurance contre le défaut des contreparties sous la forme de CDS (*Credit Default Swaps*) évoqués à la section 7.11. Ces assurances réduisent les pertes en cas de défaut.

Comme nous l'avons vu à la section 9.1, les CVA et DVA doivent être calculés sur le portefeuille global des actifs dérivés que détient la banque avec une contrepartie donnée. Ces calculs ne peuvent s'effectuer transaction par transaction à cause du netting. Toute nouvelle transaction bilatérale avec cette contrepartie accroît ou diminue le CVA et le DVA en fonction de la façon dont le nouveau contrat change la position nette de la banque par rapport à la contrepartie.

3. F. Modigliani et M. H. Miller, "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment", *American Economic Review*, 48 (3), 1958, 261-297, et F. Modigliani et M.H. Miller, "Corporate Income Raxes and the Cost of Capital : A Correction", *American Economic Review*, 53 (3), 1963, 433-443.

En revanche, la variation du FVA se calcule transaction par transaction. La raison en est que le financement nécessaire pour un portefeuille est la somme des financements des transactions individuelles. Les MVA pour les transactions compensées par une CCP sont calculés au niveau du portefeuille. Dans la situation du graphique 9.1, c'est l'impact d'un nouveau contrat sur la marge initiale requise par la CCP pour le portefeuille de la banque A qui détermine les exigences de marge, et par conséquent le MVA. Le calcul du KVA est encore plus compliqué. Les règles utilisées par les régulateurs sont telles que les banques doivent en général modéliser l'ensemble de leurs portefeuilles pour déterminer les variations d'exigence en capitaux propres.

Résumé

Les banques et autres participants des marchés d'actifs dérivés se préoccupent depuis longtemps du risque de contrepartie. La prise en compte de ce risque conduit à opérer deux ajustements, le CVA et le DVA. Le CVA intègre la possibilité de défaut de la contrepartie et diminue donc la valeur du portefeuille que la banque possède avec cette contrepartie. Le DVA est un ajustement lié à la possibilité que la banque fasse défaut, ce qui augmente la valeur des actifs dérivés en portefeuille. Il n'y a pas de véritable mise en cause du fait que ces ajustements doivent être faits, mais beaucoup de gens sont moins à l'aise avec le DVA que le CVA. Pourquoi une banque devrait-elle trouver un avantage à tenir compte de sa potentielle faillite ?

L'ajustement FVA est lié au financement requis (ou engendré) par une transaction d'actifs dérivés. L'ajustement MVA quantifie le coût de financement de la marge initiale. Enfin, l'ajustement KVA est destiné à tenir compte de l'impact de la transaction sur les exigences de fonds propres. La théorie financière classique nous dit que la façon dont un projet est financé ne devrait pas influencer son évaluation. Les coûts moyens de la dette et des capitaux propres ne doivent pas être considérés comme systématiquement pertinents pour de nouveaux contrats dérivés. En dépit de cela, de nombreuses banques calculent les MVA, FVA et KVA en fonction de ces coûts moyens.

Références complémentaires

Anderson, L., G., B., D. Duffie et Y. Song, "Funding value Adjustments", *Working Paper*, ssrn2746010.

Gregory, J., *The XVA Challenge : Counterparty Credit Risk, Funding, Collateral, and Capital*. Wiley, Chichester, 2015.

Hull, J. C. et A. White, "The FVA Debate", *Risk, 25th Anniversary edition*, juillet 2012, 83-85.

Hull, J. C. et A. White, "Valuing derivatives : Funding Value Adjustments and Fair Value", *Financial Analysts Journal*, 70 (3), mai-juin 2014, 46-56.

Hull, J. C. et A. White, "Collateral and Credit Issues in derivatives Pricing", *Journal of Credit Risk*, 10 (3), 2014, 3-28.

Hull, J. C. et A. White, "XVAs : A Gap Between Theory and Practice", *Risk*, 29(5), mai 2016, 50-52.

Kenyon, C. et Green, A. D. (eds.), *Landmarks in XVA*. Risk Books, London, 2016.

Problèmes et exercices

9.1 Expliquez ce que sont les ajustements CVA et DVA.

9.2 Qu'arrive t-il au DVA d'une banque quand le marché considère que la probabilité de défaut a augmenté ? Dans quelle direction se modifie le résultat qu'elle affiche sur son portefeuille d'actifs dérivés ?

9.3 « L'impact du DVA est plus important que celui du CVA sur la volatilité des bénéfices. » Expliquez cette phrase.

9.4 Expliquez ce que le MVA et le FVA mesurent.

9.5 Expliquez les différences de point de vue entre les théoriciens et une grande partie des praticiens concernant le calcul des MVA et FVA.

9.6 Expliquez ce que le KVA mesure.

9.7 Expliquez les différences de point de vue entre les théoriciens et une grande partie des praticiens concernant le calcul du KVA.

9.8 Expliquez pourquoi le FVA peut être calculé pour une transaction donnée, sans tenir compte du reste du portefeuille, alors que ce n'est pas le cas pour le calcul du MVA.

9.9 Considérons une option achetée à un client par une banque. C'est la seule transaction de cette banque avec ce client et il n'y a pas de garanties. Les valeurs espérées de cette option au milieu des années 1, 2 et 3 sont égales à 6, 5 et 4. La probabilité de défaut de la contrepartie (banque) dans chacune de ces 3 années est de 3 % (2 %). Estimez les CVA et DVA de la banque pour cette transaction. Supposez que le taux de recouvrement est nul en cas de défaut et que les taux d'intérêt sont nuls.

9.10 Une entreprise doit choisir entre capitaux propres et dettes pour satisfaire un besoin de financement. Qu'arrive-t-il aux taux de rentabilité exigé par les actionnaires selon le choix fait par l'entreprise ?

9.11 Expliquez le principe du netting en supposant qu'il n'y a pas de garanties pour les contrats. En quoi le netting réduit-il les risques pour les deux parties ? Dans quelles circonstances le netting n'a-t-il pas d'effet sur le risque de crédit ?

Questions complémentaires

9.12 Le coût de financement moyen d'une entreprise est de 5 %, alors que le taux sans risque est de 3 %. La société a actuellement des projets d'une valeur de 9 millions d'euros. Elle envisage d'entreprendre 1 million d'euros supplémentaires de projets sans risque. Que peut-on anticiper pour le coût moyen de financement de cette société ?

9.13 Supposons que, pour un contrat d'actif dérivé de maturité 3 ans détenu par une banque, deux résultats A et B soient possibles. Si A survient, les valeurs du contrat au milieu des années 1 à 3 sont 3, 5 et 7. Si B survient, les valeurs correspondantes sont –2, –4 et –6. La probabilité que la contrepartie fasse défaut est de 1 % par an, et celle de la banque de 0,5 %. Calculez les CVA et DVA de la banque. Faites l'hypothèse qu'il n'y a pas de garanties, que les taux d'intérêt sont nuls et que ce contrat est le seul entre les deux parties.

Chapitre 10

Le fonctionnement des marchés d'options

En complément du chapitre 1, dans lequel les options ont été introduites, ce chapitre traite essentiellement des options portant sur des actions. Il expose également les principes de fonctionnement des marchés organisés, la terminologie utilisée, la cotation des contrats, les calculs de marges, etc. Les chapitres suivants abordent l'étude des portefeuilles contenant des options, l'évaluation de ces dernières, ainsi que les stratégies de couverture des portefeuilles d'options. Ce chapitre introduit les options portant sur les devises, les indices et les futures ; leur étude approfondie fera l'objet des chapitres 17 et 18.

Les options sont fondamentalement différentes des contrats forward ou futures. Une option donne à son détenteur le droit de faire quelque chose, mais pas l'obligation d'exercer ce droit, alors que, dans le cas d'un contrat forward ou futures, les deux parties sont engagées l'une envers l'autre. Il ne coûte rien (exception faite de l'appel de marge) de prendre part à un contrat forward ou futures, tandis que l'achat d'une option nécessite un paiement à l'avance.

Lorsqu'un graphique d'opérations utilisant des options est présenté, il est d'usage de négliger le principe d'actualisation. Ainsi, le bénéfice réalisé est égal à la différence entre le payoff délivré par l'option et le montant initial de son coût. Ce chapitre se conforme à la même pratique.

10.1 Les types d'options

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, il y a deux types basiques d'options. Une option d'achat (un *call*) donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu. Une option de vente (un *put*) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. La date maximale à laquelle

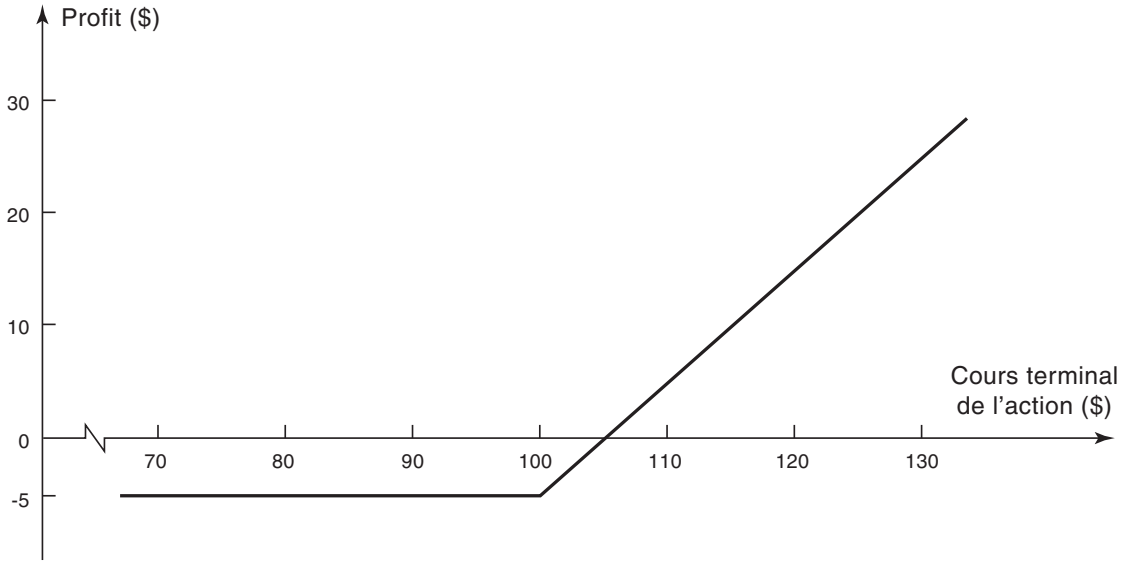
le droit peut être exercé est la date d'échéance. Le prix spécifié est appelé prix d'exercice (*strike price*).

Les options sont qualifiées d'américaines ou d'européennes, sans qu'il y ait aucun lien avec une quelconque situation géographique. Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine ; si l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance, elle est dite européenne. La plupart des options négociées sur les marchés organisés sont de type américain. Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites de celles des options européennes.

Les calls

Considérons un investisseur qui achète un call européen sur une action avec un prix d'exercice de 100 €, lui donnant le droit d'acquérir 100 titres. Supposons que le cours de l'action soit de 98 € et la date d'échéance dans 4 mois. Le prix de l'option, appelé premium, est de 5 € pour une action (le premium est toujours défini pour une unité de sous-jacent). Le coût initial du contrat est donc de 500 €. Comme l'option est supposée européenne, l'investisseur ne peut l'exercer qu'à l'échéance. Si, à cette date, le cours de l'action est inférieur à 100 €, l'investisseur décidera de ne pas exercer (il serait stupide d'acheter l'action à 100 € alors qu'elle peut être acquise pour un prix inférieur sur le marché). Dans cette situation, l'investisseur a perdu la totalité de sa mise initiale, à savoir 500 €. Si le cours de l'action est supérieur à 100 €, l'option sera exercée ; si, par exemple, le cours est de 115 €, l'investisseur peut, en exerçant son droit, acheter 100 titres à 100 € l'unité. S'il revend les titres immédiatement, il réalise un gain de 15 € par action, soit 1 500 €, en négligeant les coûts de transaction. En tenant compte de la mise initiale, le profit net est de 1 000 €.

Le graphique 10.1 montre l'évolution du profit net en fonction du prix du sous-jacent.

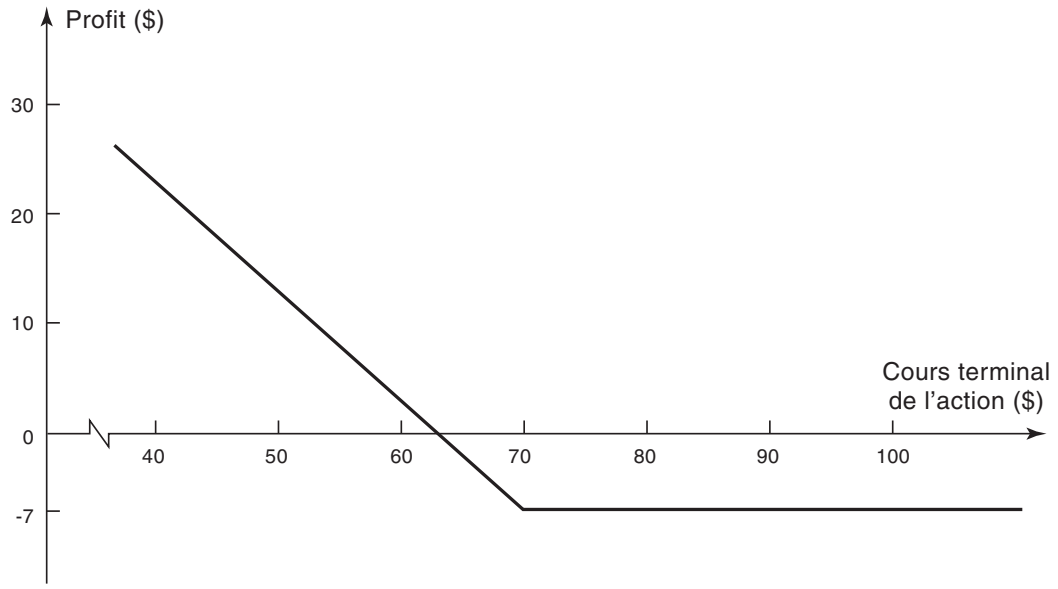


Graphique 10.1 : Profit d'un achat de calls européens sur une action.
Premium = 5 €, prix d'exercice = 100 €.

L'actualisation est négligée dans ce calcul de profit. Notez que, même en exerçant, on peut réaliser une perte nette. Dans cet exemple, c'est le cas si le prix final de l'action se situe entre 100 € et 105 €. Il est cependant optimal d'exercer dans cette zone car la perte sera inférieure à 500 €. De manière générale, les options d'achat doivent toujours être exercées si le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice à la date d'échéance.

Les puts

Alors que l'acheteur d'un call espère la hausse du prix du support, l'acheteur d'un put mise sur une baisse. Considérons l'acheteur d'un put européen portant sur 100 actions à un prix d'exercice de 70 €, alors que le cours de l'action est de 65 € et l'échéance dans 3 mois. Le premium est de 7 €. L'investissement initial est donc de 700 €. Ces options seront exercées à l'échéance si le cours à cette date est inférieur à 70 €. S'il est, par exemple, de 55 €, l'investisseur achètera 100 actions à ce prix sur le marché et, selon les termes du contrat, les vendra au prix de 70 €, dégageant un profit de 15 € par action, soit 1 500 € au total. En déduisant la mise initiale de 700 €, le profit net s'élève à 800 €. Ici encore, le profit n'est pas garanti puisque, si le cours de l'action termine au-delà de 70 €, l'investissement initial est perdu en totalité. Le graphique 10.2 montre l'évolution du profit net d'un achat de puts en fonction du prix du support.



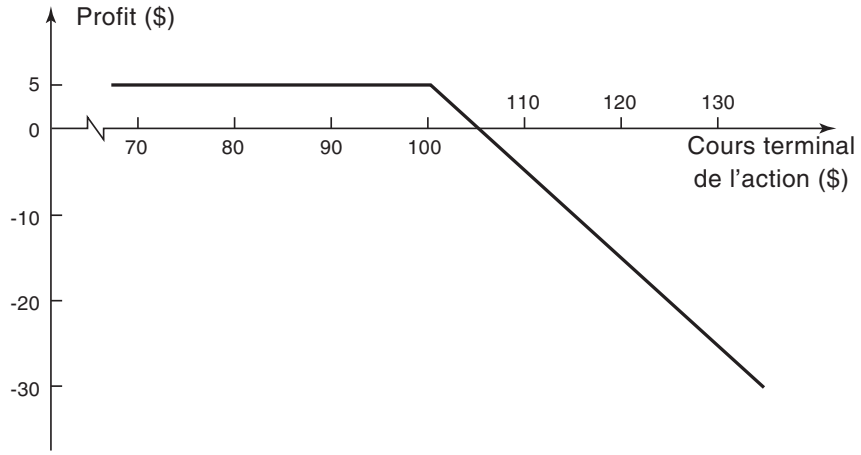
Graphique 10.2 : Profit d'un achat de puts sur une action.
Premium = 7 €, prix d'exercice = 70 €.

L'exercice prématuré

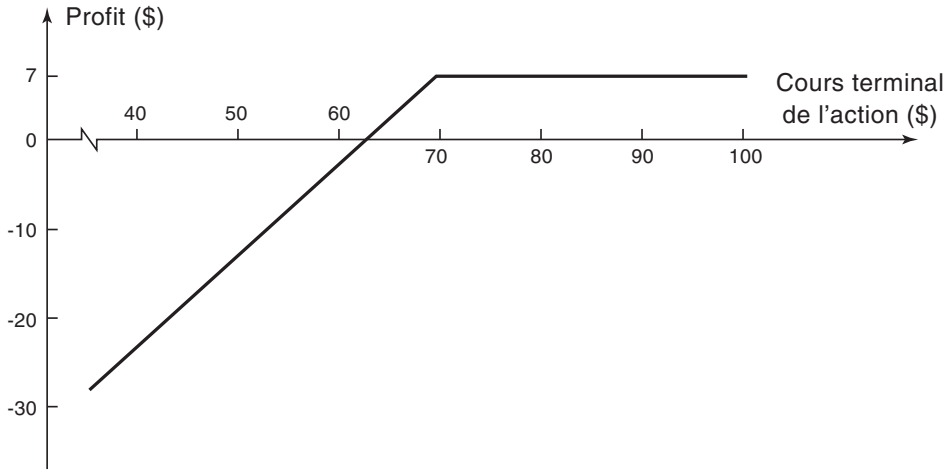
Comme nous l'avons mentionné plus haut, la plupart des options négociées sur les marchés organisés sont américaines. Dans les exemples précédents, si les options avaient été américaines, l'investisseur aurait pu éventuellement les exercer avant l'échéance. Nous verrons dans les chapitres suivants que, dans certaines circonstances, il peut être optimal d'exercer prématurément une option.

10.2 Les positions en options

Comme il existe deux types d'options (calls et puts) et que chaque transaction fait intervenir un acheteur et un vendeur, il y a quatre positions de base. Dans les graphiques 10.1 et 10.2, nous avions représenté les gains (pertes) des acheteurs d'options. Les graphiques 10.3 et 10.4 représentent les gains (pertes) des vendeurs de calls (10.3) et de puts (10.4) en fonction du prix du support.



Graphique 10.3 : Profit de la vente de calls européens sur une action.
Premium = 5 €, prix d'exercice = 100 €.



Graphique 10.4 : Profit de la vente de puts européens sur une action.
Premium =7 €, prix d'exercice = 70 €.

Les quatre positions possibles sont :

1. L'achat de call ;
2. L'achat de put ;
3. La vente de call ;
4. La vente de put.

On peut aisément caractériser le payoff terminal de chacune des quatre positions. En notant K le prix d'exercice et S_T le prix du sous-jacent à la date d'échéance T, le payoff d'un achat de call s'écrit :

$$\max(S_T - K\,;0)$$

Cette formulation traduit le fait que l'exercice de l'option a lieu seulement si $S_T > K$. Si $S_T \leq K$, l'option est abandonnée et le payoff est nul. Le payoff du vendeur du call est l'opposé de celui de l'acheteur ; il est égal à :

$$-\max(S_T - K\,;0) = \mathbf{min}(K - S_T\,;0)$$

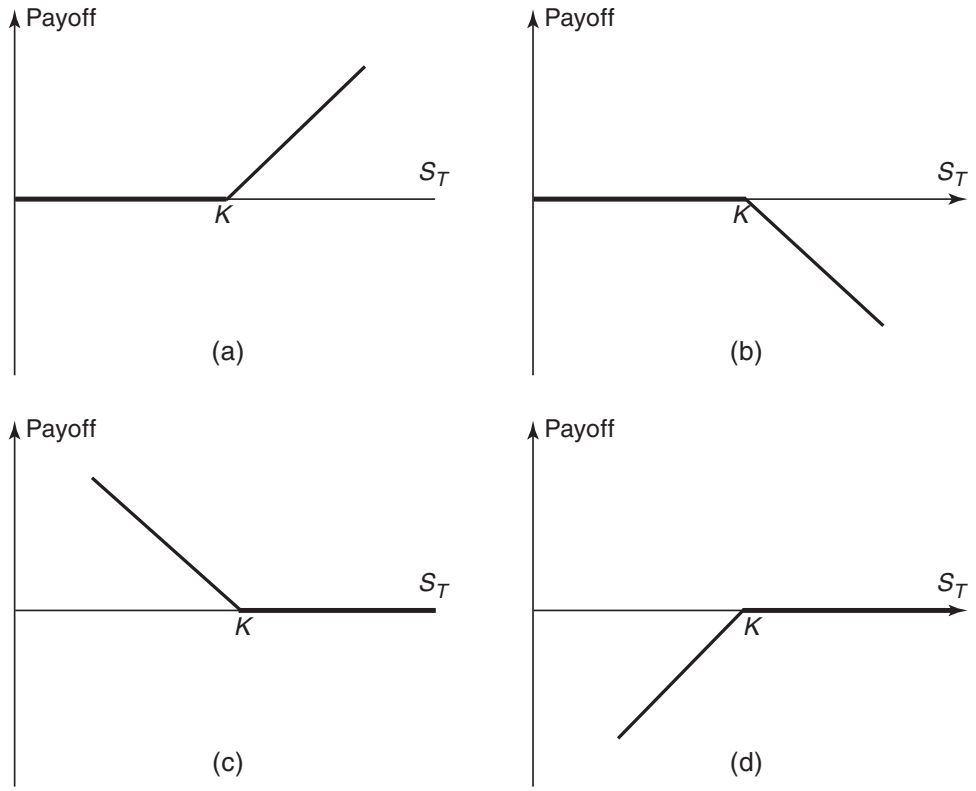
Le payoff de l'acheteur d'un put s'écrit :

$$\max(K - S_T\,;0)$$

Celui du vendeur du put est l'opposé du précédent, soit :

$$-\max(K - S_T\,;0) = \mathbf{min}(S_T - K\,;0)$$

Le graphique 10.5 résume ces différentes situations.



Graphique 10.5 : Payoffs des positions en options à l'échéance :
(a) achat de call ; (b) vente de call ; (c) achat de put ; (d) vente de put.
K= prix d'exercice, S_T = prix de l'action à l'échéance

10.3 Les actifs sous-jacents

Cette section fournit une première approche des options portant sur les actions, les devises, les indices boursiers et les contrats futures.

Les options sur actions

La plupart des transactions d'options sur actions se font sur des marchés organisés. Aux États-Unis, les marchés organisés d'options sont le Chicago Board Options Exchange (www.cboe.com), NYSE Euronext (www.euronext.com), qui a racheté l'American Stock Exchange en 2008, l'International Securities Exchange (www.iseoptions.com) et le Boston Options Exchange (www.bostonoptions.com). Plusieurs milliers d'actions sont supports de contrats d'options sur ces marchés. Un contrat donne le droit d'acheter ou de vendre 100 actions au prix d'exercice spécifié. Cette quotité semble raisonnable car les actions s'échangent le plus souvent par multiples de 100. En France, les options sur actions sont cotées sur Euronext.Liffe, marché des options négociables de Paris (www.euronext.com). La quantité de titres sous-jacents par contrat dépend du prix de ce sous-jacent. En effet, si l'action support cote 0,50 €, les contrats d'options porteront sur un nombre plus élevé de titres supports que si l'action cote 150 €.

Les options sur ETP

Le CBOE négocie des options sur de nombreux Exchange-Traded Products (ETP). Les ETP sont cotés sur une bourse et échangés comme une action de société. Ils sont conçus pour reproduire les performances d'un marché particulier, souvent en suivant un indice de référence sous-jacent. Les ETP sont parfois également appelés ETV (*Exchanged-Traded Vehicle*s). L'ETP le plus courant est un ETF (*Exchange-Traded Fund*). Ces ETF sont généralement conçus pour suivre un indice action ou un indice obligataire. Par exemple, l'ETF SPDR S&P500 est élaboré pour fournir aux investisseurs le rendement qu'ils gagneraient s'ils investissaient dans les 500 actions qui constituent l'indice S&P500. Les autres ETP sont conçus pour suivre les performances des matières premières ou des devises.

Les options sur devises

La plupart des transactions d'options sur devises se font maintenant de gré à gré, mais il y a quelques marchés organisés. Les négociations d'options sur devises aux États-Unis se réalisent notamment sur la NASDAQ OMX (www.nasdaqtrader.com), qui a racheté le Philadelphia Stock Exchange en 2008. Y sont négociées de nombreuses options européennes portant sur une large gamme de devises. Un contrat permet d'acheter ou de vendre 10 000 unités d'une devise (1 000 000 pour le yen) en échange de dollars US. Les options sur devises sont décrites plus en détail au chapitre 17.

Les options sur indices

De nombreuses options sur indices sont négociées à travers le monde à la fois sur les marchés de gré à gré et sur les marchés organisés. Aux États-Unis, les contrats les plus actifs sont ceux qui ont pour sous-jacent le S&P500 (SPX), le S&P100 (OEX), le Nasdaq 100 (NDX) et le Dow Jones Industrial Average (DJX). Tous ces contrats d'options sont traités sur le Chicago Board Options Exchange. Sur Euronext, les options sur indices portent en particulier sur l'indice CAC 40. La plupart de ces options sont européennes, à l'exception du contrat sur le S&P100, qui est américain. Un contrat

donne le droit d'acheter ou de vendre n fois l'indice au prix d'exercice spécifié. Par exemple, $n = 100$ pour les options sur le S&P500 et n = 10 pour certaines options sur le CAC 40. Le dénouement a toujours lieu en cash, plutôt qu'en livrant le portefeuille correspondant à l'indice. Considérons par exemple un call sur le CAC 40 avec un prix d'exercice de 5 500. Supposons qu'à la date d'exercice, l'indice vaille 5 600. Le vendeur du contrat paie alors à l'acheteur $(5\,600 - 5\,500) \times 10 = 1\,000$ €. Ce règlement est fondé sur la valeur de l'indice à la clôture du jour où l'acheteur a décidé d'exercer. De ce fait, comme on peut s'y attendre, les détenteurs attendent généralement la fin de la journée avant de se décider à exercer une option. Ces options sur indices sont analysées en détail au chapitre 17.

Les options sur futures

Lorsqu'un marché organisé cote des contrats futures, il cote aussi souvent des options portant sur ces contrats futures. En règle générale, l'échéance d'une option portant sur un contrat futures se situe peu avant la date d'échéance du futures sous-jacent. Quand un call est exercé par le détenteur de l'option, ce dernier obtient la différence entre le prix futures et le prix d'exercice. Symétriquement, lorsqu'un put est exercé par le détenteur de l'option, il reçoit la différence entre le prix d'exercice et le prix futures. Les options sur contrats futures sont analysées plus précisément au chapitre 18.

10.4 Définition des contrats d'options sur actions

Dans la suite de ce chapitre, nous traitons presque exclusivement de contrats d'options sur actions échangés sur des marchés organisés. Les spécifications précises des contrats – date d'échéance, prix d'exercice, conditions particulières lors des paiements de dividendes, limitations des positions, etc. – sont définies par le marché sur lequel sont traités ces contrats, mais les principes qui sous-tendent la fixation de ces spécifications sont d'application très générale.

Dates d'échéance

Une des spécifications d'un contrat est le mois d'échéance. Par exemple, un call IBM janvier est une option d'achat sur l'action IBM qui expire en janvier. Sur le marché américain, l'échéance survient le samedi qui suit le troisième vendredi du mois d'échéance, ce vendredi étant le dernier jour pendant lequel les options peuvent s'échanger sur le marché.

Les options sur actions fonctionnent sur des cycles avec des échéances mensuelles, trimestrielles, voire semestrielles pour des options longues. Un cycle janvier d'échéances trimestrielles comporte quatre échéances : janvier, avril, juillet, octobre. De même, le cycle février compte les échéances février, mai, août, novembre. Enfin, le cycle mars est constitué des échéances mars, juin, septembre, décembre. Lorsque la date d'échéance du mois courant n'a pas encore été atteinte, les options se négocient sur quatre échéances : le mois courant, le mois à venir et les deux mois suivants du cycle. Lorsque la date d'échéance du mois courant est passée, les options traitées ont pour échéances : le mois

suivant, le mois précédant le prochain mois du cycle, ainsi que les deux mois suivants du cycle. Par exemple, IBM fonctionne sur un cycle janvier. Au début du mois de janvier sont traitées les échéances janvier, février, avril et juillet. À la fin du mois de janvier, on traite les échéances février, mars, avril et juillet ; au début du mois de mai, ce sont mai, juin, juillet et octobre qui sont échangés, et ainsi de suite.

Sur Euronext, depuis septembre 2004, les options sur actions sont négociées et peuvent être exercées jusqu'au dernier jour de Bourse du mois d'échéance correspondant au troisième vendredi du mois d'échéance à 17 h 30. Les options courtes, américaines, fonctionnent sur les cycles d'échéances mars, juin, septembre, décembre. Trois échéances trimestrielles sont en général cotées, mais ce nombre peut aller jusqu'à cinq pour un sous-ensemble de supports défini par les autorités de marché. Quand un contrat est arrivé à échéance, un autre prend le relais.

Des options à échéance éloignée, appelées simplement options longues sur Euronext, ou LEAPS (*Long-term Equity Anticipation Securities*) sur le marché US, sont aussi traitées sur certaines actions. Leur durée de vie peut aller jusqu'à 39 mois selon le marché. La date d'échéance des LEAPS se situe toujours au mois de janvier.

Les prix d'exercice

Les principes régissant la définition des prix d'exercice par les autorités de marché sont les mêmes partout. Évidemment, des détails techniques peuvent être différents, par exemple le nombre de prix d'exercice cotés simultanément, l'écart entre deux prix d'exercice successifs et, bien sûr, la devise de cotation, relative au pays considéré.

Les autorités de marché choisissent en principe les prix d'exercice de façon que les différences entre ceux-ci soient 2,50 $, 5 $ ou 10 $ selon le niveau de prix du sous-jacent. Habituellement, l'écart est de 2,50 $ lorsque le cours de l'action sous-jacente est compris entre 5 $ et 25 $, 5 $ pour un cours du sous-jacent compris entre 25 $ et 200 $, et 10 $ pour les titres valant plus de 200 $. Comme nous allons le voir, des opérations sur titres ou l'annonce de dividendes peuvent conduire à l'établissement de prix d'exercice ne respectant pas les règles qui viennent d'être énoncées.

Lorsqu'une nouvelle échéance est introduite, les autorités de marché ouvrent des contrats d'options aux deux ou trois prix d'exercice les plus proches du cours de l'action. Lorsque ce dernier sort de l'intervalle défini par les prix d'exercice extrêmes, un nouveau contrat est ouvert avec un nouveau prix d'exercice. À titre d'exemple, supposons qu'une action cote 84 $ quand l'échéance octobre commence à être cotée. Des calls et des puts de prix d'exercice 80 $, 85 $, 90 $ sont tout d'abord proposés. Si le cours passe à 90 $, un nouveau contrat de prix d'exercice 95 $ est ouvert à la cotation ; si le cours chute en deçà de 80 $, c'est un contrat à prix d'exercice 75 $ qui débute, et ainsi de suite. Comme nous l'avons indiqué précédemment, à quelques détails près, les principes d'ouverture de nouveaux contrats sont identiques sur tous les marchés. L'objectif est de toujours coter des contrats avec des prix d'exercice les plus proches du cours du support. Une asymétrie peut cependant exister. Sur Euronext, si l'indice CAC 40 est à 4 960, les autorités de marché ouvrent, pour les échéances trimestrielles et semestrielles, des contrats de calls avec des prix d'exercice de 5 000, 5 100 et 5 200 et des contrats de puts à 5 000, 4 900 et 4 800. Comme sur le marché américain, quand la valeur du sous-jacent se modifie,

de nouveaux contrats avec des prix d'exercice sont ouverts de façon à toujours avoir au moins un contrat dont le prix d'exercice est proche de la valeur du sous-jacent et deux prix d'exercice supérieurs (inférieurs) pour les calls (puts). Concernant les options sur actions, les écarts entre prix d'exercice varient de 0,10 € pour les prix d'exercice inférieurs à 1 € et jusqu'à 40 € pour les prix d'exercice supérieurs à 200 €.

Terminologie

Pour chaque actif et à chaque date, de nombreux contrats d'options différents sont échangés. Considérons une action support de contrats d'options négociés sur quatre échéances, avec cinq prix d'exercice différents. En tenant compte du type d'option (calls et puts), on a donc 40 contrats différents. Toutes les options du même type (call ou put) sur un même support définissent une *classe* d'options. Par exemple, les calls sur IBM constituent une classe, et les puts sur IBM une autre classe. Une *série* d'options est constituée des options d'une même classe qui ont le même prix d'exercice et une date d'échéance identique. En d'autres termes, une série d'options définit un contrat particulier. Les calls IBM-160-octobre 2017 constituent une série d'options ; il s'agit des options d'achat sur IBM de prix d'exercice 160 $ et d'échéance octobre 2017.

Les options sont classées *dans la monnaie* (ou *en dedans*), *à la monnaie* (on dit aussi *à parité*) ou *en dehors de la monnaie* (ou plus simplement *en dehors*). Si S désigne le prix de l'action et K le prix d'exercice, un call est dans la monnaie si $S > K$, à la monnaie si $S = K$ et en dehors si $S < K$. Un put est dans la monnaie si $S < K$, à la monnaie si $S = K$ et en dehors si $S > K$. Il est clair qu'une option fera l'objet d'un exercice si et seulement si elle est dans la monnaie. En l'absence de coûts de transaction, une option dans la monnaie sera toujours exercée à la date d'échéance, si elle n'a pas été exercée plus tôt [1].

La valeur intrinsèque d'une option se définit comme le maximum de 0 et du flux qu'engendrerait un exercice immédiat. Pour un call, la valeur intrinsèque est donc définie par $\max(S - K\,;\,0)$. Pour un put, elle est égale à $\max(K - S\,;\,0)$. En conséquence, une option est dans la monnaie lorsque sa valeur intrinsèque est strictement positive.

Une option américaine dans la monnaie ne peut valoir moins que sa valeur intrinsèque, puisque le détenteur peut obtenir cette valeur en exerçant immédiatement. Le plus souvent, il est préférable pour le détenteur d'une option américaine d'attendre plutôt que d'exercer immédiatement. L'option possède dans ce cas une valeur-temps, encore appelée valeur spéculative. La valeur totale d'une option peut être obtenue par la somme de sa valeur intrinsèque et de sa valeur-temps.

Options Flex

Le Chicago Board Options Exchange offre des options Flex (pour « flexible ») sur actions et sur indices. Ce sont des options aux caractéristiques non standardisées. Ce sont par

1. La section 20.4 propose des définitions alternatives, généralement utilisées par les traders, pour les expressions « dans la monnaie », « en dehors de la monnaie » et « à la monnaie ».

exemple les prix d'exercice ou les échéances, qui sont différents de ceux proposés pour les produits standardisés. Dans certains cas, ces options peuvent être européennes, alors que celles qui sont cotées sur le marché organisé sont américaines. Les options Flex sont en fait une tentative des marchés organisés pour reprendre des parts de marché aux marchés de gré à gré. Les autorités de marché exigent cependant un volume minimal (par exemple, 100 contrats) pour maintenir la négociation d'options Flex.

Les autres produits non standards

Outre les options Flex, le CBOE propose un certain nombre d'autres produits non standard tels que :

1. Les options sur tracker (ETF – *Exchange-Traded Fund* – ou fonds indiciel coté) [2] ;
2. Les weeklys. Ce sont des options qui sont créées un jeudi et qui expirent le vendredi de la semaine suivante ;
3. Les options binaires (aussi appelées digitales). Ce sont des options qui offrent un gain fixe de 100 $ si le prix d'exercice est atteint. Par exemple, un call binaire de prix d'exercice de 50 $ offre un payoff de 100 $ si le cours de l'action sous-jacente dépasse 50 $ à l'échéance. De la même façon, un put binaire de prix d'exercice de 50 $ payera 100 $ si le cours du sous-jacent est inférieur à 50 $ à l'échéance. Les options digitales sont présentées en détail au chapitre 26 ;
4. Les CEBO (*Credit Event Binary Options*). Ce sont des options qui paient un payoff fixe si une entreprise particulière (appelée l'entité de référence) présente un évènement de crédit avant la date d'échéance. Les événements de crédit sont définis comme une faillite, un défaut de paiement des intérêts ou du principal de la dette, ou encore une restructuration de la dette. Les dates d'échéance sont au mois de décembre d'une année particulière et, le cas échéant, les payoffs sont versés à cette date d'échéance. Un CEBO est un type de swap de défaut de crédit (voir la section 7.11 pour une introduction aux swaps sur les risques de crédit et le chapitre 25 pour davantage de détails) ;
5. Les options DOOM. Ce sont des options de vente très en dehors de la monnaie. Leur valeur est très faible en raison de leur prix d'exercice particulièrement bas. Elles ne permettront un gain que si le prix de l'actif sous-jacent plonge. Les options DOOM offrent le même type de protection que les swaps de défaut de crédit.

Dividendes et opérations sur titres

Les premières options négociées de gré à gré étaient protégées contre le paiement de dividendes. Lorsque la société annonçait un dividende, le prix d'exercice des options était diminué du montant du dividende le jour du détachement. Les options négociables

2. Les trackers sont devenus une alternative populaire aux fonds communs de placement pour les investisseurs. Ils sont négociés comme des actions et sont conçus de telle sorte que leur valeur réplique la valeur des actifs du fonds.

échangées sur les marchés organisés ne sont pas, en revanche, protégées contre le paiement du dividende. En d'autres termes, quand le dividende est détaché, il n'y a pas d'ajustement des caractéristiques du contrat. Toutefois, un montant de dividende particulièrement important peut entraîner une exception à cette règle (voir encadré 10.1).

Encadré 10.1 L'important versement de dividendes du Groupe Gucci

Lorsqu'une somme particulièrement importante est versée en dividendes (représentant plus de 10 % de la valeur des actions), un comité de l'Options Clearing Corporation (OCC) du CBOE (Chicago Board Options Exchange) peut décider d'ajuster les caractéristiques des contrats d'options échangés sur le marché. Le 28 mai 2003, Gucci Group NV (GUC) déclara le détachement d'un dividende de 13,50 € par action, ce qui fut approuvé par l'assemblée générale des actionnaires du 16 juillet 2003. Ce dividende représentait 16 % de la valeur de cotation des actions au moment de l'annonce. Le comité de l'OCC décida alors d'ajuster les caractéristiques des contrats d'options comme suit : l'exercice de l'option déclencherait la livraison de 100 actions, auxquelles devraient s'ajouter $100 \times 13{,}50 = 1\,350$ € de liquidité. Le détenteur d'un call devait alors payer 100 fois le prix d'exercice pour obtenir 1 350 € en plus des 100 actions. À l'inverse, le détenteur d'un put recevrait 100 fois le prix d'exercice en échange de la livraison de 100 actions et d'un versement de 1 350 €. Ces ajustements ont donc eu pour effet de réduire le prix d'exercice de 13,50 €. Les ajustements dus au versement d'un important dividende ne sont pas systématiques. Par exemple, le Deutsche Terminbörse (DTB, marché à terme d'instruments financiers allemand) préféra ne pas ajuster les caractéristiques des options concernant Daimler-Benz lorsque cette dernière surprit le marché, le 10 mars 1998, avec un dividende représentant 12 % du cours de son action.

Les options négociables sur les marchés organisés sont, en revanche, ajustées pour les opérations sur titres. Une division des titres (*stock split*) survient quand chaque action (appelée ancienne) est transformée en plusieurs actions (appelées nouvelles). Par exemple, dans une opération de division 3 pour 1, chaque action ancienne est remplacée par trois nouvelles. Comme une division de titres ne change pas la valeur de la société, ni sa capacité à faire des profits, on ne peut s'attendre à ce que cette opération modifie la richesse des actionnaires. Toutes choses égales par ailleurs, le prix de l'action devrait donc être divisé par trois. Plus généralement, une division n pour m devrait diviser le prix de l'action par $\frac{n}{m}$. Les spécifications des contrats d'options sont donc ajustées pour refléter le changement attendu du prix de l'action. Après une division n pour m, le prix d'exercice est multiplié par $\frac{m}{n}$ et le nombre de titres correspondant à un contrat d'option est multiplié par $\frac{n}{m}$. Si le prix baisse dans les proportions attendues, la valeur totale du contrat est inchangée, aussi bien pour l'acheteur que pour le vendeur.

■ **Exemple 10.1** Considérons un contrat de call donnant le droit d'acheter 100 actions d'une société à 30 € l'une. La firme réalise une division 2 pour 1. Les termes du contrat sont alors modifiés, et le détenteur du contrat a le droit d'acheter 200 actions à 15 € l'une.

Les contrats d'options sont aussi ajustés pour les dividendes en titres (*stock dividend*). Cela consiste pour une firme à émettre de nouvelles actions qui sont distribuées aux actionnaires existants. Par exemple, un dividende en titres de 20 % signifie que chaque détenteur de 5 titres en reçoit un sixième. Comme la division des titres, la présente opération n'a pas d'effet sur la capacité de la firme à réaliser des bénéfices. Le prix de l'action devrait donc baisser. L'exemple que nous venons de donner est équivalent à une division de titres 6 pour 5. Toutes choses égales par ailleurs, le prix de l'action devrait être multiplié par $\frac{5}{6}$. Les termes des contrats d'options sont alors ajustés de façon à refléter la baisse attendue du prix de l'action ; cet ajustement prend la même forme que celui qui est décrit pour les divisions de titres.

■ **Exemple 10.2** Considérons un put donnant le droit de vendre 100 titres d'une société à 15 € l'un. Supposons que la compagnie annonce un dividende en titres de 25 % ; cela équivaut à une division de titres 5 pour 4. Les termes du contrat sont modifiés de façon que le détenteur de l'option ait le droit de vendre 125 titres au prix de 12 € l'un.

Des ajustements sont aussi réalisés lors de l'émission de droits de souscription. L'idée de base consiste à calculer le prix théorique des droits et à réduire le prix d'exercice des options en proportion.

Les limites des positions et d'exercice

Le Chicago Board Options Exchange impose en général des limites sur la quantité de contrats qui peuvent être achetés ou vendus. La limite porte sur la quantité détenue sur un côté du marché, c'est-à-dire que les achats de calls et les ventes de puts sont du même côté puisque l'exercice de ces contrats conduit à l'achat d'actions. De la même façon, l'achat de puts et la vente de calls se situent du même côté du marché. La limite d'exercice est égale à la limite de position. Elle définit le nombre maximal de contrats qui peuvent être exercés par un individu (ou un groupe d'individus opérant ensemble) pendant une période de cinq jours consécutifs. Les limites de position sur les contrats ayant pour sous-jacent les actions les plus importantes et les plus liquides sont de 250 000 contrats. Sur les titres dont la capitalisation est moins importante, les limites sont de 200 000, 75 000, 50 000 ou 25 000 contrats.

Ces limites ont pour objet principal d'empêcher que des individus ou des groupes d'individus manipulent le marché. Toutefois, les avis sont partagés sur la pertinence de ces limites.

10.5 Les transactions

Traditionnellement, les Bourses devaient proposer un lieu suffisamment vaste pour que les opérateurs puissent se rencontrer et échanger les options. Cela a bien changé ; l'Eurex, le principal marché européen d'actifs dérivés, est complètement électronique, si bien que les traders n'ont même pas besoin de se rencontrer pour échanger. L'International Securities Exchange (www.iseoptions.com) a lancé le premier marché d'actions entièrement électronique aux États-Unis en mai 2000. Plus de 95 % des ordres du Chicago Board Options Exchange sont gérés par des systèmes électroniques. Le reste est constitué par des ordres d'institutionnels plus importants et plus complexes qui nécessitent les compétences des traders.

Les market-makers

La plupart des marchés organisés ont recours aux services de *market-makers* pour faciliter les échanges. Un *market-maker* pour une option donnée est un opérateur qui répond aux demandes de prix en affichant un prix d'achat et un prix de vente pour l'option. Le prix *bid* est le prix auquel le *market-maker* est prêt à acheter et le prix offert, *ask*, est le prix auquel il est prêt à vendre. Quand ces deux prix sont affichés, le *market-maker* ne sait pas si le trader qui a demandé ces prix est acheteur ou vendeur de l'option. Le prix de vente (ask) exigé par le *market-maker* est toujours supérieur au prix (bid) auquel il est prêt à acheter. L'écart entre ces deux prix est appelé écart de prix achat-vente, mais plus couramment *bid-ask spread* ou *bid-offer spread*. Les autorités de marché fixent en général une limite supérieure au bid-ask spread, de façon à favoriser la liquidité. Par exemple, il peut être précisé que le spread n'excède pas 0,25 € pour les options dont la valeur est inférieure à 0,50 €, 0,50 € pour celles valorisées entre 0,50 € et 10 €, 0,75 € pour celles cotées entre 10 € et 20 €, et 1 € pour celles dépassant les 20 €.

L'existence de *market-makers* assure que les ordres d'achat et de vente arrivant sur le marché trouveront une contrepartie et pourront être exécutés sans délai. Les *market-makers* ont donc pour fonction de fournir de la liquidité au marché. Ce service est rémunéré par le bid-ask spread. Certaines des techniques de couverture telles que celles décrites dans le chapitre 19 sont couramment utilisées par les *market-makers* pour couvrir leurs risques.

Dénouement des positions

Un investisseur qui achète des options peut déboucler sa position en passant un ordre de vente sur le même nombre de contrats. De même, un investisseur qui vend des options peut annuler sa position en achetant le même nombre de contrats d'option de mêmes caractéristiques. Lorsqu'une transaction a lieu sur un contrat, si aucun des deux investisseurs n'est en train d'annuler une position prise précédemment, la position ouverte sur ce contrat augmente d'une unité. Si les deux contreparties sont en train d'annuler une position précédemment prise, la position ouverte diminue d'une unité. On peut donc bien dire que la position ouverte est une mesure du nombre de contrats « vivants » à un instant donné.

10.6 Coûts de transaction

Les ordres d'achat et de vente qui peuvent être placés sur le marché d'options auprès des intermédiaires (*brokers*) sont du même type que ceux qui concernent le marché des futures (voir section 2.8). Un ordre à tout prix est destiné à être exécuté immédiatement ; un ordre à cours limité définit le cours le moins favorable auquel l'ordre peut être exécuté, etc.

Pour un investisseur final, les frais peuvent varier d'un intermédiaire à l'autre. Ceux qu'on appelle les discount-brokers proposent en général des tarifs plus avantageux que les intermédiaires classiques. Les commissions se décomposent généralement en coût fixe et coût proportionnel. Le tableau 10.1 illustre la structure des commissions demandées par un *discount-broker*. Par exemple, l'achat de huit contrats quand l'option cote 3 € coûterait $20 € + (0{,}02 \times 2\,400 €) = 68$ € en commissions.

Tableau 10.1 : Structure des commissions d'un discount-broker

Montant de la transaction	Commission*
< 2 500 €	20 € + 2 % du montant échangé
de 2 500 € à 10 000 €	45 € + 1 % du montant échangé
> 10 000 €	120 € + 0,25 % du montant échangé

*La commission maximale est de 30 € par contrat pour les cinq premiers, plus 20 € par contrat pour les suivants. La commission minimale est de 30 € par contrat pour le premier et de 2 € pour les suivants.

Lorsqu'une position en options est dénouée en prenant la position symétrique, les frais sont à nouveau payés. Si l'option est exercée, les commissions sont identiques à celles que paierait le client s'il opérait sur le marché de l'action sous-jacente.

Considérons un investisseur qui achète un call avec un prix d'exercice de 50 € alors que l'action cote 50 €. L'option vaut 4,50 € et chaque contrat porte sur 100 titres, c'est-à-dire que le contrat coûte 450 €. En utilisant le tableau 10.1, l'achat d'un contrat coûte toujours 30 € (puisque la commission minimale est de ce montant pour le premier contrat). Supposons maintenant que le cours de l'action augmente et que l'option soit exercée quand le cours de l'action atteint 60 €. Si l'investisseur paie 0,75 % de commissions pour l'exercice de l'option et 0,75 % supplémentaires de frais pour la vente des actions, les frais de transaction s'élèvent alors à :

$$2 \times 0{,}0075 \times 60 \times 100 = 90 €$$

La commission totale est donc de 120 € pour l'achat-vente, et le profit net de l'investisseur s'écrit :

$$1\,000 - 450 - 120 = 430 €$$

Il faut cependant noter que revendre l'option pour 10 €, au lieu d'exercer, aurait économisé 60 € de commissions (la commission payée en revendant l'option aurait encore

été de 30 € dans notre exemple). En général, la structure des frais incite l'investisseur à revendre les options plutôt qu'à les exercer.

Un coût implicite existe cependant sur les marchés d'options (et sur le marché des actions), à savoir le bid-ask spread. Supposons que, dans l'exemple précédent, le prix bid soit de 4 € alors que le prix ask est de 4,50 € au moment où l'option est achetée. On peut considérer que son prix « correct » se situe à mi-chemin entre le bid et le ask, soit 4,25 €. Le coût pour l'acheteur ou le vendeur peut être considéré comme égal à la valeur absolue de la différence entre le prix correct et le prix d'achat ou de vente, c'est-à-dire 0,25 €, soit 25 € par contrat.

10.7 Les appels de marge

Aux États-Unis, quand des actions sont achetées, elles sont payées soit au comptant, soit en empruntant une partie par l'intermédiaire d'un compte de deposit (on parle alors de « *buying on margin* »). Le dépôt initial correspond en général à 50 % de la valeur des actions. Si le cours des actions baisse au point que l'emprunt représente largement plus de 50 % de leur valeur, il y a « appel de marge » auprès des investisseurs pour qu'ils complètent le deposit. S'ils ne s'exécutent pas, les actions sont immédiatement revendues.

Lorsque des options sont achetées, qu'il s'agisse de puts ou de calls, le paiement est immédiat si leur date d'échéance est inférieure ou égale à 9 mois. Il n'y a donc pas de risque de défaut futur de l'acheteur, puisque ses flux de trésorerie seront positifs ou nuls. Les options dont l'échéance est supérieure à 9 mois peuvent être acquises avec un appel de marge d'au moins 25 % de la valeur de l'option.

Un vendeur d'options, sur un marché organisé, doit maintenir des fonds sur un compte de deposit ou de marge. L'intermédiaire du client et l'autorité de marché veulent tous les deux s'assurer par ce biais que l'investisseur ne fera pas défaut si l'option est exercée par l'acheteur. En effet, la structure des contrats fait que les flux de trésorerie du vendeur de l'option sont négatifs ou nuls à la date d'exercice. Le montant de la marge peut être variable selon le marché et selon le type de position.

Dans la suite, nous décrivons le système d'appel de marge du CBOE, qui est plus simple que celui d'Euronext, mais qui a les mêmes objectifs. Le système d'Euronext nécessite l'utilisation d'un modèle théorique d'évaluation qui sera abordé dans les chapitres suivants.

La vente d'options nues

Une option nue est une option qui n'est pas couverte par une position sur l'action en sens opposé. La marge initiale, appelée deposit, sur la vente d'un call nu est le maximum des deux montants suivants :

1. 100 % du montant de la vente plus 20 % de la valeur des actions sous-jacentes moins éventuellement le montant duquel l'option est en dehors de la monnaie ;
2. 100 % du montant de la vente plus 10 % de la valeur des actions sous-jacentes.

Pour la vente d'un put nu, la marge initiale est le maximum de :

1. 100 % du montant de la vente plus 20 % de la valeur des actions sous-jacentes moins éventuellement le montant duquel l'option est en dehors de la monnaie.
2. 100 % du montant des ventes plus 10 % du prix d'exercice.

Les 20 % sont remplacés par 15 % lorsqu'il s'agit d'options sur un indice largement diversifié, car un indice de ce type est en général moins volatil qu'une action isolée.

■ **Exemple 10.3** Un investisseur vend quatre calls nus cotés 5 $, chacun portant sur 100 unités de l'action sous-jacente. Le prix d'exercice est 40 $ et le prix de l'action 38 $. Comme l'option est en dehors de la monnaie de 2 $, le deposit est égal au maximum à :

$$400 \times (5 + 0{,}2 \times 38 - 2) = 4\,240 \text{ \$}$$

et :

$$400 \times (5 + 0{,}1 \times 38) = 3\,520 \text{ \$}$$

C'est donc 4 240 $ que le vendeur devra déposer. Si l'option avait été un put, elle serait dans la monnaie de 2 $ et le deposit serait égal à :

$$400 \times (5 + 0{,}2 \times 38) = 5\,040 \text{ \$}$$

Dans les deux cas, les 2 000 $ de premium font partie du deposit.

Le même calcul est fait chaque jour avec les nouveaux prix d'options à la place du montant de premium utilisé dans le calcul précédent et les nouveaux cours de support. Des fonds peuvent être retirés du compte de deposit par le client lorsque le dépôt requis diminue. À l'inverse, un appel de marge est réalisé lorsque le dépôt requis augmente. Sur le marché français, le principe est le même mais la méthodologie est différente. Les autorités de marché calculent la valeur théorique qu'aurait l'option (par un modèle d'évaluation) le lendemain si le mouvement le plus défavorable était observé sur le support. Les appels de marge sont réalisés sur cette base. Il s'agit en quelque sorte d'avoir toujours vingt-quatre heures d'avance pour pouvoir déboucler les positions sans dommage si le vendeur ne peut plus faire face aux appels de marge.

Les autres règles

Dans le chapitre 12, nous examinerons les stratégies utilisant des options telles que les calls couverts, les protective puts, les spreads, les combinaisons, les straddles et les strangles. Le CBOE a des règles bien spécifiques pour la détermination des deposits lorsque de telles stratégies sont établies. Elles sont décrites dans le *CBOE Margin Manual* disponible sur le site internet du CBOE (www.cboe.com).

Pour prendre un exemple de détermination de deposit, considérons un investisseur qui vend un call couvert. Ce type de stratégie correspond à la vente de calls et à l'achat simultané d'actions sous-jacentes. C'est donc bien moins risqué que la vente de calls nue puisque le pire qui pourrait arriver serait la vente des actions à un prix inférieur au prix de marché (du fait de l'exercice de l'option par l'acheteur). Par conséquent, les calls

couverts ne requièrent pas de deposit. Toutefois, l'investisseur peut emprunter un montant égal à $0{,}5 \times \min(S, K)$, à la place du montant correspondant, traditionnellement 50 % de la valeur de l'action.

10.8 La chambre de compensation

La chambre de compensation (CC) joue, sur un marché d'options, le même rôle que sur un marché de contrats futures (voir chapitre 2). Elle a pour objet de garantir que les vendeurs d'options pourront faire face à leurs obligations. Elle enregistre donc toutes les positions. Elle comporte un nombre limité de membres, et toutes les transactions passent par l'un de ses membres. Si un courtier n'est pas lui-même membre de la chambre de compensation, il doit passer par un membre de cette chambre pour l'enregistrement et le suivi des transactions. Les membres doivent satisfaire des conditions minimales en termes de capitaux propres et contribuent à un fonds spécial destiné à se substituer à un membre qui fait défaut.

Les fonds utilisés pour acheter une option doivent être déposés auprès de la CC le matin du jour ouvré qui suit l'achat. Le vendeur d'une option doit alimenter un compte de deposit chez son courtier[3]. Ce dernier alimente lui-même un compte de deposit auprès d'un membre de la CC qui enregistre la transaction. De même, ce membre a un compte de deposit auprès de la CC.

L'exercice d'une option

Lorsqu'un client informe son courtier de sa volonté d'exercer une option, celui-ci avertit à son tour le membre de la CC qui enregistre ses transactions. Ce dernier place alors un ordre d'exercice auprès de la CC. Celle-ci choisit aléatoirement un vendeur. Si l'option est un call, l'investisseur choisi doit vendre l'action au prix d'exercice du contrat. Si c'est un put, il doit acheter l'action à ce prix. On dit que le vendeur d'option est assigné. Quand une option est exercée, la position ouverte diminue d'une unité. À la date d'échéance, tous les contrats dans la monnaie devraient être exercés, sauf si les coûts de transaction sont si élevés qu'ils annulent le flux engendré par l'exercice. Les courtiers exercent donc automatiquement ces options quand c'est dans l'intérêt des clients.

10.9 Réglementation

Les marchés d'options sont réglementés de différentes façons. En général, les marchés d'options ont démontré une certaine volonté à s'auto-réglementer. Il n'y a jamais eu de grands scandales ou de défaillances des membres de la Chambre de Compensation. Les investisseurs bénéficient d'un niveau élevé de confiance dans la façon dont le marché

3. Les appels de marge décrits dans la section précédente représentent les exigences minimales définies par la CC. Un courtier peut majorer les appels de marge auprès de ses clients, mais il ne peut les minorer. Certains courtiers n'autorisent même pas leurs clients à vendre des options si celles-ci ne sont pas intégralement couvertes.

fonctionne. Aux États-Unis, la Securities and Exchange Commission (SEC) est chargée de réglementer les marchés d'options sur actions, indices boursiers, devises et obligations au niveau fédéral. La Commodity Futures Trading Commission est chargée de réglementer les marchés des options sur futures. Les principaux marchés d'options se situant dans les États de l'Illinois et de New York, ces derniers s'activent à appliquer leurs propres lois pour éviter les pratiques inacceptables. Euronext étant issu de la fusion des bourses de différents pays, il est soumis à la réglementation de chacun de ces derniers.

10.10 Fiscalité

Déterminer les conséquences fiscales des stratégies de négociation d'options peut être difficile et tout investisseur gagnerait à consulter un conseiller fiscal. La règle générale est – sauf si le contribuable est un professionnel du marché – que les gains et les pertes résultant de la négociation des options sur actions sont imposés selon le régime des plus-values en capital. Pour le détenteur ou le vendeur d'une option, un gain ou une perte est constaté lorsque (a) l'option arrive à échéance sans qu'il l'ait exercée ou (b) la position d'option a été débouclée. Si l'option est exercée, le gain ou la perte sur celle-ci est assimilé à une position prise dans une action et constaté au moment de sa liquidation. Par exemple, quand une option d'achat est exercée, l'investisseur ayant adopté une position longue est réputé avoir acheté une action au prix d'exercice majoré du coût d'achat de l'option. Ce montant est ensuite utilisé comme base de calcul à la plus-value ou à la moins-value réalisée par cet investisseur à la vente de l'action. De la même façon, l'investisseur qui a adopté une position courte est réputé avoir vendu l'action au prix d'exercice majoré du premium de l'option. Quand une option de vente est exercée, le vendeur (l'acheteur) de l'option est réputé avoir acheté (vendu) l'action au prix d'exercice moins le coût initial de l'option.

La règle d'interdiction de pertes fictives (*wash sale)*

Aux États-Unis, les pratiques de « *wash sale* » (ventes-achats simultanés), permettant de constater une perte fiscale, sont interdites. Pour comprendre cette règle, imaginez un investisseur qui achète une action lorsque son prix est de 60 €, dans le but de la conserver sur le long terme. Si le cours descend à 40 €, l'investisseur pourrait être tenté de vendre l'action et de la racheter immédiatement, de sorte qu'une perte de 20 € serait réalisée et fiscalement constatée. Pour éviter ce genre de pratiques, les autorités fiscales américaines ont décidé que, lorsque le rachat intervient dans les 30 jours de la vente (c'est-à-dire entre 30 jours avant la vente et 30 jours après la vente), toute perte sur la vente n'est pas déductible fiscalement. Mais cette interdiction s'applique également lorsque, dans ce délai total de 61 jours, le contribuable a acheté ou vendu une option ou tout type de contrat similaire dont le sous-jacent est constitué par l'action concernée. Ainsi, la vente d'une action à perte et l'achat d'un call dans un délai de 30 jours ne permettront pas de déduction fiscale. Cette règle ne s'applique évidemment pas si le contribuable est un trader professionnel, pour qui la perte est subie dans le cours normal de ces activités. Enfin, cette règle ne concerne pas la fiscalité française.

Les fiscalistes utilisent parfois des options pour optimiser les coûts de l'impôt (voir encadré 10.2). Les autorités fiscales de nombreux pays ont proposé une législation visant à lutter contre l'utilisation d'instruments dérivés à des fins purement fiscales. Avant de réaliser un montage d'optimisation fiscale, un trésorier d'entreprise ou un particulier doit étudier en détail la façon dont sa structure peut être remise en cause en cas de changement législatif et combien il peut se révéler coûteux.

Encadré 10.2 L'optimisation fiscale à l'aide d'options

Un exemple simple permet de montrer comment on peut optimiser sa fiscalité en utilisant les options. Supposons que le pays A dispose d'un régime fiscal où l'imposition des dividendes et des intérêts est faible, mais élevé pour les plus-values. Dans le même temps, un pays B a, au contraire, un régime fiscal favorable aux plus-values, mais il impose en contrepartie plus fortement les intérêts et les dividendes. Il est alors avantageux pour une entreprise de recevoir les revenus des valeurs mobilières dans le pays A et de constater une éventuelle plus-value dans le pays B. Mais en cas de moins-values, la société les constatera dans le pays A, où elles seront éventuellement utilisées pour compenser certaines plus-values sur d'autres investissements. Tout cela peut être réalisé en créant une filiale dans le pays A, qui aurait la propriété juridique des titres, et une autre filiale dans le pays B, qui détiendrait des calls sur les titres possédés par la filiale du pays A, et dont le prix d'exercice serait égal à la valeur actuelle des titres. Ce montage permet d'encaisser les revenus procurés par les actions dans le pays A. Si le cours des titres augmente fortement, l'option sera exercée et la plus-value sera constatée dans le pays B. Si, au contraire, son cours baisse brusquement, l'option ne sera pas exercée et une moins-value sera constatée dans le pays A.

10.11 Warrants, bons de souscription, stock-options et obligations convertibles

Les warrants sont des options (calls ou puts) émises par une institution financière ou par des sociétés non financières. Par exemple, une institution financière peut émettre des put warrants sur un million d'onces d'or et ensuite créer un marché pour les warrants. Pour exercer le warrant, son porteur devra contacter l'institution financière. Les sociétés non financières émettent parfois des bons de souscription en même temps qu'ils émettent un emprunt obligataire. La société émet donc ses propres options d'achat sur ses actions et les rattache ensuite aux obligations qu'elle émet pour les rendre plus attractives auprès des investisseurs.

Les stock-options sont des options d'achat émises par la société pour les cadres dirigeants, afin qu'ils agissent dans l'intérêt des actionnaires (voir chapitre 16). Elles sont maintenant comptabilisées comme une charge du compte de résultat des sociétés dans de nombreux pays, ce qui les rend moins attractives.

Une obligation convertible est une obligation pouvant être convertie en actions pendant certaines périodes, à une parité déterminée. Il s'agit donc d'une obligation contenant une option d'achat sur les actions de la société émettrice.

Une des caractéristiques communes aux warrants, bons de souscription, stock-options et obligations convertibles est que seul le nombre d'options émises est prédéterminé. En revanche, le nombre de warrants en circulation échangés ensuite sur le marché ne l'est pas. Plus les investisseurs négociant une série de warrants particulière sont nombreux, plus l'émetteur met de warrants en circulation. Les bons de souscription émis par une société sur ses propres actions, les stock-options, les obligations convertibles sont différents des warrants négociés en bourse sur un autre point important. En effet, lorsque ces instruments sont exercés, la société émet de nouvelles actions et les vend au porteur de l'option pour le prix d'exercice. L'exercice de ces instruments conduit donc à une augmentation du nombre d'actions en circulation. En revanche, quand un call warrant est exercé, l'émetteur achète sur le marché les actions sous-jacentes, déjà existantes, et les vend au prix d'exercice au porteur du warrant. La société dont les actions constituent le sous-jacent du warrant n'est impliquée en aucune façon.

10.12 Les marchés de gré à gré (OTC)

La majeure partie de ce chapitre était consacrée aux marchés organisés, mais les marchés OTC se sont considérablement développés depuis le début des années 1980 pour être aujourd'hui plus importants que les marchés organisés en termes de volumes de transactions. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, les institutions financières et les trésoriers d'entreprise négocient par téléphone sur les marchés OTC. Il y a en fait une large gamme de sous-jacents sur ces marchés. En particulier les devises et les taux font l'objet de volumes importants. L'inconvénient essentiel d'un marché OTC réside dans le défaut possible du vendeur de l'option. L'acheteur s'expose à ce risque. Pour le diminuer, les opérateurs de ce marché conviennent d'un ensemble de règles, comme la présentation de garanties par le vendeur (introduites dans la section 2.5).

Les contrats négociés sur le marché OTC sont souvent structurés de façon à répondre à des besoins précis de la clientèle. Cela peut se traduire par des dates d'échéance, des prix d'exercice ou des tailles de contrats inhabituels. Dans d'autres cas, c'est la définition même des flux engendrés par l'option qui n'est pas standard. On parle alors d'options exotiques. Le chapitre 26 en donne un certain nombre d'exemples.

Résumé

Il existe deux types d'options, calls et puts. Un call (put) donne le droit à son détenteur d'acheter (de vendre) l'actif sous-jacent à un prix fixé, à une date spécifiée. Il y a quatre positions élémentaires sur les marchés d'options : l'achat de call, l'achat de put, la vente de call, la vente de put. Les actifs sous-jacents les plus courants sont les actions, les indices, les devises et les contrats futures.

Les autorités de marché standardisent les contrats traités, en particulier en ce qui concerne la taille, la date d'échéance et le prix d'exercice. Des variations sont cependant

observables d'un marché à l'autre et d'un titre à l'autre en ce qui concerne la taille des contrats, car celle-ci dépend aussi du cours du sous-jacent.

À un même instant sont cotées des options pour diverses échéances, leur nombre variant de trois à cinq dans le cas général. De même, plusieurs séries de prix d'exercice différents font l'objet de négociations simultanées ; l'intervalle entre prix d'exercice successifs est variable, selon le prix du sous-jacent. Quand une série d'options est ouverte, le prix d'exercice est en général proche du cours du support.

Un contrat n'est normalement pas ajusté pour le paiement de dividendes. Cependant, il l'est en cas d'opérations sur titres. L'objectif est alors de maintenir inchangé l'engagement des deux parties.

La plupart des marchés d'options fonctionnent avec des *market-makers*. Ceux-ci cotent des prix d'achat (bid) et de vente (ask) afin d'améliorer la liquidité du marché et d'assurer la réalisation des transactions sans délai. Ils réalisent eux-mêmes un profit par la différence entre prix ask et prix bid. Les autorités de marché spécifient les bornes supérieures du bid-ask spread.

Les vendeurs d'options doivent maintenir des fonds chez leur courtier pour faire face à leurs obligations. Si le courtier n'est pas un membre de la chambre de compensation, il doit avoir un compte auprès d'un membre, qui lui-même en a un auprès de la CC. Celle-ci est responsable de l'enregistrement de l'ensemble des ordres, des assignations, etc.

Un volume important de transactions en options n'est pas réalisé sur les marchés organisés, mais par téléphone sur le marché OTC. L'avantage est que les produits négociés sur ce marché peuvent être structurés sur mesure par une institution financière, pour un trésorier d'entreprise par exemple.

Références complémentaires

Chicago Board Options Exchange, *Margin Manual*. Disponible sur www.cboe.com/LearnCenter/workbench/pdfs/M
2000.

Problèmes et exercices

10.1 Un investisseur achète un put européen sur une action pour 3 €. Le cours de l'action est de 42 € et le prix d'exercice de 40 €. Dans quels cas l'investisseur réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant les variations des gains de l'investisseur en fonction du cours de l'action à la date d'échéance de l'option.

10.2 Un investisseur vend un call européen sur une action pour 4 €. Le cours de l'action est de 47 € et le prix d'exercice de 50 €. Dans quels cas l'investisseur réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant les variations des gains de l'investisseur en fonction du cours de l'action à la date d'échéance de l'option.

10.3 Un investisseur vend un call européen de prix d'exercice K et de date d'échéance T et achète un put de même prix d'exercice et de même échéance. Décrivez la position de l'investisseur.

10.4 Expliquez pourquoi un deposit est exigé quand les clients vendent des options, mais pas lorsque le client achète une option.

10.5 Quelles sont les échéances cotées le 1er avril et le 30 mai pour une option qui appartient au cycle février, mai, août, novembre ?

10.6 Une entreprise annonce une division de titres 2 pour 1. Comment est modifié un call de prix d'exercice 60 $?

10.7 « Les stock-options émises par une société sont différentes des calls classiques portant sur les actions de cette société car elles peuvent affecter sa structure du capital. » Expliquez cette affirmation.

10.8 Un trésorier d'entreprise construit une couverture qui fait intervenir des options de change. Quels sont les avantages et inconvénients à utiliser :

a. un marché organisé ?

b. un marché OTC ?

10.9 Considérons un call européen coûtant 5 €, permettant d'acheter une action 100 € et détenu jusqu'à son échéance. Dans quels cas son détenteur réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant de quelle manière le gain d'une position longue dans l'option dépend du cours de l'action à l'échéance de l'option.

10.10 Considérons un put européen coûtant 8 €, permettant de vendre une action 60 € et détenu jusqu'à son échéance. Dans quels cas le vendeur du put réalise-t-il un gain ? Dans quel cas l'option sera-t-elle exercée ? Réalisez un schéma montrant de quelle manière le gain d'une position courte dans l'option dépend du cours de l'action à l'échéance de l'option.

10.11 Décrivez la valeur à l'échéance du portefeuille suivant : une nouvelle position longue sur un forward portant sur un actif et une position longue sur un put européen portant sur le même actif, de même échéance que le forward, de prix d'exercice égal à la valeur du forward au moment de la constitution du portefeuille. Montrez que le put européen a la même valeur qu'un call européen portant sur le même actif, de même échéance et de même prix d'exercice.

10.12 Un trader achète un call de prix d'exercice 45 € et un put de prix d'exercice 40 €. Les deux options ont la même date d'échéance. Le call vaut 3 € et le put 4 €. Réalisez un schéma montrant les variations du gain du trader en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent.

10.13 Expliquez pourquoi une option américaine vaut toujours au moins autant qu'une option européenne de mêmes caractéristiques.

10.14 Expliquez pourquoi la valeur d'une option américaine est toujours supérieure ou égale à sa valeur intrinsèque.

10.15 Expliquez précisément la différence entre un achat et une vente d'option.

10.16 Le trésorier d'une entreprise tente de choisir entre options et contrats forward pour couvrir le risque de change de son entreprise. Expliquez les avantages et inconvénients relatifs de ces deux solutions.

10.17 Considérons un call donnant le droit d'acheter 500 actions au prix d'exercice de 40 $ et d'échéance 4 mois. Expliquez comment sont modifiés les termes du contrat si :

a. un dividende en actions de 10 % est payé ;

b. un dividende en cash de 10 % du cours de l'action est payé ;

c. une division de titres 4 pour 1 est annoncée.

10.18 « Si la plupart des calls sur une action sont dans la monnaie, il est probable que c'est dû à la hausse rapide du cours de l'action dans les derniers mois. » Commentez cette affirmation.

10.19 Quel est l'effet d'un dividende non anticipé sur (a) le prix d'un call, (b) le prix d'un put ?

10.20 Les options sur General Motors sont sur un cycle mars, juin, septembre, décembre… Quelles options sont traitées le (a) 1 mars, (b) 30 juin, (c) 5 août ?

10.21 Expliquez pourquoi le bid-ask spread représente réellement un coût pour les investisseurs en options.

10.22 Un investisseur vend cinq calls nus. Le premium est de 3,5 $, le prix d'exercice est de 60 $ et le prix de l'action de 57 $. Quel est le deposit initial ?

Questions complémentaires

10.23 Calculer la valeur intrinsèque et la valeur temps au cours moyen (moyenne des valeurs bid et ask) des calls septembre 2016 dans le tableau 1.2. Faites de même pour les puts septembre 2016 dans le tableau 1.3. Supposons que dans chaque cas, le prix actuel de l'action soit de 696,00 $.

10.24 Un trader a un contrat d'option de vente de 100 actions à un prix d'exercice de 60 €. Quel est l'effet sur le put si :

a. un dividende de 2 € est annoncé ?

b. un dividende de 2 € est payé ?

c. une division des titres (stock split) sur la base de 5 pour 2 est réalisée ?

d. un dividende de 5 % est payé ?

10.25 Un trader vend cinq contrats de puts nus portant chacun sur 100 actions. Le prix de l'option est de 10 €, la maturité est de 6 mois et le prix d'exercice de 64 €.

a. Quelle doit être la marge initiale si le prix de l'action est de 58 € ?

b. Quelle serait la réponse à la question (a) si la règle pour les options sur indice s'appliquait ?

c. Quelle serait la réponse à la question (a) si le cours de l'action était de 70 € ?

d. Quelle serait la réponse à la question (a) si le trader avait acheté les options au lieu de les vendre ?

10.26 Une action cote 40 €. Le premium d'un put européen d'échéance 1 an sur cette action est 7 € avec un prix d'exercice à 30 €, et le premium d'un call de même échéance et de prix d'exercice 50 € est 5 €. Supposons que l'investisseur achète 100 actions, vende un call et achète un put. Représentez graphiquement

l'évolution de la valeur de la position pendant l'année à venir. Comment votre réponse est-elle modifiée si l'investisseur achète 100 actions, vend deux contrats de calls et achète deux contrats de puts ?

10.27 « Si une société ne fait pas mieux que ses concurrents mais que le marché est à la hausse, les dirigeants s'enrichissent par les stock-options qu'ils détiennent. Cela n'a pas de sens. » Commentez ce point de vue. Pouvez-vous proposer des incitations autres que les stock-options pour tenir compte de cette remarque ?

10.28 Utilisez DerivaGem pour calculer la valeur d'un put américain sur une action ne payant pas de dividendes quand l'action cote 30 €, le prix d'exercice est 32 €, le taux sans risque 5 %, la volatilité 30 % et la durée de vie 1,5 an. Choisissez comme type d'option « binomiale américaine » et 50 périodes.

a. Quelle est la valeur intrinsèque de l'option ?

b. Quelle est la valeur-temps de l'option ?

c. Que signifierait une valeur-temps nulle ? Quelle est la valeur d'une option dont la valeur-temps est nulle ?

d. En utilisant une méthode d'essai-erreur, déterminez le cours de l'action pour lequel la valeur-temps du put est nulle.

10.29 Le 20 juillet 2004, Microsoft surprit le marché en annonçant le versement d'un dividende de 3 $. La date de détachement du dividende était le 17 novembre 2004 et la date de paiement le 2 décembre 2004. Le cours de l'action à l'époque était d'environ 28 $. L'entreprise modifia les caractéristiques des stock-options de ses employés afin d'ajuster le prix d'exercice de la façon suivante :

$$\text{Prix d'exercice avant dividende} \times \frac{\text{Cours de clôture} - 3{,}00\ \$}{\text{Cours de clôture}}$$

Le nombre d'actions couvert par chaque stock-option en vie fut ajusté par :

$$\text{Nombre d'actions avant dividende} \times \frac{\text{Cours de clôture}}{\text{Cours de clôture} - 3{,}00\ \$}$$

Le « cours de clôture » correspond au cours de clôture de l'action Microsoft sur le Nasdaq le dernier jour de cotation précédant la date de détachement du dividende. Évaluez cet ajustement. Comparez-le avec le système utilisé par les marchés pour ajuster les dividendes extraordinaires (voir encadré 10.1).

Chapitre 11

Les propriétés des options sur actions

Dans ce chapitre, nous analysons les facteurs influençant le prix des options sur actions. Nous utilisons de nombreux arguments d'arbitrage pour explorer les relations liant les prix des options européennes, les prix des options américaines et le prix de l'action sous-jacente. La plus importante de ces relations est la parité call-put, qui établit le lien entre le prix d'une option d'achat européenne (un call européen), le prix d'une option de vente européenne (un put européen) et le prix de l'actif sous-jacent.

Ce chapitre examine les conditions d'exercice prématuré des options américaines. Nous montrons qu'il n'est jamais optimal d'exercer, avant l'échéance, un call américain sur une action ne versant pas de dividendes. En revanche, l'exercice prématuré d'un put américain sur une telle action peut se révéler optimal, tout comme d'exercer prématurément des calls ou des puts en présence de dividendes.

11.1 Les facteurs influençant le prix des options

Il existe six facteurs influençant le prix des options sur actions :

1. Le cours de l'action, S_0 ;
2. Le prix d'exercice, K ;
3. Le temps restant à courir jusqu'à l'échéance, T, mesuré usuellement en années ;
4. La volatilité du prix de l'action, σ ;
5. Le taux d'intérêt sans risque annuel, r ;
6. Les dividendes prévus durant la durée de vie de l'option.

Dans cette section, nous nous intéressons à ce qu'il advient du prix des options lorsque l'un de ces facteurs change, tandis que les autres restent constants. Les résultats sont résumés dans le tableau 11.1.

Tableau 11.1 : Résumé des effets de l'augmentation d'une des variables (lorsque les autres restent fixes)* sur le prix des options sur actions

Variable	Call européen	Put européen	Call américain	Put américain
Cours actuel de l'action	+	–	+	–
Prix d'exercice	–	+	–	+
La date d'échéance	?	?	+	+
Volatilité	+	+	+	+
Taux d'intérêt sans risque	+	–	+	–
Dividendes	–	+	–	+

* « + » signifie qu'une croissance de la variable provoque une augmentation de la valeur de l'option ; « – » signifie qu'une augmentation de la variable entraîne une baisse de la valeur de l'option ; « ? » signifie que la relation est incertaine.

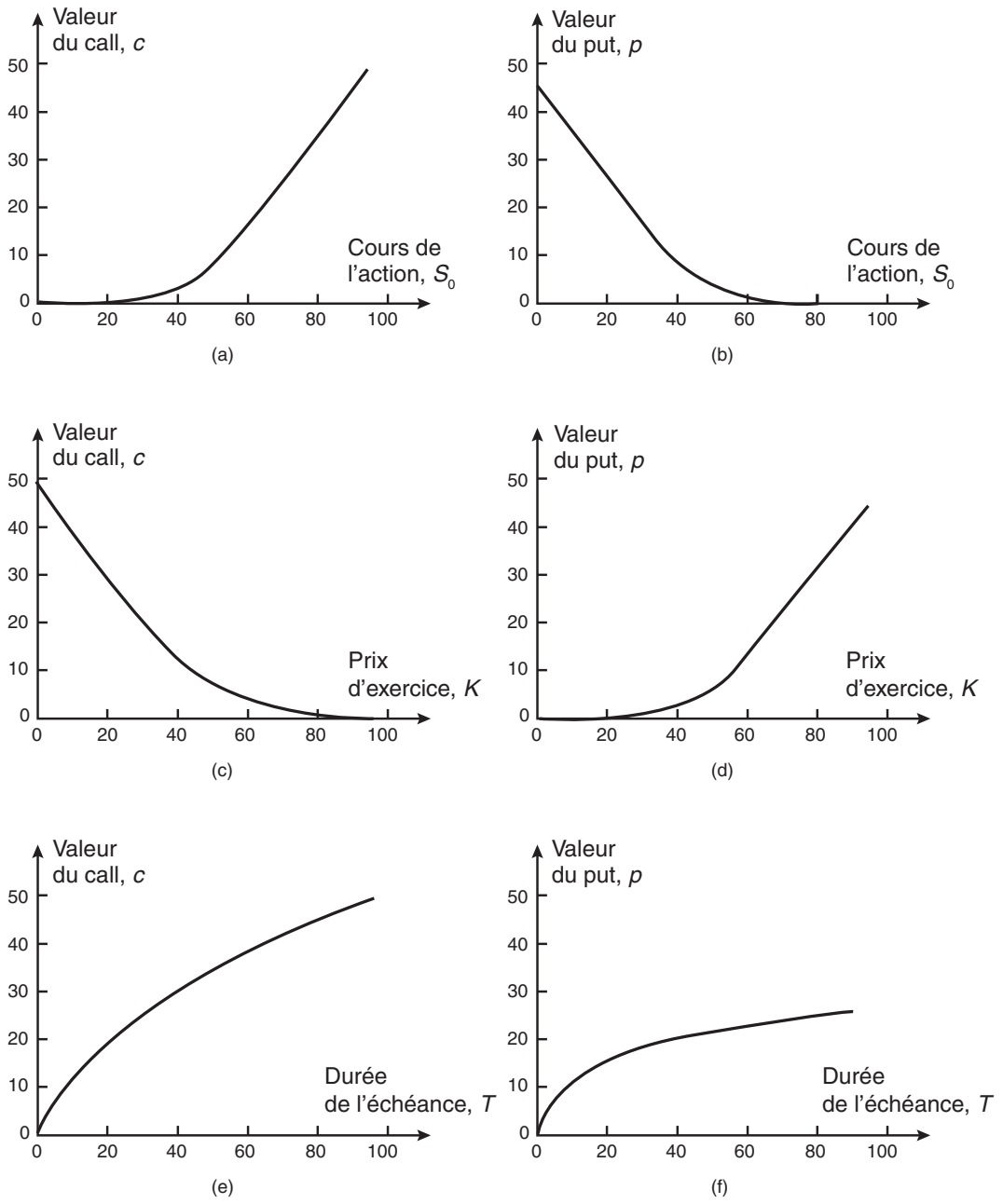
Les graphiques 11.1 et 11.2 montrent comment les prix d'une option d'achat et d'une option de vente européennes dépendent des cinq premiers facteurs dans le cas où S_0 = 50, K = 50, r = 5 %, σ = 30 % et $T = 1$, et qu'il n'y a pas de versement de dividendes. Dans ce cas, le prix du call est de 7,116 € et celui du put de 4,677 €.

Prix de l'action et prix d'exercice

Si une option d'achat est exercée à une date future, le flux engendré, appelé « payoff », est égal à la différence entre le cours de l'action et le prix d'exercice. Par conséquent, la valeur d'un call augmente lorsque le cours de l'action croît. Elle est faible quand le prix d'exercice est élevé. Pour une option de vente, le payoff à l'exercice est égal à la différence entre le prix d'exercice et le cours de l'action. La valeur de ce type d'option diminue si le prix de l'action s'accroît. Elle augmente, au contraire, lorsque le prix d'exercice est plus élevé. Les graphiques 11.1a, b, c, d illustrent la façon dont les valeurs d'un call et d'un put dépendent du cours des actions et du prix d'exercice.

Date d'échéance

Étudions à présent les effets de la date d'échéance de l'option. Les options d'achat américaines, aussi bien que les options de vente américaines, voient leur valeur s'accroître (ou au moins ne pas baisser) lorsque la date de maturité s'éloigne, c'est-à-dire quand la durée restant à courir jusqu'à l'échéance augmente. Considérons deux options qui diffèrent seulement par la date d'échéance. Le propriétaire de l'option à durée de vie plus longue profite de toutes les opportunités d'exercice ouvertes aux propriétaires des options à durée de vie plus courte, et plus encore. La valeur de l'option à échéance longue est donc toujours supérieure à celle de l'option à échéance plus courte. Les graphiques 11.1e et 11.1f illustrent de quelle manière la valeur des options d'achat et de vente dépend de la date d'échéance.



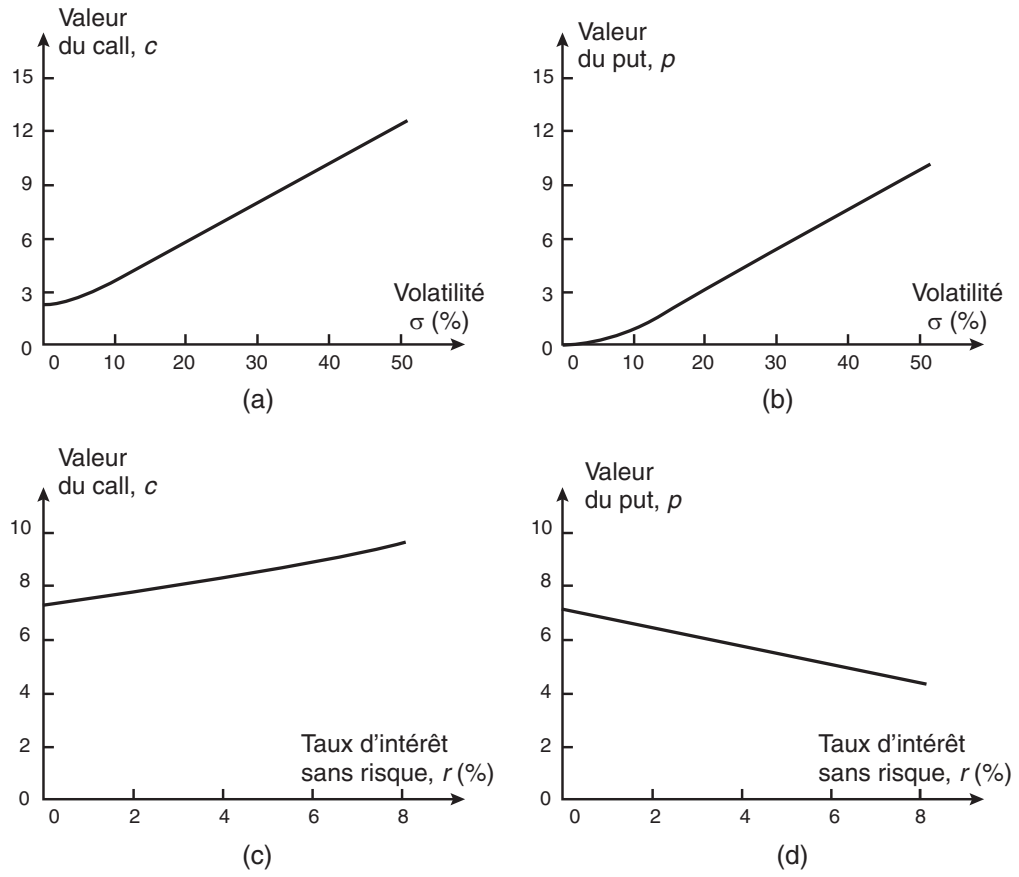
Graphique 11.1 : Impact des variations du cours de l'action, du prix d'exercice et de la durée de vie jusqu'à l'échéance sur la valeur d'une option lorsque $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 5\ \%$, $\sigma = 30\ \%$ et $T = 1$

Bien que la valeur des calls européens, comme celle des puts, augmente généralement avec l'échéance, ce n'est pas toujours le cas. Soient en effet deux calls européens portant sur une même action : l'un a une date d'échéance à 1 mois, l'autre à 2 mois. Supposons qu'un important dividende soit attendu dans six semaines. Le détachement de ce dividende provoquera une baisse du cours de l'action. Ce fait est intégré dans la valeur de l'option à échéance 2 mois, mais pas dans celle à échéance 1 mois qui n'est

pas concernée par le détachement du dividende. Ainsi, l'option à courte échéance peut valoir davantage que celle à échéance longue [1].

Volatilité

Une définition précise de la volatilité est donnée au chapitre 15. De manière schématique, la volatilité de la valeur d'une action mesure l'incertitude quant aux variations futures du cours. Plus la volatilité est grande, plus la probabilité que le cours de l'action atteigne des sommets, ou subisse de fortes baisses, est importante. Pour le détenteur d'une action, ces deux résultats tendent à se compenser l'un l'autre. Mais ce n'est pas le cas pour le détenteur d'une option. En effet, le détenteur d'un call bénéficie d'une hausse du cours de l'action, mais limite son risque de perte, puisqu'en cas de chute du cours, il ne subit qu'une perte liée à la valeur de son option. Réciproquement, le détenteur d'un put bénéficie de la baisse de la valeur de l'action, mais il limite également son risque en cas de hausse du cours. Par conséquent, la valeur des calls, comme celle des puts, augmente avec la volatilité du sous-jacent (voir graphiques 11.2a et b).



Graphique 11.2 : Impact des variations de la volatilité σ et du taux d'intérêt sans risque sur la valeur d'une option lorsque S_0 = 50, $K = 50$, $r = 5\%$, σ = 30 % et $T = 1$

1. Nous supposons que, lorsque la durée de vie de l'option est modifiée, les dividendes des actions et leur calendrier restent inchangés.

Taux d'intérêt sans risque

Le taux d'intérêt sans risque affecte la valeur de l'option d'une façon moins évidente. Lorsque les taux d'intérêt augmentent, l'espérance de rendement des actions, attendu par les investisseurs, tend à s'élever également. Mais la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs reçus par les détenteurs d'options diminue. L'impact combiné de ces deux effets entraîne une baisse de la valeur des options de vente et un accroissement de la valeur des options d'achat (voir graphiques 11.2c, d).

Il est important de souligner que nous envisageons ici une variation des taux d'intérêt, tandis que toutes les autres variables demeurent inchangées. Nous supposons notamment que les taux d'intérêt varient alors que le cours des actions reste identique. En réalité, lorsque les taux d'intérêt augmentent (diminuent), le cours des actions a tendance à diminuer (augmenter). L'effet combiné de l'augmentation du taux d'intérêt et de la diminution de la valeur de l'action l'accompagnant peut être une baisse de la valeur de l'option d'achat et une hausse de la valeur de l'option de vente. Réciproquement, l'effet combiné d'une diminution du taux d'intérêt et d'une augmentation du cours de l'action peut être une hausse de la valeur du call et une baisse de la valeur du put.

Dividendes

Les dividendes entraînent une baisse du cours de l'action à la date de détachement. L'annonce de ce dernier est une « mauvaise nouvelle » pour la valeur de l'option d'achat et, au contraire, une « bonne nouvelle » pour celle de l'option de vente. Par conséquent, la valeur d'un call est une fonction décroissante du montant de dividende anticipé et, réciproquement, la valeur d'un put est une fonction croissante du dividende.

11.2 Hypothèses et notations

Les hypothèses de ce chapitre sont analogues à celles qui ont été formulées au chapitre 5, dans le cadre de l'évaluation des contrats à terme. Pour les principaux acteurs du marché, tels que les grandes banques d'investissement, nous supposons que :

1. Il n'y a pas de coûts de transaction ;
2. Tous les gains d'opérations (nets de pertes) font l'objet du même taux d'imposition ;
3. L'emprunt et le placement sont possibles au taux d'intérêt sans risque unique.

Nous supposons de même que ces acteurs du marché sont prêts à tirer profit de toute opportunité d'arbitrage éventuelle. Comme nous l'avons expliqué aux chapitres 1 et 5, cela signifie aussi que les opportunités d'arbitrage disparaissent très rapidement. Par rapport à ce qui suit, il est alors raisonnable de supposer que de telles opportunités sont absentes.

Nous utiliserons les notations suivantes :

S_0 : cours de l'action à la date 0 ;

K : prix d'exercice de l'option ;

T : temps restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option ;

S_T : cours de l'action à la date d'échéance ;

r : taux d'intérêt sans risque annuel, capitalisé en continu, pour un investissement d'une durée T ;

C : valeur d'un call américain sur une action ;

P : valeur d'un put américain sur une action ;

c : valeur d'un call européen sur une action ;

p : valeur d'un put européen sur une action.

Notons que r est le taux d'intérêt nominal, non le taux d'intérêt réel. Nous pouvons, de ce fait, également supposer que $r > 0$; sinon, un investissement sans risque ne procurerait aucun avantage par rapport à des liquidités.

11.3 Bornes supérieures et inférieures pour la valeur des options

Cette section est consacrée à l'étude des bornes supérieures et inférieures de la valeur des options. Ces limites ne dépendent pas des hypothèses formulées à la section 11.1 (à l'exception de $r > 0$). Si la valeur d'une option est au-dessus de sa borne supérieure ou en deçà de sa borne inférieure, il y a alors une opportunité de gain immédiat pour les arbitragistes.

Les bornes supérieures

Une option d'achat américaine ou européenne donne, à son détenteur, le droit d'acheter une action à un certain prix. Quoi qu'il arrive, l'option ne peut jamais valoir plus que l'action qu'elle permet d'obtenir. Par conséquent, le cours de l'action constitue la borne supérieure de la valeur de l'option :

$$c \leq S_0 \quad \text{et} \quad C \leq S_0 \tag{11.1}$$

Si ces relations n'étaient pas vérifiées, un arbitragiste pourrait facilement réaliser un profit sans risque en achetant l'action et en vendant le call.

Une option de vente américaine donne, à son détenteur, le droit de vendre une action au prix K. Quoi qu'il advienne du cours de l'action, l'option ne peut jamais valoir plus que la somme K qu'elle permet d'obtenir. Par conséquent :

$$P \leq K \tag{11.2}$$

Pour les options européennes, nous savons qu'à la maturité, l'option ne peut valoir plus que K. Aussi, à la date d'aujourd'hui, sa valeur ne peut être supérieure à la valeur actuelle de K :

$$p \leq Ke^{-rT} \tag{11.3}$$

Si cette inégalité n'était pas vérifiée, un arbitragiste pourrait réaliser un profit sans risque en vendant l'option et en plaçant la somme ainsi obtenue au taux sans risque.

Les bornes inférieures des prix de calls européens sur des actions ne versant pas de dividendes

Une des bornes inférieures de la valeur d'un call européen sur une action ne versant pas de dividendes est :

$$S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Avant de présenter un raisonnement formel, considérons un exemple numérique.

Soit S_0 = 20 €, K = 18 €, r = 10 % et T = 1. Dans ce cas, on a :

$$S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT} = 20 - 18\,\mathrm{e}^{-0,1} = 3,71$$

soit 3,71 €. Supposons que la valeur du call soit de 3,00 €, c'est-à-dire moins que le minimum théorique de 3,71 €. Un arbitragiste peut acheter le call et vendre l'action à découvert pour encaisser un gain net de $20,00\ € - 3,00\ € = 17,00\ €$. S'ils sont investis à 10 % pendant un an, ces 17,00 € permettent d'obtenir $17\,\mathrm{e}^{0,1} = 18,79\ €$. Au bout d'une année, l'option arrive à échéance. Si le cours de l'action vient à dépasser 18,00 €, l'arbitragiste exercera l'option afin d'acheter l'action à 18,00 €, dénouera sa vente à découvert et encaissera un profit de :

$$18,79 - 18,00 = 0,79\ €$$

Si le cours de l'action devient inférieur à 18,00 €, l'action sera achetée sur le marché et la position de vente à découvert sera dénouée. L'arbitragiste dégagera alors un profit supérieur. Par exemple, si le cours de l'action est de 17,00 €, le gain de l'arbitragiste est de :

$$18,79 - 17,00 = 1,79\ €$$

Pour le modèle plus général, considérons les portefeuilles suivants :

Portefeuille A : une option d'achat européenne et une obligation zéro-coupon qui procure un revenu égal à K à l'échéance ;

Portefeuille B : une action.

Dans le portefeuille A, l'obligation zéro-coupon vaudra K à la date T. Si $S_T > K$, l'option d'achat est exercée à l'échéance. Elle permet ainsi d'acheter, avec le montant K, une action de valeur S_T. La valeur du portefeuille A est donc égale à S_T dans ce cas. Si, au contraire, $S_T < K$, le call ne vaut plus rien à l'échéance et la valeur du portefeuille est alors égale à K. Pour résumer, à la date T, la valeur du portefeuille A est de :

$$\max(S_T\,;K)$$

Le portefeuille B vaut S_T à la date T. Par conséquent, à l'échéance de l'option, la valeur du portefeuille A est toujours supérieure ou égale à celle du portefeuille B. Il en découle qu'en cas d'absence d'opportunité d'arbitrage, cela est également vérifié à la date d'aujourd'hui.

Ainsi :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} \geq S_0$$

ou :

$$c \geq S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Puisque, dans le pire des cas, un call arrivé à échéance n'est pas exercé et ne vaut rien, sa valeur ne peut pas être négative. Cela signifie que $c \geq 0$, et par conséquent :

$$c \geq \max(S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0) \tag{11.4}$$

■ **Exemple 11.1** Soit une option d'achat européenne portant sur une action sans versement de dividendes, cette dernière cotant 51 €; le prix d'exercice de l'option est de 50 €, l'échéance est à six mois, et le taux sans risque est de 12 % par an. Notre notation indique donc : S_0 = 51 €, K = 50 €, r = 12 % et T = 0,5. En utilisant l'équation (11.4), la borne inférieure de la valeur de l'option est $S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$, soit :

$$51 - 50\,\mathrm{e}^{-0,12\times 0,5} = 3,91\ €$$

Les bornes inférieures des prix de puts européens sur des actions ne versant pas de dividendes

Une des bornes inférieures de la valeur d'un put européen sur une action ne versant pas de dividendes est donnée par :

$$K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0$$

Comme nous l'avons fait précédemment, nous illustrons le raisonnement par un exemple avant de présenter le modèle général.

Supposons que S_0 = 37 €, K = 40 €, r = 5 % et T = 0,5. Dans ce cas :

$$K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0 = 40\,\mathrm{e}^{-0,05\times 0,5} - 37 = 2,01\ €$$

Considérons le cas où la valeur du put est de 1,00 €, c'est-à-dire moins que le minimum théorique de 2,01 €. Un arbitragiste peut emprunter 38,00 € pour six mois pour acheter à la fois le put et l'action sous-jacente. Au bout des six mois, l'arbitragiste devra rembourser son emprunt avec les intérêts, soit $38\,\mathrm{e}^{0,05\times 0,5}$ = 38,96 €. Si le cours de l'action est alors inférieur à 40,00 €, l'arbitragiste exercera l'option afin de vendre l'action à 40,00 €, rembourser l'emprunt et dégager un gain de :

$$40,00 - 38,96 = 1,04\ €$$

En revanche, si le cours de l'action est supérieur à 40,00 €, l'arbitragiste n'exerce pas son option, vend l'action et rembourse l'emprunt avec un gain plus important encore. Par exemple, si le cours de l'action est de 42,00 €, l'arbitragiste encaissera :

$$42,00 - 38,96 = 3,04\ €$$

Pour le modèle général, considérons les portefeuilles suivants :

Portefeuille C : une option de vente européenne et une action sous-jacente ;

Portefeuille D : une obligation zéro-coupon procurant un revenu égal à K à l'échéance.

Si $S_T < K$, l'option du portefeuille C est exercée à l'échéance et la valeur du portefeuille devient égale à K. Si $S_T > K$, l'option de vente ne vaut plus rien à l'échéance et la valeur du portefeuille est égale à S_T. Ainsi, la valeur du portefeuille C peut être définie de la façon suivante :

$$\max(S_T\,;K)$$

à la date T. Si l'on suppose que la trésorerie disponible est investie au taux sans risque, la valeur du portefeuille D est égale à K à la date T. Par conséquent, à l'échéance, la valeur du portefeuille C est supérieure ou égale à celle du portefeuille D, quoi qu'il arrive. Il en découle qu'en cas d'absence d'opportunités d'arbitrage, le portefeuille C a une valeur égale ou supérieure à celle du portefeuille D à la date d'aujourd'hui. Ainsi :

$$p + S_0 \geq K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

ou encore :

$$p \geq K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0$$

Puisque, dans le pire des cas, un put arrivé à échéance n'est pas exercé et ne vaut rien, sa valeur ne peut pas être négative, ce qui se traduit par :

$$p \geq \max(K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,;0) \tag{11.5}$$

■ **Exemple 11.2** Soit un put européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, cette dernière est cotée 38 €, le prix d'exercice de l'option est de 40 €, l'échéance est à trois mois et le taux sans risque est de 10 %. On a donc : S_0 = 38 €, K = 40 €, r = 0,10 et T = 0,25. En utilisant l'équation (11.5), la borne inférieure de la valeur de l'option est $K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0$, soit :

$$40\,\mathrm{e}^{-0,1\times 0,25} - 38 = 1,01\ €$$

11.4 La parité call-put

Nous allons maintenant présenter une des relations les plus importantes liant p et c. Reprenons les deux portefeuilles utilisés dans la section précédente :

Portefeuille A : une option d'achat européenne et une trésorerie égale à $K\,\mathrm{e}^{-rT}$;

Portefeuille C : une option de vente européenne et une action sous-jacente.

Nous continuons à considérer que l'action ne verse pas de dividendes. Les calls et les puts ont le même prix d'exercice K et la même date d'échéance T.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'obligation à coupon zéro du portefeuille A prend la valeur K à la date d'échéance T. Si le prix de l'action S_T à la date T se révèle supérieur à K, alors l'option d'achat du portefeuille A sera exercée.

Cela signifie que, dans ce cas, le portefeuille A vaut $(S_T - K) + K = S_T$ à la date T. Si S_T s'avère être inférieur à K, alors l'option d'achat du portefeuille A n'aura aucune valeur à l'échéance et le portefeuille vaudra alors K à la date T.

Dans le portefeuille C, l'action vaut S_T à la date T. Si S_T se révèle inférieure à K, alors l'option de vente du portefeuille C sera exercée. Cela signifie que le portefeuille C vaut dans ce cas $(K - S_T) + S_T = K$ à la date T. Si S_T s'avère supérieure à K, alors l'option de vente du portefeuille C n'aura aucune valeur à l'échéance et le portefeuille vaudra S_T à la date T.

La situation est résumée dans le tableau 11.2. Si, à l'échéance, $S_T > K$, les deux portefeuilles valent S_T. Si $S_T < K$, les deux portefeuilles valent K. En d'autres termes, la valeur de chacun des portefeuille à l'échéance des options est égale à : $\max(S_T\,;K)$.

Tableau 11.2 : Valeurs à l'échéance des portefeuilles A et C

		$S_T > K$	$S_T < K$
Portefeuille A	Option d'achat	$S_T - K$	0
	Obligation zéro-coupon	K	K
	Total	S_T	K
Portefeuille C	Option de vente	0	$K - S_T$
	Action	S_T	S_T
	Total	S_T	K

Les options étant européennes, elles ne peuvent être exercées avant la date d'échéance et, les portefeuilles ayant la même valeur à cette date, ils ont par conséquent des valeurs identiques également aujourd'hui. Si ce n'était pas le cas, un arbitragiste pourrait acheter le portefeuille le moins cher et vendre le plus cher. Puisqu'il est certain que les portefeuilles pourront s'annuler par compensation à la date T, cette stratégie garantirait à son auteur un gain d'arbitrage égal à la différence entre les valeurs actuelles des deux portefeuilles.

Les valeurs actuelles des composantes du portefeuille A s'expriment par c et $K\,\mathrm{e}^{-rT}$, et celles du portefeuille C par p et S_0. Par conséquent, on peut écrire :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0 \tag{11.6}$$

Cette égalité est connue sous le nom de « relation de parité call-put » Elle exprime le fait que la valeur d'un call (put) européen, caractérisé par un certain prix d'exercice et une date d'échéance, peut être déduite de la valeur d'un put (call) européen doté des mêmes caractéristiques (en termes de prix d'exercice, date d'échéance, action sous-jacente, etc.).

Pour illustrer les opportunités d'arbitrage lorsque l'équation (11.6) n'est pas vérifiée, supposons par exemple que le prix de l'action soit de 31 €, le prix d'exercice de 30 €,

le taux d'intérêt sans risque de 10 %, le prix du call européen à trois mois de 3 € et le prix du put européen à trois mois de 2,25 €. Dans ce cas, nous obtenons :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = 3 + 30\,\mathrm{e}^{-0,1\times 3/12} = 32{,}26 \text{ €}$$
$$p + S_0 = 2{,}25 + 31 = 33{,}25 \text{ €}$$

Le portefeuille C est surévalué par rapport au portefeuille A. Un arbitragiste pourrait alors acheter les titres du portefeuille A et vendre à découvert ceux du portefeuille C. Cette stratégie implique d'acheter le call et de se porter vendeur à la fois du put et de l'action sous-jacente. Ceci génère un flux monétaire en date 0 égal à :

$$-3 + 2{,}25 + 31 = 30{,}25 \text{ €}$$

En investissant ce montant au taux d'intérêt sans risque, la somme obtenue devient $30{,}25\,\mathrm{e}^{0,1\,\times\,0,25} = 31{,}02$ € au bout de trois mois. Si, à la date d'échéance, l'action est cotée plus de 30 €, l'option d'achat pourra être exercée. Si, au contraire, l'action cote moins de 30 €, c'est l'option de vente qui sera exercée. Quel que soit le cas, l'investisseur finit donc par acheter l'action pour 30 €. En effet, en cas de hausse du cours de l'action, l'investisseur dénoue sa position de vente à découvert de l'action en l'achetant 30 € grâce au call. En cas de baisse du cours de l'action, l'investisseur doit respecter ses obligations de vendeur de put et acheter, au détenteur de son option, une action pour 30 €, qu'il utilise pour clore sa position de vente à découvert de l'action. Son gain net est alors de :

$$31{,}02 \text{ €} - 30{,}00 \text{ €} = 1{,}02 \text{ €}$$

Pour considérer la situation réciproque, supposons que le prix du call soit de 3 € et le prix du put de 1 €. Dans ce cas :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = 3 + 30\,\mathrm{e}^{-0,1\times 3/12} = 32{,}26 \text{ €}$$
$$p + S_0 = 1 + 31 = 32{,}00 \text{ €}$$

C'est le portefeuille A qui est, cette fois, surévalué par rapport au portefeuille C. Un arbitragiste peut vendre à découvert les titres du portefeuille A et acheter ceux du portefeuille C pour s'assurer un gain. La stratégie consiste à se porter vendeur d'un call et à acquérir ensemble le put et l'action pour un investissement initial de :

$$31 \text{ €} + 1 \text{ €} - 3 \text{ €} = 29 \text{ €}$$

L'investissement est financé par un emprunt au taux sans risque. Au bout de trois mois, l'investisseur devra rembourser $29\,\mathrm{e}^{0,1\times 0,25} = 29{,}73$ €. Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'une des deux options sera exercée en fonction du cours de l'action. Dans les deux cas, les positions détenues par l'investisseur le conduiront à vendre l'action 30 €. Son gain net sera alors de :

$$30 \text{ €} - 29{,}73 \text{ €} = 0{,}27 \text{ €}$$

Ces exemples sont illustrés dans le tableau 11.3. L'encadré 11.1 montre comment les options et la relation de parité call-put peuvent être utiles pour comprendre les positions respectives des actionnaires et des obligataires d'une entreprise.

Tableau 11.3 : Opportunités d'arbitrage quand la relation de parité call-put n'est pas respectée. Prix de l'action = 31 €; taux sans risque = 10 %; prix du call = 3 €. Le call et le put ont un prix d'exercice de 30 € et une maturité de 3 mois.

Prix du put : 2,25 €	**Prix du put : 1 €**
Action en date 0	**Action en date 0**
Achat du call à 3 €	Vente du call à 3 €
Vente du put à 2,25 €	Achat du put à 1 €
Investir 30,25 € pour 3 mois	Emprunter 29 € pour 3 mois
Action dans 3 mois si S > 30	**Action dans 3 mois si S > 30**
Réception de 31,02 € (du placement)	Paiement de 29,73 € (remboursement)
Exercice du call et achat de l'action pour 30 €	Call exercé et vente de l'action pour 30 €
Profit net : 1,02 €	Profit net : 0,27 €
Action dans 3 mois si S < 30	**Action dans 3 mois si S < 30**
Réception de 31,02 € (du placement)	Paiement de 29,73 € (remboursement)
Put exercé et achat de l'action pour 30 €	Exercice du put et vente de l'action pour 30 €
Profit net : 1,02 €	Profit net : 0,27 €

Encadré 11.1 Relation de parité call-put et structure du capital

Les pionniers de l'évaluation des options ont été Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton. Au début des années 1970, ils ont montré que les options pouvaient être utilisées pour caractériser la structure du capital d'une entreprise. Aujourd'hui, ce modèle est largement utilisé pour évaluer le risque de crédit d'une société. Pour en donner une illustration, considérons une entreprise dont les actifs sont financés par des actions et des obligations zéro-coupon. Supposons que ces dernières ont une échéance à 5 ans, à laquelle il faudra rembourser le principal, noté K. L'entreprise ne paie pas de dividendes. Si les actifs valent plus que K dans 5 ans, les actionnaires pourront rembourser les obligataires. Si ce n'est pas le cas, ils déclareront faillite et les obligataires deviendront propriétaires de la société. De ce fait, si on note A la valeur des actifs à la date de maturité de la dette, on obtient une valeur des actions à cette date égale à $\max(A-K\,;0)$. Cette formulation montre que les actionnaires détiennent en fait un call sur la valeur de la société, dont le prix d'exercice est la valeur faciale de la dette. En ce qui concerne les obligataires, ils obtiennent $\max(A\,;K)$, qu'on peut écrire $K-\max(K-A\,;0)$. Les obligataires ont donc donné aux actionnaires le droit de leur vendre la société pour un prix de K à l'échéance de la dette, et la valeur des obligations est égale à la valeur actuelle de K moins le prix d'un put européen de prix d'exercice K sur les actifs de la firme.

Pour résumer, si on note c et p les prix des calls et puts évoqués, on a :

$$\text{Valeur des actions} = c$$
$$\text{Valeur des obligations} = VA(K) - p$$

où $VA(K)$ est la valeur actuelle du prix d'exercice. Si on note A_0 la valeur initiale des actifs, on a :

$$A_0 = c + VA(K) - p$$

Cette relation s'écrit aussi :

$$c + VA(K) = p + A_0$$

C'est la relation de parité call-put de l'équation (11.6) pour des options portant sur les actifs de la société.

Le cas des options américaines

La parité call-put a été établie pour les options européennes. Cependant, il est possible d'en tirer quelques résultats pour les options américaines. On peut ainsi démontrer (voir exercice 11.18) que :

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{11.7}$$

■ **Exemple 11.3** Soit un call américain portant sur une action ne versant pas de dividendes ; le prix d'exercice de l'option est de 20 €, l'échéance est à cinq mois et le premium est de 1,50 €. Si l'on suppose que l'action sous-jacente est cotée 19 € et que le taux d'intérêt sans risque est de 10 %, on obtient, par l'équation (11.7).

$$19 - 20 \leq C - P \leq 19 - 20\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 5/12}$$

ou encore :

$$1 \geq P - C \geq 0{,}18$$

démontrant que la valeur de $P - C$ est comprise entre 0,18 € et 1 €. Sachant que C est égal à 1,50 €, P doit être compris entre 1,68 € et 2,50 €. Autrement dit, les bornes supérieures et inférieures de la valeur d'un put américain de même prix d'exercice et de même échéance que le call américain sont de 2,50 € et 1,68 €.

11.5 L'exercice anticipé d'une option d'achat sur action sans dividendes

Dans cette section, nous montrons qu'il n'est jamais optimal d'exercer, avant la date d'échéance, un call américain quand l'action sous-jacente ne verse pas de dividendes. Pour illustrer le caractère général de cette proposition, nous considérons l'exemple d'un call américain sur une action sans dividendes avec une échéance à un mois, un cours

actuel de l'action à 50 € et un prix d'exercice à 40 €. L'option est largement dans la monnaie et l'investisseur qui la détient pourrait être tenté de l'exercer immédiatement. Cependant, si cet investisseur prévoit de conserver l'action plus d'un mois, ce n'est pas la meilleure stratégie. Il est préférable de conserver l'option et de ne l'exercer qu'à la fin du mois. En effet, dans ce cas, les 40 € de prix d'exercice ne sont versés qu'un mois plus tard, l'investisseur gagne donc les intérêts sur ces 40 € pour un mois. En outre, puisque l'action ne délivre aucun dividende, aucun revenu sur la détention de l'action n'est sacrifié. Le dernier avantage à privilégier l'attente vient de la probabilité (même infime) que le cours de l'action descende en dessous des 40 € dans l'intervalle de temps considéré. L'investisseur qui aura conservé son option sera alors très heureux de ne pas l'avoir exercée plus tôt !

Nous venons de montrer qu'il n'y a aucun avantage à exercer prématurément pour un investisseur qui prévoit de conserver l'action pour une durée au moins égale à la durée de vie restante de l'option (un mois ici). Mais qu'en est-il si l'investisseur estime que l'action est surévaluée et qu'il envisage d'exercer l'option afin de vendre l'action immédiatement ? Dans ce cas, l'investisseur a tout intérêt à vendre l'option plutôt que de l'exercer [2]. L'option est alors achetée par un autre investisseur qui souhaite détenir l'action. De tels investisseurs existent, sinon le cours de l'action ne serait pas de 50 €. Le prix obtenu par la vente de l'option est supérieur à sa valeur intrinsèque de 10 €, pour les raisons mentionnées auparavant.

Pour un raisonnement plus formel, nous pouvons utiliser l'équation (11.4) :

$$c \geq S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Puisque les détenteurs d'options américaines disposent d'opportunités d'exercice plus avantageuses que les détenteurs d'options européennes équivalentes, la valeur des calls américains est supérieure ou égale à celle des calls européens :

$$C \geq c$$

et par conséquent :

$$C \geq S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Sachant que $r > 0$, il en découle que $C > S_0 - K$. S'il était optimal d'exercer plus tôt, C serait égal à $S_0 - K$. Nous pouvons donc en déduire qu'il n'est jamais optimal d'exercer par anticipation.

En résumé, il y a deux raisons pour lesquelles un call américain portant sur une action ne délivrant pas de dividendes n'est pas exercé prématurément. L'une se rapporte à l'assurance qu'il procure. Détenir une option d'achat, plutôt que l'action sous-jacente, assure en effet à son propriétaire une protection contre une baisse du cours de l'action en dessous du prix d'exercice. Une fois que l'option est exercée et que le prix d'exercice a été échangé contre une action, cette assurance disparaît. L'autre raison concerne la

2. Une autre stratégie consisterait à conserver l'option et à vendre à découvert l'action afin de s'assurer un gain supérieur à 10 €. En effet, l'investisseur reçoit 50 € qu'il place pendant un mois, puis dans le pire des cas à l'échéance, si la valeur de l'action est supérieure à 40 €, il exerce l'option et paie le prix d'exercice de 40 € pour clore sa position de vente à découvert de l'action. Son gain est donc au minimum de 10 + les intérêts du placement.

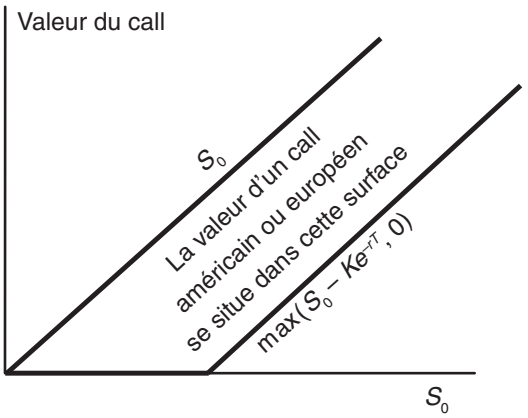
valeur temps de la monnaie. Du point de vue du détenteur de l'option, plus le prix d'exercice est payé tard, mieux c'est. Ce raisonnement est valide tant que le taux sans risque est positif.

Les bornes

Puisque les options d'achat américaines ne sont jamais exercées prématurément en l'absence de dividendes, elles ont la même valeur que les calls européens et, par conséquent, $C = c$. Les équations (11.1) et (11.4) permettent de fixer les bornes supérieures et inférieures de la valeur d'un call :

$$\max\left(S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0\right) \leq c, \quad C \leq S_0$$

Le graphique 11.3 montre comment ces bornes encadrent la valeur d'une option d'achat.

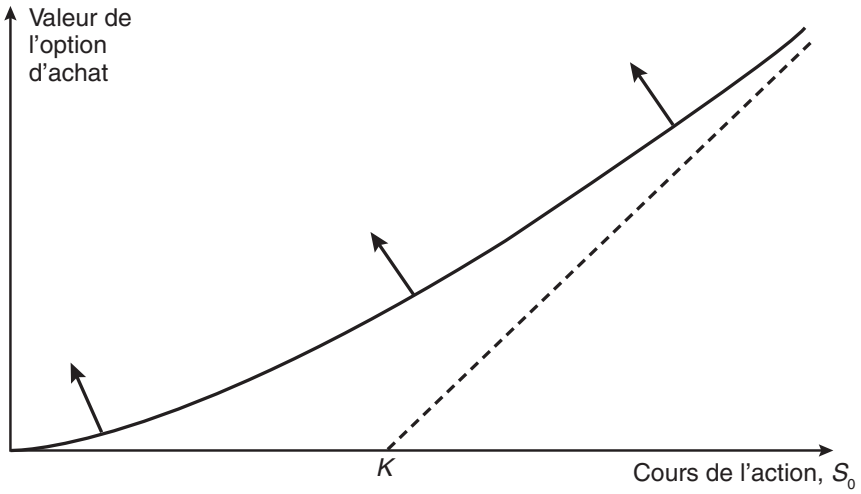


Graphique 11.3 : Limites de la valeur d'un call américain ou européen en l'absence de dividendes

La façon dont le prix d'un call peut varier en fonction du prix de l'action est illustrée dans le graphique 11.4. Lorsque r, T ou la volatilité augmentent, la courbe représentant la valeur du call par rapport au cours de l'action se déplace en direction des flèches (c'est-à-dire en s'éloignant de sa valeur intrinsèque).

11.6 L'exercice anticipé d'une option de vente sur action sans dividendes

Il peut être optimal d'exercer prématurément un put américain portant sur une action ne versant pas de dividendes. En effet, à tout moment, un put devrait être exercé s'il est suffisamment dans la monnaie. À titre d'exemple, considérons une situation extrême avec un prix d'exercice à 10 € et un cours d'action virtuellement nul. En exerçant immédiatement, un investisseur encaisse un gain immédiat de 10 €. S'il attend, son gain peut devenir inférieur à 10 €, mais il ne peut pas devenir supérieur à 10 €, puisque la valeur de l'action ne peut être négative. En outre, il est préférable de recevoir 10 € maintenant que plus tard. Ainsi, l'option devrait être exercée immédiatement.



Graphique 11.4 : Variation de la valeur d'un call américain ou européen portant sur une action sans dividendes en fonction du cours de l'action, S_0

À l'instar d'un call, un put peut être considéré comme une assurance. Lorsqu'il est détenu conjointement avec une action, il couvre son propriétaire contre une baisse du cours en deçà d'un certain seuil. Cependant, un put est différent d'un call dans le sens où il peut être optimal pour un investisseur d'abandonner l'assurance et d'exercer prématurément afin d'encaisser immédiatement le prix d'exercice. En général, l'exercice anticipé d'une option de vente devient d'autant plus intéressant que S_0 baisse, r augmente et que la volatilité diminue.

Les bornes

Des équations (11.3) et (11.5), on peut déduire les bornes supérieures et inférieures d'un put européen dont l'action ne verse pas de dividendes telles que :

$$\max\left(K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,;0\right) \leq p \leq K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Pour un put américain équivalent de valeur P, la condition la plus forte :

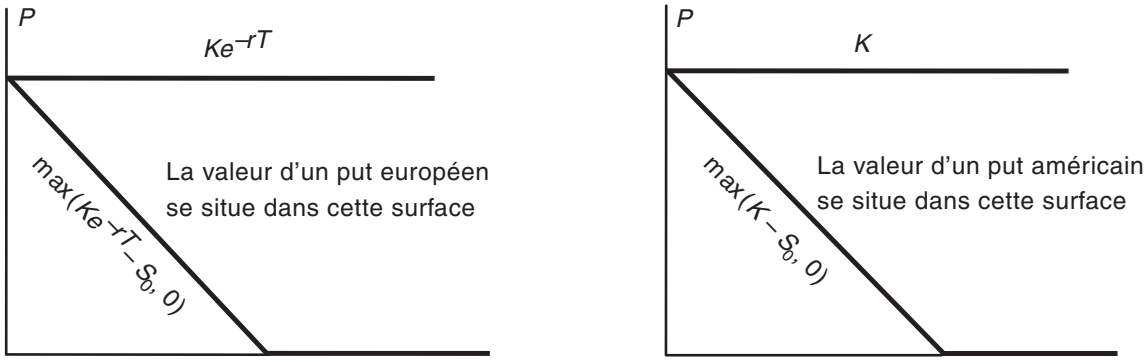
$$P \geq \max\left(K - S_0\,;0\right)$$

est toujours vérifiée, puisqu'un exercice immédiat est forcément possible. Il s'agit d'une condition plus forte que celle de l'option de vente européenne exprimée par l'équation (11.5). En utilisant le résultat de l'équation (11.2), les limites d'un put américain dont l'action ne verse pas de dividendes sont :

$$\max\left(K - S_0\,;0\right) \leq P \leq K$$

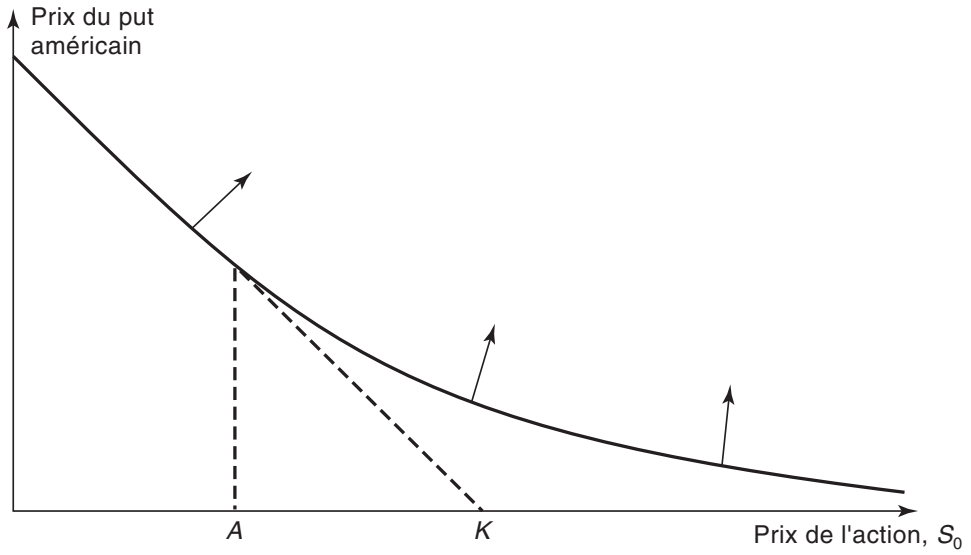
Le graphique 11.5 montre comment ces bornes encadrent la valeur d'un put. Le graphique 11.6 montre de quelle façon la valeur d'un put américain peut varier en fonction de S_0. Comme $r > 0$, il devient optimal d'exercer une option de vente américaine dès que le cours de l'action est suffisamment bas. Lorsque cet exercice anticipé devient optimal, la valeur de l'option est égale à $K - S_0$. La courbe représentant la valeur de l'option se confond par conséquent avec celle de la valeur intrinsèque, $K - S_0$, lorsque S_0 est suffisamment faible. Dans le graphique 11.6, cette valeur de S_0 est indiquée au

point A. La courbe exprimant le prix du put en fonction du prix de l'action se déplace dans la direction des flèches lorsque r baisse, lorsque la volatilité augmente ou lorsque T augmente.


P
Ke^{-rT}
La valeur d'un put européen se situe dans cette surface
$\max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$
P
K
La valeur d'un put américain se situe dans cette surface
$\max(K - S_0, 0)$

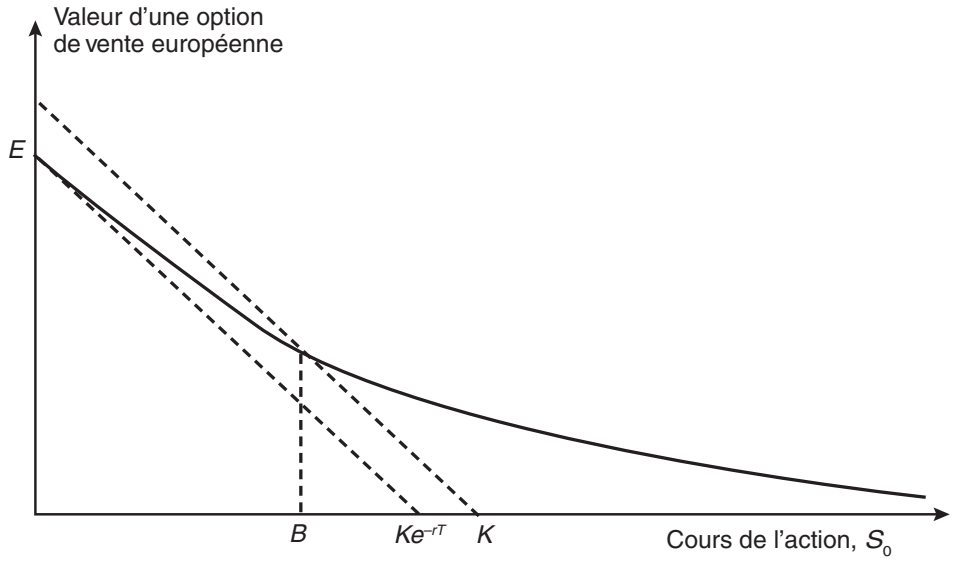
Graphique 11.5 : Limites des valeurs d'un put européen et d'un put américain en l'absence de dividendes

Puisqu'il y a des circonstances dans lesquelles il est préférable d'exercer un put américain prématurément, la valeur d'un tel put est toujours supérieure à celle de son équivalent européen. De plus, sachant que la valeur d'un put américain est parfois égale à sa valeur intrinsèque (voir graphique 11.6), il en découle naturellement que, dans certains cas, la valeur d'un put européen peut être inférieure à sa valeur intrinsèque.



Graphique 11.6 : Variation de la valeur d'une option de vente américaine en fonction du cours de l'action, S_0

Le graphique 11.7 montre les variations de la valeur d'un put européen en fonction du cours de l'action sous-jacente. Notons que le point B du graphique 11.7, qui correspond à l'égalité entre la valeur de l'option et sa valeur intrinsèque, doit représenter une valeur de l'action supérieure à celle du point A du graphique 11.6. Le point E du graphique 11.7 correspond à $S_0 = 0$ et à la valeur de l'option européenne de vente égale à $K\,\mathrm{e}^{-rT}$.



Graphique 11.7 : Variation de la valeur d'une option de vente européenne en fonction du cours de l'action, S_0

11.7 L'effet des dividendes

Les résultats présentés jusque-là supposaient que les actions sous-jacentes aux contrats d'options ne payaient pas de dividendes. Dans cette section, nous examinons l'impact de l'existence de dividendes. Nous supposons que les dividendes versés au cours de la vie de l'option sont connus à l'avance. Les options échangées sur les marchés ont, dans une large majorité, une durée de vie inférieure à un an ; par conséquent, cette hypothèse est réaliste dans la plupart des cas. Nous noterons D la valeur actuelle des dividendes payés durant la vie de l'option.

Les bornes inférieures des prix d'options d'achat et de vente

Les portefeuilles A et B sont maintenant définis de la façon suivante :

Portefeuille A : une option d'achat européenne et une trésorerie égale à $D+K\,\mathrm{e}^{-rT}$

Portefeuille B : une action

Un raisonnement analogue à celui qui a permis d'aboutir à l'équation (11.4) conduit à :

$$c \geq \max\left(S_0 - D - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0\right) \tag{11.8}$$

Les portefeuilles C et D, quant à eux, sont définis par :

Portefeuille C : une option de vente européenne et une action

Portefeuille D : une trésorerie égale à $D + K\,\mathrm{e}^{-rT}$

Un raisonnement semblable à celui qui a conduit à l'équation (11.5) donne cette fois :

$$p \geq \max\left(D + K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,;0\right) \tag{11.9}$$

L'exercice anticipé

Lorsqu'un dividende est attendu, l'exercice prématuré du call américain peut être optimal juste avant la date de détachement du dividende. Il n'est cependant pas optimal d'exercer à un autre moment. L'étude de ce point est approfondie à la section 15.12.

La parité call-put

En comparant la valeur de l'option à l'échéance des portefeuilles A et C tels que nous les avons redéfinis, l'équation (11.6) de parité call-put devient :

$$c + D + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0 \tag{11.10}$$

Le versement de dividendes modifie également l'équation (11.7) de la manière suivante (voir exercice 11.19) :

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{11.11}$$

Résumé

Six facteurs influencent la valeur d'une option sur action : le cours de l'action sous-jacente, le prix d'exercice, la date d'échéance, la volatilité des prix de l'action, le taux d'intérêt sans risque et l'estimation du montant de dividendes versé durant la vie de l'option. La valeur d'une option d'achat augmente généralement lorsque le cours de l'action sous-jacente, la date d'échéance, la volatilité et le taux sans risque s'accroissent. Au contraire, cette valeur diminue si ce sont le prix d'exercice ou le dividende qui augmentent. De même, la valeur d'une option de vente augmente généralement lorsque le prix d'exercice, la date d'échéance, la volatilité des prix de l'action et le dividende augmentent. Au contraire, cette valeur diminue si ce sont le cours de l'action ou le taux sans risque qui augmentent.

Certaines relations d'arbitrage peuvent être établies sans faire aucune hypothèse sur la volatilité des actions sous-jacentes. Par exemple, la valeur d'une option d'achat doit toujours être inférieure au prix de l'action qu'elle permet d'obtenir. De la même façon, la valeur d'une option de vente doit toujours être inférieure au prix d'exercice de l'option elle-même.

Le prix d'une option d'achat portant sur une action ne versant pas de dividendes est au moins égal à :

$$\max(S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0)$$

où S_0 représente le cours de l'action, K le prix d'exercice, r le taux sans risque et T le temps restant à courir jusqu'à l'échéance. Le prix d'une option de vente portant sur une action ne versant pas de dividendes est au moins égal à :

$$\max(K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,;0)$$

Lorsqu'un dividende, de valeur actuelle D, est versé, la borne inférieure pour le prix d'une option d'achat est :

$$\max(S_0 - D - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0)$$

La borne inférieure du prix d'un put devient :

$$\max(K\,\mathrm{e}^{-rT} + D - S_0\,;0)$$

La parité call-put est une relation entre la valeur d'une option d'achat européenne sur action, c, et la valeur d'une option de vente européenne sur action, p. Pour une action ne versant pas de dividendes, elle s'écrit :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0$$

Si l'action verse un dividende, la relation de la parité call-put est alors :

$$c + D + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0$$

La parité call-put n'est pas valable pour les options américaines. Cependant, il est possible d'utiliser un raisonnement par arbitrage pour déduire les bornes de la différence entre la valeur d'une option d'achat américaine et celle d'une option de vente américaine.

Au chapitre 15, nous reprendrons et approfondirons les analyses de ce chapitre en émettant des hypothèses spécifiques sur la distribution de probabilité des cours de l'action. Cette étude permettra de déduire une formule d'évaluation exacte pour les options européennes. Aux chapitres 13 et 21, nous verrons comment l'utilisation de procédures numériques permet d'évaluer les options américaines.

Références complémentaires

Broadie M. et J. Detemple, "American Option Valuation : New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods", *Review of Financial Studies*, 9 (4), 1996, 1211-1250.

Merton R. C., "The Relationship between Put and Call Prices : Comment", *Journal of Finance*, 28, mars 1973, 183-184.

Merton R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, printemps 1973, 141-183.

Stoll H. R., "The Relationship between Put and Call Option Prices", *Journal of Finance*, 24, décembre 1969, 801-824.

Problèmes et exercices

11.1 Quels sont les six facteurs influençant la valeur d'une option ?

11.2 Quelle est la borne inférieure du prix d'un call à 4 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est de 28 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 25 € et le taux d'intérêt sans risque de 8 % par an ?

11.3 Quelle est la borne inférieure du prix d'un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est de 12 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 15 € et le taux d'intérêt sans risque de 6 % par an ?

11.4 Donnez deux raisons pour lesquelles l'exercice anticipé d'un call américain sur une action ne versant pas de dividendes n'est pas optimal. La première a trait à l'actualisation des flux de trésorerie. La seconde est pertinente même si les taux d'intérêt sont nuls.

11.5 « L'exercice anticipé d'un put américain est un compromis entre la valeur temps de l'argent et la valeur de l'assurance que procure le put. » Expliquez cette affirmation.

11.6 Pourquoi la valeur d'un call américain est-elle toujours supérieure ou égale à sa valeur intrinsèque. Est-ce la même chose pour un call européen ? Justifiez votre réponse.

11.7 Le prix d'une action est de 19 € et celui d'un call européen à 3 mois sur ce titre avec un prix d'exercice de 20 € est égal à 1 €. Le taux sans risque est de 4 % par an. Quel est le prix du put de mêmes caractéristiques que le call ? (On suppose que l'action ne paie pas de dividendes pendant les trois mois.)

11.8 Expliquez pourquoi les arguments justifiant la parité call-put pour des options européennes ne peuvent pas être utilisés pour obtenir le même résultat avec des options américaines.

11.9 Quelle est la borne inférieure du prix d'un call à 6 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est à 80 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 75 € et le taux d'intérêt sans risque de 10 % par an ?

11.10 Quelle est la borne inférieure du prix d'un put européen à 2 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes et dont le cours est à 58 €, sachant que le prix d'exercice de l'option est de 65 € et le taux d'intérêt sans risque de 5 % par an ?

11.11 Un call européen à 4 mois portant sur une action versant un dividende est actuellement coté 5 €. L'action est cotée 64 €, le prix d'exercice est de 60 € et un dividende de 0,80 € sera versé dans un mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 12 % par an quelle que soit l'échéance. Quelles sont les opportunités dont pourrait profiter un arbitragiste ?

11.12 Un put européen à 1 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes est actuellement coté 2,50 €. L'action est cotée 47 €, le prix d'exercice est de 50 € et le taux d'intérêt sans risque est de 6 % par an. Quelles sont les opportunités dont pourrait profiter un arbitragiste ?

11.13 Expliquez, de façon intuitive, pourquoi l'exercice anticipé d'un put américain devient plus intéressant lorsque le taux sans risque augmente et que la volatilité baisse.

11.14 Un call européen qui expire dans 6 mois et dont le prix d'exercice est de 30 € est coté 2 €. La valeur de l'action sous-jacente est de 29 € et un dividende de 0,50 € est attendu dans deux mois, puis de nouveau dans cinq mois. La structure par termes des taux est plate avec un taux d'intérêt sans risque à 10 %. Quelle est la valeur d'un put européen dont l'échéance est de 6 mois et le prix d'exercice de 30 € ?

11.15 Expliquez les opportunités d'arbitrage si la valeur de l'option de vente du problème précédent (11.14) est de 3 €.

11.16 Le prix d'un call américain sur une action ne versant pas de dividendes est de 4 €. Le cours de l'action est de 31 €, le prix d'exercice est de 30 € et la date

d'échéance dans 3 mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 %. Déduisez-en les bornes supérieures et inférieures de la valeur du put américain de mêmes caractéristiques (action sous-jacente, prix d'exercice, date d'échéance).

11.17 Expliquez minutieusement les opportunités d'arbitrage si la valeur du put du problème précédent (11.16) est plus élevée que la borne supérieure qui a pu être déterminée.

11.18 Démontrez l'équation (11.7). (Conseil : pour la première partie de la relation, considérez (a) un portefeuille consistant en un call européen et une trésorerie égale à K et (b) un portefeuille consistant en un put américain et une action.)

11.19 Démontrez l'équation (11.11). (Conseil : pour la première partie de la relation, considérez (a) un portefeuille consistant en un call européen et une trésorerie égale à $D + K$, et (b) un portefeuille consistant en un put américain et une action.)

11.20 Supposons qu'une option d'achat de 5 ans portant sur l'action d'une société ne versant pas de dividendes soit accordée à des employés. L'option peut être exercée à tout moment après la fin de la première année. Contrairement à une option d'achat classique cotée en bourse, les stock-options ne peuvent être vendues. Quel est l'impact probable de cette restriction sur la décision d'un exercice anticipé de cette option ?

11.21 Utilisez le logiciel DerivaGem pour vérifier si les graphiques 11.1 et 11.2 sont corrects.

11.22 Quel est l'impact (le cas échéant) de taux d'intérêt négatifs sur :

a. le résultat de la parité put-call sur options européennes ?

b. le fait que des calls américains qui portent sur des actions ne versant pas de dividendes ne doivent jamais être exercés avant l'échéance ?

c. le fait que des puts américains qui portent sur des actions ne versant pas de dividendes doivent parfois être exercés avant l'échéance ?

Vous supposerez que la détention de trésorerie procurant un intérêt nul n'est pas possible.

Questions complémentaires

11.23 Des calls sont émis sur le marché avant que les puts équivalents ne le soient. En attendant l'émission de puts, comment pouvez-vous créer, de façon synthétique, un put européen sur une action ne versant pas de dividendes ?

11.24 Les valeurs d'un call et d'un put européens sur une action ne versant pas de dividendes, d'échéance 12 mois et de prix d'exercice 120 €, sont respectivement de 20 € et 5 €. L'action sous-jacente est cotée 130 €. Quel est le taux sans risque implicite ?

11.25 Un call et un put européens sur action ont tous deux un prix d'exercice de 20 € et une échéance à trois mois. Les deux sont vendus 3 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an, le cours de l'action de 19 € et le versement d'un dividende de 1 € est prévu dans un mois. Identifiez les opportunités d'arbitrage offertes aux opérateurs.

11.26 Soient c_1, c_2 et c_3, les prix de trois calls européens ayant, respectivement, pour prix d'exercice K_1, K_2 et K_3, avec $K_3 > K_2 > K_1$ et $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Ces trois options ont la même date d'échéance. Montrez que : $c_2 \leq 0{,}5(c_1 + c_3)$. (Indication : considérez un portefeuille qui comprend une position acheteur pour une option de prix d'exercice K_1 et une option de prix d'exercice K_3, ainsi qu'une position vendeur de deux options de prix d'exercice K_2.)

11.27 Quel est le résultat de la question précédente (11.25) pour des puts européens ?

11.28 Supposons que vous soyez le directeur et unique propriétaire d'une société très endettée. Toute la dette arrivera à échéance dans un an. Si, à ce moment-là, la valeur de la société est plus importante que la valeur faciale de la dette, vous rembourserez vos dettes. Si la valeur de la société est inférieure à la valeur de remboursement, vous déclarerez la faillite et les créanciers prendront possession de la société.

a. Exprimez votre position en termes d'options sur la valeur de la société.

b. Exprimez la position des créanciers en termes d'options sur la valeur de la société.

c. Que pouvez-vous faire pour augmenter la valeur de votre position ?

11.29 Soit une option ayant comme sous-jacent une action cotée 41 €, de prix d'exercice 40 € ; le taux sans risque est 6 %, la volatilité 35 % et la date d'échéance est dans un an. Supposons par ailleurs que le versement d'un dividende de 0,50 € soit prévu dans six mois.

a. Utilisez DerivaGem pour évaluer l'option en supposant que c'est un call européen.

b. Utilisez DerivaGem pour évaluer l'option en supposant que c'est un put européen.

c. Vérifiez que la parité call-put est validée.

d. Étudiez, en utilisant DerivaGem, ce qu'il advient du prix des options lorsque la date d'échéance devient très lointaine. Supposez pour cela qu'il n'y a pas de dividendes. Expliquez les résultats obtenus.

11.30 Considérons une option de vente sur une action cotée 40 € et ne versant pas de dividendes, avec un prix d'exercice de 42 €, un taux d'intérêt sans risque de 2 %, une volatilité de 25 % par an et une échéance dans trois mois. Utilisez DerivaGem pour déterminer :

a. le prix de l'option si elle est européenne (utiliser Black-Scholes : European) ;

b. le prix de l'option si elle est américaine (utiliser Binomial : American avec un arbre à 100 périodes) ;

c. le point B du graphique 11.7.

11.31 La section 11.1 présente l'exemple d'une situation où la valeur d'un call européen est plus faible alors que sa maturité est plus longue. Trouvez un exemple d'une situation où la même chose se produirait pour un put européen.

Chapitre 12

Les stratégies d'échanges impliquant des options

Nous avons analysé, au chapitre 10, les stratégies d'investissement comportant une seule option. Dans ce chapitre, nous examinons les résultats correspondants lorsqu'une option est combinée avec d'autres actifs. En particulier, nous examinons les propriétés de portefeuilles constitués de positions dans (a) une option et une obligation zéro-coupon, (b) une option et le sous-jacent de l'option, et (c) deux ou plusieurs options sur le même actif sous-jacent.

On pourrait s'interroger sur l'intérêt que présentent de tels montages pour un trader. L'explication provient des choix que doit faire le trader compte tenu de ses anticipations sur l'évolution des prix et de son degré d'aversion au risque. Les placements à capital garanti, décrits à la section 12.1, intéressent les investisseurs présentant de l'aversion pour le risque. Ils ne veulent pas risquer de perdre leur capital, mais anticipent la hausse ou la baisse d'un actif particulier et sont prêts à risquer une partie de leur capital. Si un trader est prét à prendre un peu plus de risques, il pourra opter pour un bull ou un bear spread, présentés à la section 12.3. Cependant, le risque serait encore plus important avec une position longue sur une simple option. Supposons qu'un trader anticipe une forte variation du prix d'un actif, mais en ignore le sens. Un certain nombre de stratégies alternatives s'offrent à lui. Une aversion au risque importante peut conduire au choix d'un *reverse butterfly spread*, décrit à la section 12.3, qui lui offrira un gain modeste si son intuition est correcte et une perte faible sinon. Un investisseur plus téméraire peut choisir un straddle ou un strangle, présentés à la section 12.4, pour lesquels les gains ou les pertes potentiels sont plus importants.

D'autres stratégies utilisant des options sont examinées dans les chapitres suivants. Par exemple, le chapitre 17 montre comment les indices boursiers peuvent être utilisés pour gérer le risque d'un portefeuille d'actions ou comment les contrats à terme peuvent permettre de couvrir une exposition au risque de change. Le chapitre 19 traite de la façon dont les lettres grecques sont utilisées pour gérer le risque lié à ces produits dérivés. Le chapitre 26 présente les options exotiques et ce qui est connu sous le nom de réplication statique d'options.

12.1 Les placements à capital garanti

Les options sont souvent utilisées pour créer des placements à capital garanti à destination de clients particuliers. Ce sont des produits qui intéressent particulièrement les investisseurs prudents. Le rendement obtenu par l'investisseur dépend de la performance d'un titre, d'un indice boursier ou d'autres actifs risqués, mais le montant initial du capital investi est garanti. Illustrons par un exemple la façon dont un produit à capital garanti peut être créé.

■ **Exemple 12.1** Supposons que le taux d'intérêt composé continu à 3 ans soit de 6 %. Cela signifie que $1\,000\,\mathrm{e}^{-0,06\times 3} = 835,27$ € vaudront 1 000 € dans trois ans. La différence entre 1 000 € et 835,27 € est de 164,73 €. Supposons ensuite qu'un portefeuille d'actions vaille 1 000 € et offre un rendement en dividendes de 1,5 % par an. Supposons en outre qu'un call européen à 3 ans, à la monnaie et portant sur le portefeuille d'actions, puisse être acheté pour moins de 164,73 €. (Avec DerivaGem, on peut vérifier que c'est le cas si la volatilité du portefeuille est inférieure à 15 % environ.) Une banque offre à ses clients une opportunité d'investissement de 1 000 € comprenant :

1. Une obligation zéro-coupon à 3 ans de valeur faciale 1 000 € ;
2. Un call européen à 3 ans portant sur le portefeuille d'actions.

Si la valeur du portefeuille augmente, l'investisseur obtient ce qu'il aurait obtenu en y investissant 1 000 € (puisque l'obligation zéro-coupon paie 1 000 €, soit le prix d'exercice de l'option). Si la valeur du portefeuille diminue, l'option n'a aucune valeur, mais l'obligation zéro-coupon assure à l'investisseur de recevoir le capital initial investi de 1 000 €.

L'attrait d'un placement à capital garanti réside dans le fait que l'investisseur peut prendre une position risquée sans mettre son capital en péril. Le pire qui puisse arriver est donc que l'investisseur perde l'opportunité d'obtenir un intérêt ou d'autres types de rémunération, comme des dividendes.

Il existe de nombreuses variantes de ce produit. Un investisseur qui anticipe une baisse de la valeur d'un actif peut constituer un placement à capital garanti à l'aide d'un portefeuille comportant une obligation zéro-coupon et une option de vente sur cet actif. Le gain réalisé par l'investisseur dans trois ans sera alors de 1 000 € plus, le cas échéant, le profit obtenu grâce au put.

Un placement à capital garanti est-il une bonne affaire pour l'investisseur particulier ? Lorsqu'une banque propose ce type de produit, elle le fait toujours dans son propre intérêt et dans un but lucratif. Cela signifie que, dans l'exemple 12.1, l'obligation zéro-coupon plus l'option d'achat coûteront moins de 1 000 € à la banque. En outre, les investisseurs prennent toujours le risque que la banque ne soit finalement pas en mesure de garantir le remboursement du capital à l'échéance. Des investisseurs particuliers ont perdu beaucoup d'argent sur les produits à capital garanti (*principal-protected notes*) créés par Lehman Brothers, lors de leur faillite en 2008. Ainsi, dans certains cas, un investisseur sera mieux protégé s'il achète directement l'option et investit le reste de son

capital dans un placement sans risque. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. L'investisseur est soumis à l'augmentation des écarts (spreads) de prix bid/ask de l'option comparée aux conditions dont bénéficient les banques. De même, il est probable que son placement lui procure un taux d'intérêt inférieur à ce qu'obtiendrait une banque. Il est donc possible que la banque puisse apporter de la valeur à l'investisseur, tout en s'assurant un profit pour elle-même.

Plaçons-nous à présent du point de vue de la banque. La viabilité économique du montage de l'exemple 12.1 dépend fortement du niveau des taux d'intérêt et de la volatilité du portefeuille. Si le taux d'intérêt est de 3 % au lieu de 6 %, la banque dispose alors seulement de $1\,000 - 1\,000\,\mathrm{e}^{-0,03\times 3} = 86{,}07$ € pour acheter le call nécessaire. Si les taux d'intérêt sont de 6 %, mais que la volatilité est de 25 % au lieu de 15 %, le prix de l'option sera d'environ 221 €. Dans les deux cas, le produit décrit dans l'exemple 12.1 ne peut pas être profitable pour la banque. Il y a néanmoins de nombreuses façons de créer un produit rentable sur trois ans pour la banque :

- augmenter le prix d'exercice de l'option, de sorte que la valeur du portefeuille doive croître par exemple de 15 % avant que l'investisseur ne réalise un gain ;
- plafonner la rentabilité obtenue par l'investisseur, ou bien l'assujettir au prix moyen de l'actif et non au prix final ;
- prévoir une barrière désactivante (*knock-out*).

Les produits dérivés impliqués dans certaines de ces alternatives sont présentés ultérieurement dans cet ouvrage. (Le plafonnement du profit, qui revient à créer un bull-spread pour l'investisseur, est expliqué dans ce chapitre.)

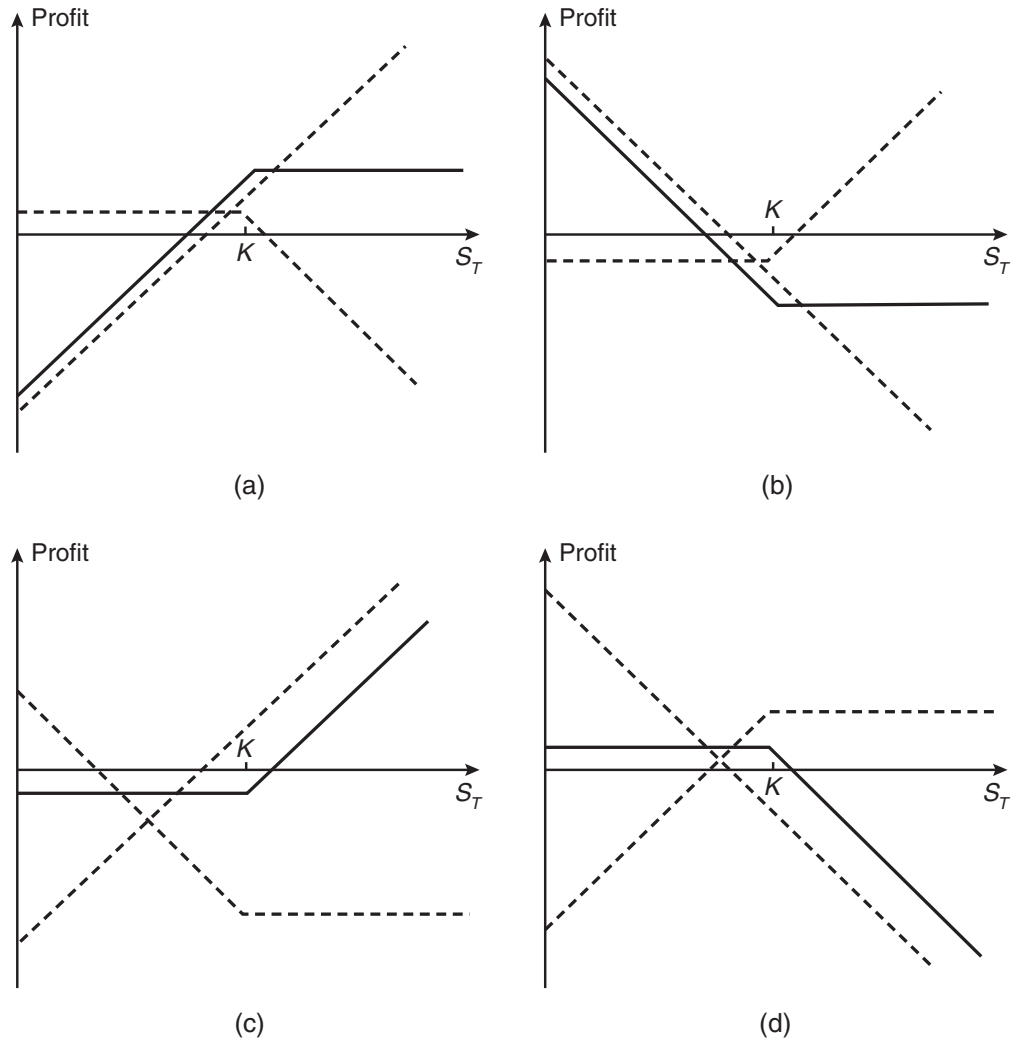
Il existe un autre moyen, pour une banque, de créer parfois un placement à capital garanti qui soit rentable lorsque les taux d'intérêt sont bas ou que la volatilité est élevée. Il consiste à augmenter sa durée de vie. Considérons la situation de l'exemple 12.1 lorsque (a) le taux d'intérêt est de 3 % au lieu de 6 % et que (b) le portefeuille d'actions a une volatilité de 15 % en délivrant des dividendes représentant un taux de 1,5 %. DerivaGem montre qu'une option européenne à trois ans à la monnaie coûte 119 €. C'est plus que ce dont elle dispose pour l'acheter (86,07 €). Le coût d'une option à dix ans à la monnaie est d'environ 217 €. Cette fois, c'est moins que les fonds dont dispose la banque pour l'acheter ($1\,000 - 1\,000\,\mathrm{e}^{-0,03\times 10} = 259{,}18$ €), ce qui rend le modèle rentable. Lorsque l'échéance est portée à vingt ans, le coût de l'option est d'environ 281 €, bien moins que ce que procure le placement de 1 000 € sur vingt ans à 3 % (451,19 €), le modèle en est d'autant plus rentable.

Pour la banque, dans notre exemple, la variable essentielle est le taux de dividende. Plus celui-ci est élevé, plus le produit est rentable pour la banque. Si le taux du dividende était nul, le placement à capital garanti de l'exemple 12.1 ne pourrait pas être rentable pour la banque et ce, quelle que soit sa durée (cela découle de l'équation (11.4)).

12.2 Les stratégies impliquant une option et un actif sous-jacent

Pour simplifier, nous supposerons que l'actif sous-jacent des options traitées dans le reste du chapitre est une action (des raisonnements similaires peuvent être développés pour d'autres actifs sous-jacents). Nous calculerons également, comme il est d'usage, le profit obtenu par une stratégie en déduisant le coût initial du gain final.

Il y a de nombreuses stratégies différentes impliquant une seule option et l'action sous-jacente. Les résultats auxquels elles conduisent sont illustrés dans le graphique 12.1. Dans ce graphique, et dans les suivants, la ligne en pointillé montre la relation entre le résultat et le cours de l'action pour chaque titre constituant le portefeuille, tandis que la ligne pleine illustre la relation entre le résultat final de la stratégie dans son ensemble et le cours de l'action.



Graphique 12.1 : Profils de gains : (a) position longue sur une action et position courte sur une option d'achat ; (b) position courte sur une action et position longue sur une option d'achat ; (c) position longue sur une option de vente et position longue sur une action ; (d) position courte sur une option de vente et position courte sur une action

Dans le graphique 12.1a, le portefeuille consiste en une position longue (acheteur) sur une action et une position courte (vendeur) sur un call européen. Cette stratégie, très répandue, porte le nom de vente de call couvert ou *covered call*. En effet, la possession de l'action couvre, c'est-à-dire protège, l'investisseur du résultat de sa position courte sur l'option d'achat et devient particulièrement utile si le cours de l'action augmente brutalement. Le graphique 12.1b montre une position courte sur une action, combinée avec une position longue sur une option d'achat. C'est la stratégie symétrique de la précédente. Le graphique 12.1c suppose l'achat simultané d'un put européen et de l'action sous-jacente. Ce portefeuille est parfois qualifié de *protective put*. Dans le graphique 12.1d, une position courte sur une option de vente est combinée avec une position courte sur l'action. Le résultat est le symétrique de celui de la stratégie précédente.

Les profils de gains des graphiques 12.1a, b, c et d ont la même forme générale que ceux présentés au chapitre 10 pour, respectivement, les positions courtes sur l'option de vente, longues sur l'option de vente, longues sur l'option d'achat, et courtes sur l'option d'achat. La parité call-put fournit une explication à cette ressemblance. Cette relation s'écrit (voir chapitre 11) :

$$p + S_0 = c + K\,\mathrm{e}^{-rT} + D \tag{12.1}$$

où p désigne la valeur du put européen, S_0 le cours actuel de l'action, c la valeur du call européen, K le prix d'exercice des deux options, r le taux d'intérêt sans risque, T le temps restant à courir jusqu'à l'échéance des deux options, et D la valeur actuelle des dividendes éventuellement versés durant la vie des options.

L'équation (12.1) montre qu'une position longue sur un put combinée avec une position longue sur une action est l'équivalent d'une position longue sur un call combinée avec des liquidités d'un montant égal à $K\,\mathrm{e}^{-rT} + D$. Cela explique pourquoi le profil de gain du graphique 12.1c est identique à celui qui découle d'une simple position longue sur un call. La position du graphique 12.1d est symétrique de celle du graphique 12.1c et conduit par conséquent au profil de gain résultant d'une unique position courte sur un call.

L'équation (12.1) peut être réarrangée ainsi :

$$S_0 - c = K\,\mathrm{e}^{-rT} + D - p$$

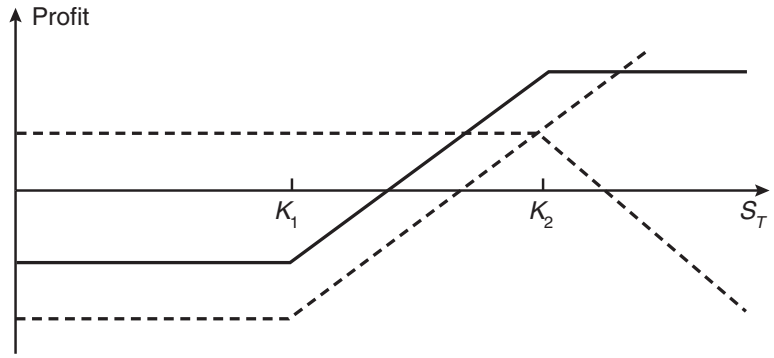
En d'autres termes, une position longue sur une action combinée avec une position courte sur un call est équivalente à une position courte sur un put, plus un montant de liquidités égal à $K\,\mathrm{e}^{-rT} + D$. Cette égalité explique pourquoi le profil de gain du graphique 12.1a est identique à celui qui résulte d'une simple position courte sur un put. La position du graphique 12.1b est symétrique de celle du graphique 12.1a, et conduit par conséquent à un profil de gain analogue à celui d'une position longue sur un put.

12.3 Les spreads

Une stratégie de spread implique de prendre une position dans au moins deux options du même type (c'est-à-dire deux options d'achat ou deux options de vente, ou davantage). Bien que le terme spread soit employé dans divers contextes, il n'a rien à voir ici avec les écarts de taux du marché obligataire.

Les bull spreads

L'un des spreads les plus populaires est le *bull spread* ou « spread haussier » (mais cette dernière expression est plus rarement utilisée). Il est constitué de l'achat d'un call à un prix d'exercice donné et de la vente d'un call à un prix d'exercice supérieur, les deux portant sur le même sous-jacent. Les deux options ont aussi la même date d'échéance. Cette stratégie est illustrée dans le graphique 12.2. Le résultat global de la stratégie bull spread est représenté par la ligne continue. Puisque la valeur d'un call diminue lorsque le prix d'exercice augmente, la valeur de l'option vendue est inférieure à celle de l'option achetée. Un bull spread, créé à partir de deux calls, nécessite donc un investissement initial.



Graphique 12.2 : Bull spread créé avec deux options d'achat

Supposons que K_1 soit le prix d'exercice du call acheté, K_2 le prix d'exercice du call vendu et S_T la valeur de l'action à date d'échéance de l'option. Le tableau 12.1 présente le flux total engendré par une stratégie de bull spread dans les différents cas qui peuvent se présenter. Si le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice, le flux obtenu est la différence entre les deux prix d'exercice, égale à $K_2 - K_1$. Si le cours de l'action à la date d'échéance se situe entre les deux prix d'exercice, le flux sera alors de $S_T - K_1$. Si, enfin, le cours de l'action est descendu trop bas à la date d'échéance, le flux sera nul. Le profit présenté dans le graphique 12.2 est calculé en soustrayant l'investissement initial. Cela explique la différence entre le calcul des flux dans le tableau 12.1 et leur représentation dans le graphique 12.2.

Tableau 12.1 : Revenus d'une stratégie de bull spread

Valeur de l'action	Revenus de la position longue sur l'option d'achat	Revenus de la position courte sur l'option d'achat	Revenus totaux
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$S_T \leq K_1$	0	0	0

Une stratégie de bull spread limite, pour l'investisseur, aussi bien les avantages en cas de hausse que les risques en cas de baisse. Dans cette stratégie, l'investisseur possède

un call avec un prix d'exercice égal à K_1 et choisit d'abandonner une partie de ses gains potentiels en vendant un call de prix d'exercice K_2 ($K_2 > K_1$). En contrepartie de ce renoncement à une partie du gain potentiel, l'investisseur reçoit le prix de l'option de prix d'exercice K_2. Trois types de bull spreads peuvent être distingués :

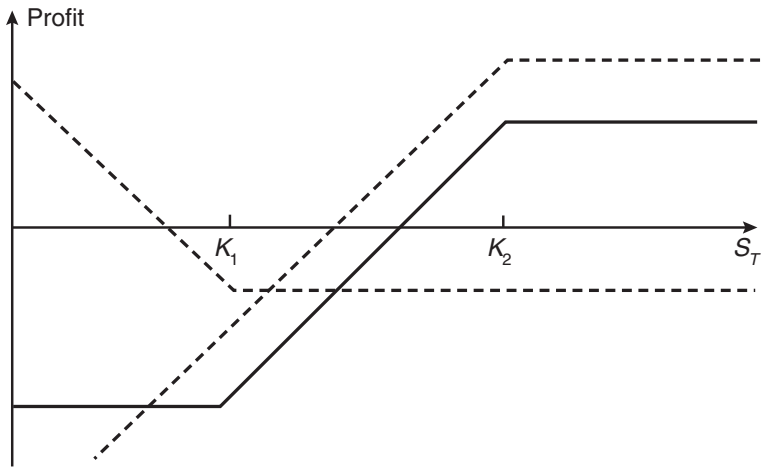
1. Ceux où, à l'origine, les deux calls sont en dehors de la monnaie ;
2. Ceux où, à l'origine, l'un des calls est dans la monnaie et l'autre en dehors ;
3. Ceux où, à l'origine, les deux calls sont dans la monnaie.

La stratégie de bull spread la plus agressive correspond au type 1. Son coût de mise en œuvre est très bas, et elle a une faible probabilité de fournir un gain élevé, limité à $K_2 - K_1$. Plus nous nous déplaçons du type 1 au type 2, et du type 2 au type 3, plus le spread devient défensif.

■ **Exemple 12.2** Un investisseur achète pour 3 € un call de prix d'exercice 30 € et vend pour 1 € un call de prix d'exercice 35 €. Le flux à l'échéance de ce bull spread est de 5 € si le cours de l'action atteint au moins 35 €, et il est nul si le cours de l'action descend en dessous de 30 €. Si le cours de l'action se situe entre 30 € et 35 € à l'échéance, le flux représente le montant duquel le cours de l'action dépasse les 30 €. Le coût de cette stratégie est de 3 € − 1 € = 2 €. Les revenus nets se présentent ainsi :

Cours de l'action	Revenu
$S_T \leq 30$	-2
$30 < S_T < 35$	$S_T - 32$
$S_T \geq 35$	3

Un bull spread peut également être créé en achetant un put avec un prix d'exercice bas et en vendant un put à un prix d'exercice plus élevé. Le graphique 12.3 présente cette combinaison.

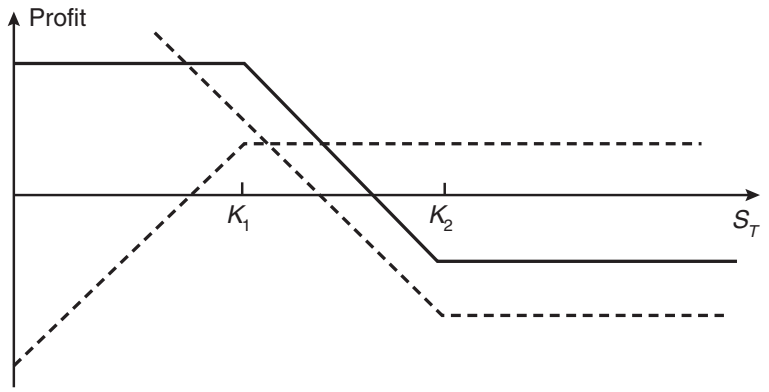


Graphique 12.3 : Bull spread créé en utilisant deux options de vente

À la différence des bull spreads construits à partir d'options d'achat, ceux qui sont créés à partir d'options de vente engendrent un flux initial positif (en ignorant les dépôts de garantie) et un flux final négatif ou nul.

Les bear spreads

Un investisseur qui crée un bull spread espère une augmentation du cours de l'action. Au contraire, un investisseur qui crée un *bear spread* ou « spread baissier » espère, quant à lui, une baisse de la valeur de l'action. Comme un bull spread, un bear spread peut être composé en achetant un put européen avec un certain prix d'exercice et en vendant un autre put européen à un prix d'exercice différent. Cependant, dans le cas du bear spread, le prix d'exercice de l'option achetée est supérieur au prix d'exercice de l'option vendue. Dans le graphique 12.4, le résultat de cette stratégie est exprimé par la ligne continue. Un bear spread créé à l'aide de deux options de vente engendre un flux initial négatif, parce que le prix de l'option achetée est supérieur au prix de l'option vendue.



Graphique 12.4 : Bear spread créé en utilisant deux options de vente

En supposant que les prix d'exercice sont K_1 et K_2, avec $K_1 < K_2$, le tableau 12.2 montre le flux réalisé à l'échéance par un bear spread dans les différents cas possibles. Si le cours de l'action est supérieur à K_2, le flux est nul. Si le cours de l'action est inférieur à K_1, le flux est égal à $(K_2 - K_1)$. Enfin, si le cours de l'action est compris entre K_1 et K_2, le flux est égal à $K_2 - S_T$. Le résultat global est calculé en prenant en compte le flux initial. Cela explique la différence entre le calcul des flux dans le tableau 12.2 et leur représentation dans le graphique 12.4.

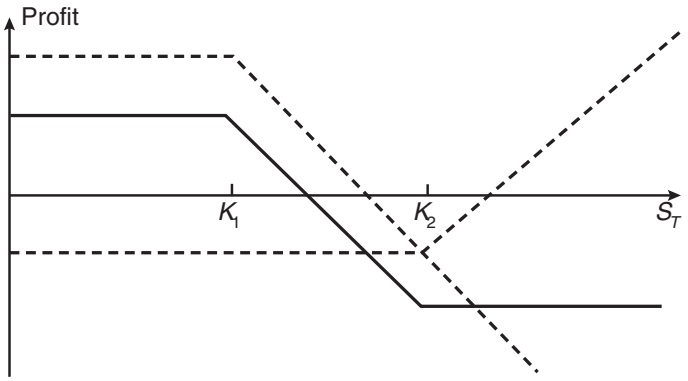
Tableau 12.2 : Revenus d'une stratégie de bear spread

Valeur de l'action	Revenus de la position longue sur le put	Revenus de la position courte sur le put	Revenus totaux
$S_T \leq K_1$	$K_2 - S_T$	$-(K_1 - S_T)$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$K_2 - S_T$	0	$K_2 - S_T$
$S_T \geq K_2$	0	0	0

■ **Exemple 12.3** Un investisseur achète pour 3 € une option de vente européenne de prix d'exercice 35 € et vend pour 1 € une option de vente européenne de prix d'exercice 30 €. Le flux à l'échéance de ce bear spread est nul si le cours de l'action atteint au moins 35 €, et de 5 € si le cours de l'action descend en dessous de 30 €. Si le cours de l'action se situe entre 30 € et 35 € à l'échéance, le revenu est égal à $35 - S_T$. Cette stratégie coûte initialement $1 € - 3 € = -2 €$. Les revenus globaux sont donc définis ainsi :

Cours de l'action	Revenu
$S_T \leq 30$	3
$30 < S_T < 35$	$33 - S_T$
$S_T \geq 35$	-2

Comme un bull spread, une stratégie de bear spread limite aussi bien les gains potentiels de l'investisseur que son risque de pertes. Les bear spreads peuvent également être créés en utilisant des options d'achat à la place d'options de vente. L'investisseur achète un call avec un prix d'exercice élevé et en vend un dont le prix d'exercice est inférieur. Ce montage est illustré dans le graphique 12.5. Les bear spreads créés à partir d'options d'achat procurent un flux initial positif (en ignorant le dépôt de garantie).



Graphique 12.5 : Bear spread créé en utilisant deux options d'achat

Les box spreads

Un box spread est la combinaison d'un bull spread fondé sur des calls de prix d'exercice K_1 et K_2 et d'un bear spread fondé sur des puts de même prix d'exercice que les calls. Le tableau 12.3 donne les flux terminaux engendrés par cette stratégie. Ils sont toujours égaux à $K_2 - K_1$. La valeur initiale d'un box spread est donc toujours égale à la valeur actuelle de la différence $K_2 - K_1$. Si ce n'était pas le cas, cela révélerait une opportunité d'arbitrage. Si, par exemple, le prix est plus faible, il faut acheter cette stratégie. Cela revient à acheter un call de prix d'exercice K_1, acheter un put de prix d'exercice K_2, vendre un call de prix d'exercice K_2, et enfin acheter un put de prix d'exercice K_1. Si le prix de la stratégie est plus élevé que le prix théorique, on adopte la stratégie symétrique.

Tableau 12.3 : Revenus d'une stratégie de box spread

Valeur de l'action	Revenus du bull spread	Revenus du bear spread	Revenus totaux
$S_T \geq K_2$	$K_2 - K_1$	0	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$S_T \leq K_1$	0	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$

Il est important de noter qu'un arbitrage de ce type ne fonctionne qu'avec des options européennes. Or, la plupart des options négociées sur les marchés sont américaines. Comme le montre l'encadré 12.1, des traders inexpérimentés qui traitent des options américaines comme des options européennes vont au-devant de surprises désagréables.

Encadré 12.1 Comment perdre de l'argent avec des box spreads

Supposons qu'une action cote 50 € avec une volatilité de 30 %. Aucun dividende n'est attendu et le taux sans risque est de 8 %. Un trader vous offre l'opportunité de vendre sur le MONEP un box spread à 2 mois, au prix de 5,10 € avec des prix d'exercice de 55 € et 60 €. Profitez-vous de cette occasion ?

Cette transaction est attractive puisque la valeur terminale est à coup sûr 5 € dans deux mois. Vous encaissez 5,10 € immédiatement et vous les placez au taux sans risque, ce qui vous permettra sans difficulté de payer les 5 € dans deux mois. En fait, la valeur théorique du box spread devrait être égale à :

$$5 \times e^{-0,08 \times 2/12} = 4,93 \text{ €}$$

Malheureusement, il y a un truc ! Ces options sont américaines et la valeur théorique que nous venons de calculer fait l'hypothèse qu'elles sont européennes. Les « vrais » prix théoriques, tenant compte du caractère américain, sont donnés dans le tableau ci-dessous. Le bull spread vaut en fait :

$$0,96 - 0,26 = 0,70 \text{ €}$$

Il n'y a pas de différence ici entre options américaines et européennes, car il s'agit de calls et le sous-jacent ne paie pas de dividendes (voir chapitre 11).

Le bear spread vaut 4,23 € si les options sont européennes, mais $10,00–5,44 = 4,56$ € si les options sont américaines (vous pouvez vérifier en utilisant DerivaGem). En conséquence, la valeur du box spread américain est égale à :

$$0,70 + 4,56 = 5,26 \text{ €}$$

Le vendre à 5,10 € n'est donc pas une bonne affaire. Vous pourriez d'ailleurs vous en rendre compte très vite, car le put de prix d'exercice 60 € que vous auriez vendu serait exercé immédiatement par l'acheteur !

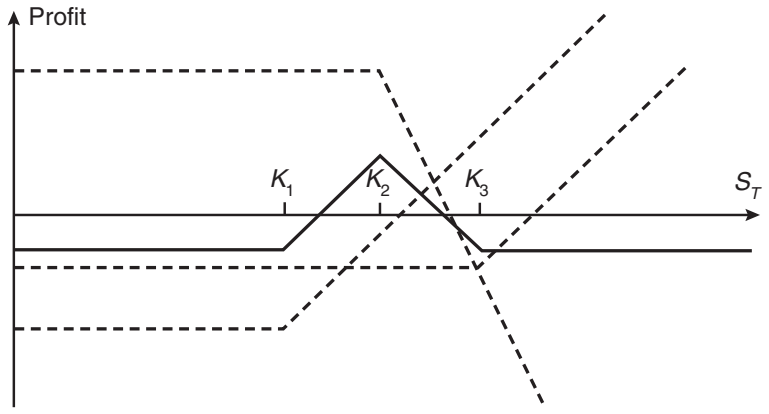
Revenus d'une stratégie de bear spread créé à l'aide de puts

Type d'option	Prix d'exercice	Option européenne	Option américaine
Call	60	0,26	0,26
Call	55	0,96	0,96
Put	60	9,46	10,00
Put	55	5,23	5,44

Les butterfly spreads

Un *butterfly spread* ou « spread papillon » implique des positions sur des options de trois prix d'exercice différents. Il peut être créé en achetant un call au prix d'exercice bas K_1, en achetant un call au prix d'exercice plus élevé K_3 et en vendant deux calls de prix d'exercice K_2, situé entre K_1 et K_3.

Généralement, K_2 est proche du cours actuel de l'action. Le profil de gain de cette stratégie est représenté dans le graphique 12.6.



Graphique 12.6 : Butterfly spread créé en utilisant des options d'achat

Un butterfly spread produit un bénéfice si le cours de l'action reste proche de K_2, mais conduit à de faibles pertes si le cours de l'action varie de façon significative à la hausse comme à la baisse. C'est, par conséquent, une stratégie judicieuse pour un investisseur qui pense qu'une variation importante du cours est improbable. En outre, cette stratégie ne requiert qu'un faible investissement initial. Les résultats à l'échéance d'un butterfly spread sont récapitulés dans le tableau 12.4.

Tableau 12.4 : Revenus d'un butterfly spread

Prix d'exercice	Revenu de l'achat du premier call	Revenu de l'achat du second call	Revenu de la vente des deux calls	Revenu global*
$S_T \leq K_1$	0	0	0	0
$K_1 < S_T \leq K_2$	$S_T - K_1$	0	0	$S_T - K_1$
$K_2 < S_T < K_3$	$S_T - K_1$	0	$-2\,(S_T - K_2)$	$K_3 - S_T$
$S_T \geq K_3$	$S_T - K_1$	$S_T - K_3$	$-2\,(S_T - K_2)$	0

* Ces revenus sont calculés sur la base $K_2 = 0{,}5\,(K_1 + K_3)$.

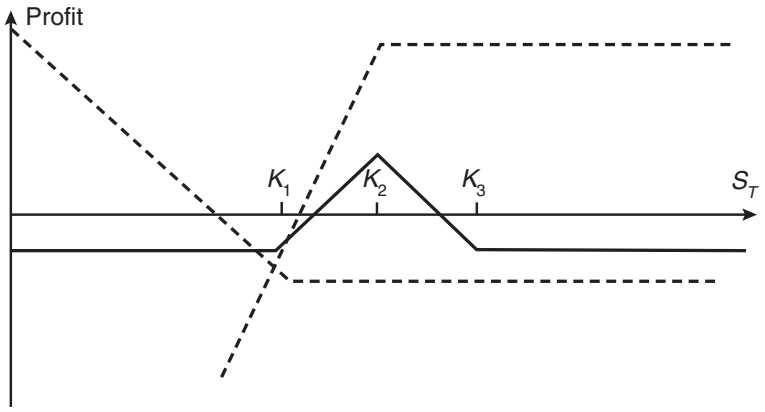
Supposons qu'une action cote aujourd'hui 61 € et considérons un investisseur estimant qu'une variation significative du cours est fort improbable. Les prix des calls d'échéance 6 mois sont les suivants :

Prix d'exercice (€)	Valeur de l'option d'achat (€)
55	10
60	7
65	5

L'investisseur pourrait créer un butterfly spread en achetant un call de prix d'exercice 55 €, un call de prix d'exercice 65 €, et en vendant deux calls de prix d'exercice 60 €. Le coût initial est 10 € + 5 € $-(2 \times 7$ €) = 1 €. Si le cours de l'action dans six mois est supérieur à 65 € ou inférieur à 55 €, le flux final du spread est nul et l'investisseur supporte une perte nette de 1 €. Si le cours de l'action reste entre 56 € et 64 €, il réalise un bénéfice net. Au maximum, son bénéfice sera de 4 € si le cours de l'action est à 60 € dans six mois.

Les butterfly spreads peuvent être réalisés à l'aide d'options de vente. L'investisseur achète un put au prix d'exercice bas, achète également un put à un prix d'exercice plus élevé et vend deux puts de prix d'exercice intermédiaire. Ce montage est illustré dans le graphique 12.7. En reprenant l'exemple précédent, le butterfly spread pourrait être effectué en achetant deux puts de prix d'exercice respectifs 55 € et 65 €, et en vendant deux puts de prix d'exercice 60 €. Si toutes les options sont européennes, l'utilisation de puts conduit au même spread qu'avec les options d'achat. La parité call-put peut être utilisée pour montrer que l'investissement initial est le même dans les deux cas.

Un butterfly spread peut être vendu ou constitué en position courte en suivant la stratégie opposée. Des options sont vendues avec les prix d'exercice K_1 et K_3, et deux options de prix d'exercice intermédiaire K_2 sont achetées. Cette stratégie procure un modeste bénéfice en cas de variation significative du cours de l'action.

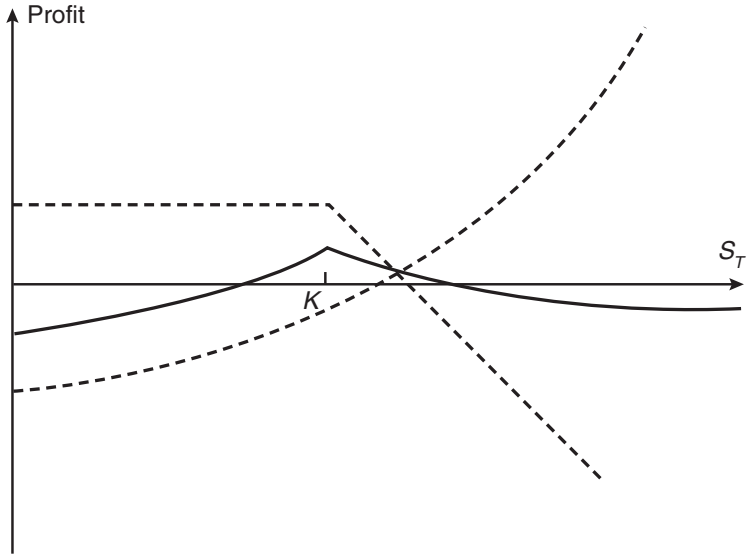


Graphique 12.7 : Butterfly spread créé en utilisant des options de vente

Les calendar spreads

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les options composant les spreads arrivaient toutes à échéance à la même date. Nous allons maintenant présenter les *calendar spreads* ou « spreads calendaires » dans lesquels les options ont le même prix d'exercice mais des dates d'échéance différentes.

Un calendar spread peut être réalisé en vendant un call de prix d'exercice donné et en achetant un call de même prix d'exercice mais dont la date d'échéance est plus éloignée. Plus la durée de vie de l'option est longue, plus son prix est en général élevé. Par conséquent, un spread calendaire nécessite un investissement initial. Les diagrammes de payoffs des spreads calendaires sont le plus souvent présentés de façon à traduire les payoffs à la première date d'échéance, en supposant que l'option à échéance longue est revendue à cette date. Le profil de gain d'un calendar spread composé de deux options d'achat est présenté dans le graphique 12.8. Ce modèle ressemble à celui du butterfly spread du graphique 12.6. L'investisseur réalise un bénéfice si le cours de l'action à l'échéance de l'option à courte maturité est proche du prix d'exercice de cette même option. Cependant, une perte est constatée si le cours de l'action s'éloigne significativement de ce prix d'exercice, que ce soit à la hausse ou à la baisse.

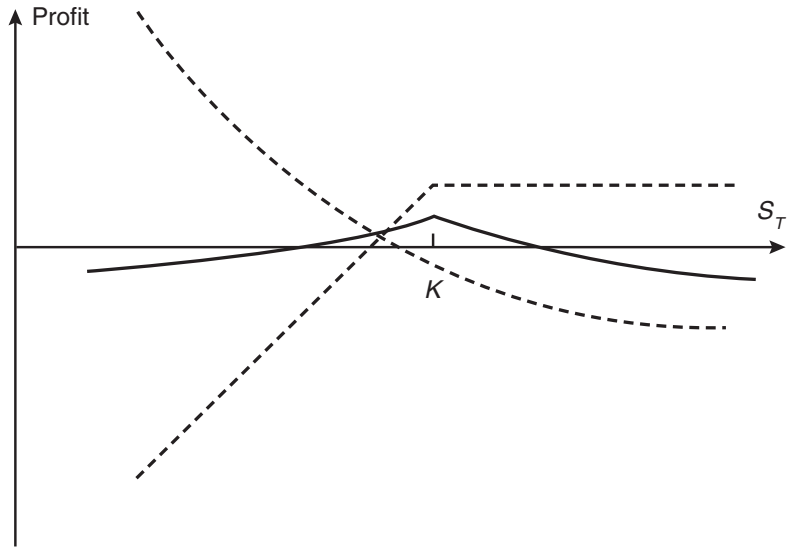


Graphique 12.8 : Calendar spread créé en utilisant deux options d'achat

Pour bien comprendre le profil de gain d'un spread calendaire, considérons d'abord le cas où le cours de l'action est très bas lorsque l'option à maturité courte arrive à échéance. Cette option est alors sans valeur, et la valeur de l'option à maturité plus longue est proche de zéro. Par conséquent, les investisseurs subissent une perte qui est proche du coût initial de la stratégie. En revanche, lorsque le cours de l'action, S_T, à l'échéance de la première option, est très élevé, la position vendeur sur l'option à maturité courte coûte $S_T - K$ à l'investisseur, et l'option à maturité longue (en supposant qu'un exercice anticipé ne soit pas optimal) vaut un peu plus que $S_T - K$ (K étant le prix d'exercice des options). De nouveau, l'investisseur subit une perte nette qui est proche du coût initial nécessaire au montage de la stratégie. Si S_T est proche de K, l'option à maturité courte ne coûte finalement presque rien à l'investisseur. Cependant, l'option à maturité longue conserve une valeur encore importante. Ainsi, dans ce cas, un bénéfice peut être réalisé.

Dans un *neutral calendar spread* ou « spread calendaire neutre » le prix d'exercice est choisi très proche du cours actuel de l'action. Un *bullish calendar spread* ou « spread calendaire haussier » implique le choix d'un prix d'exercice supérieur au cours de l'action. Enfin, un *bearish calendar spread* ou « spread calendaire baissier » exprime le choix d'un prix d'exercice inférieur au cours actuel de l'action.

Les spreads calendaires peuvent être créés aussi bien avec des options de vente qu'avec des options d'achat. L'investisseur achète simplement une option de vente à maturité longue et vend une option de vente à maturité courte. Comme le montre le graphique 12.9, le profil de gain est identique à celui qui est obtenu en utilisant des options d'achat.



Graphique 12.9 : Calendar spread créé en utilisant deux options de vente

Un *reverse calendar spread* ou « spread calendaire inversé » est l'opposé de ce que montrent les graphiques 12.8 et 12.9. L'investisseur achète une option de maturité courte et vend une option de maturité longue. Un faible gain est obtenu si le cours de l'action, à l'échéance de l'option courte, est bien au-dessus ou bien en dessous du prix d'exercice des options. Cependant, l'investisseur subit une perte si le cours de l'action reste proche de ce prix d'exercice.

Les diagonal spreads

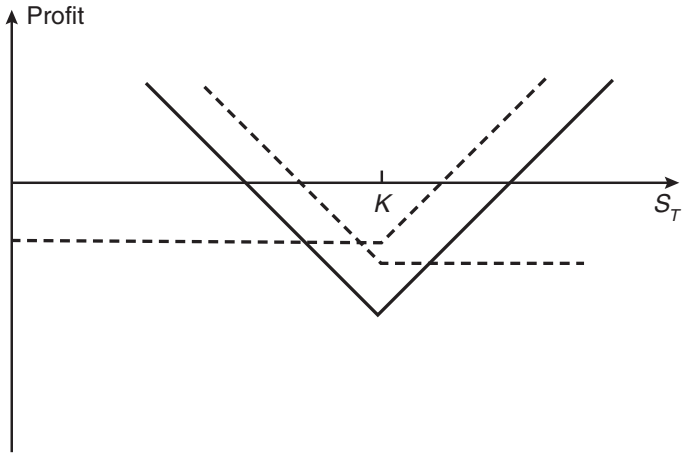
Les bull, bear et calendar spreads peuvent tous être créés en achetant une option d'achat et en vendant une autre option d'achat. Dans les cas des bull et bear spreads, les options d'achat ont différents prix d'exercice, mais la même échéance. Pour les calendar spreads, les options d'achat ont le même prix d'exercice, mais des maturités différentes. Dans le cas des *diagonal spreads*, ce sont à la fois les dates d'échéance et les prix d'exercice qui diffèrent. Cela augmente évidemment la gamme de profils de gains possibles.

12.4 Les combinaisons

Une combinaison est une stratégie impliquant des prises de position à la fois dans des options d'achat et des options de vente sur la même action sous-jacente. Nous présentons ici les *straddles*, les *strips*, les *straps* et les *strangles*.

Les straddles

L'une des combinaisons les plus connues est le straddle, qui consiste en l'achat d'un call et d'un put de même prix d'exercice et de même date d'échéance. Le profil de gain est présenté dans le graphique 12.10. Le prix d'exercice est noté K. Si le cours de l'action est proche du prix d'exercice à la date d'échéance des options, le straddle conduit à une perte. Toutefois, s'il y a une variation suffisante du cours de l'action, dans un sens ou dans l'autre, un gain significatif sera réalisé. Les flux à l'échéance d'un straddle sont présentés dans le tableau 12.5.



Graphique 12.10 : Un straddle

Une stratégie de straddle est bien appropriée lorsque l'investisseur anticipe une importante variation du cours de l'action, mais qu'il ne sait pas dans quel sens elle va se produire. Considérons par exemple un investisseur pensant que la valeur d'une action, actuellement cotée 69 €, va varier de façon significative dans les trois prochains mois. L'investisseur peut alors réaliser un straddle en achetant à la fois un call et un put de prix d'exercice 70 € et d'échéance 3 mois. Supposons que le call coûte 4 € et le put 3 €. Si le cours de l'action reste à 69 €, il est facile de déduire que cette stratégie aura coûté 6 €

à l'investisseur (l'investissement initial de 7 €, moins la valeur du put, 1 €, sachant que le call expire sans valeur). Si le cours de l'action monte à 70 €, c'est alors une perte de 7 € qu'il subira (dans le pire des cas). En revanche, si le cours de l'action s'envole à 90 €, c'est un gain de 13 € qui est réalisé. De même, si le cours chute jusqu'à 55 €, l'investisseur encaissera un profit de 8 €. L'investisseur devrait examiner avec soin si les prix des options reflètent déjà la variation qu'il prévoit avant de mettre en place un straddle (voir encadré 12.2).

Tableau 12.5 : Revenus d'un straddle à l'échéance

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$S_T \leq K$	0	$K - S_T$	$K - S_T$
$S_T > K$	$S_T - K$	0	$S_T - K$

Encadré 12.2 Comment gagner de l'argent avec un straddle ?

Supposons qu'une forte variation du cours des actions d'une entreprise soit prévue en raison de l'annonce imminente d'une OPA ou de l'issue d'un procès majeur impliquant la société. Devriez-vous constituer un straddle ?

Un straddle semble être une stratégie naturellement adaptée dans ce cas. Toutefois, si votre analyse de la situation de l'entreprise est bien la même que celle des autres agents sur le marché, cela se reflétera également dans la valeur des options. Les options sur ces actions seront significativement plus chères que les options sur des actions identiques, mais pour lesquelles aucune variation n'est attendue. Le modèle de profit en forme de V du straddle du graphique 12.10 sera déplacé vers le bas, de sorte qu'une variation du cours des actions bien plus importante sera nécessaire pour qu'un profit soit réalisable.

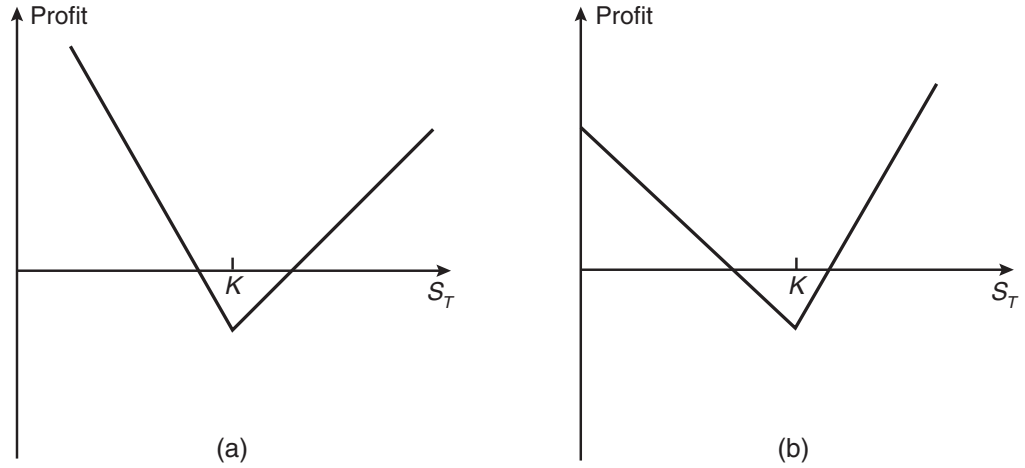
Pour qu'un straddle soit une stratégie efficace, l'investisseur doit sélectionner des options sur des actions pour lesquelles il envisage une variation importante, mais, surtout, ces anticipations ne doivent pas être partagées par les autres intervenants du marché. Ainsi, pour gagner de l'argent grâce à une stratégie d'investissement, quelle qu'elle soit, vous devez avoir une vision différente de celle de la plupart des autres acteurs du marché – et vous devez avoir raison !

Le straddle du graphique 12.10 est parfois qualifié par les expressions anglo-saxonnes *bottom straddle* ou *straddle purchase*. Un *top straddle* ou *straddle write* consiste en une position inverse. Il est réalisé en vendant à la fois un call et un put, toujours avec le même prix d'exercice et la même date d'échéance. C'est une stratégie très risquée. Si le cours

de l'action est voisin du prix d'exercice à la date d'échéance, un bénéfice significatif est réalisé. En revanche, les pertes engendrées par une forte variation du cours de l'action sont théoriquement illimitées.

Les strips et les straps

Un strip consiste en une position longue sur un call et sur deux puts de prix d'exercice et de dates d'échéance identiques. Un strap est une position longue sur deux calls et sur un put de mêmes prix d'exercice et de mêmes dates d'échéance. Les profils de gains des strips et des straps apparaissent dans le graphique 12.11. Dans un strip, l'investisseur parie sur une forte variation du cours de l'action, mais estime qu'elle est plus probable à la baisse qu'à la hausse. Dans un strap, l'investisseur parie également sur une forte variation de la valeur de l'action. Mais dans ce cas, il joue surtout une augmentation du cours de l'action.



Graphique 12.11 : Modèles de revenus d'un (a) strip et d'un (b) strap

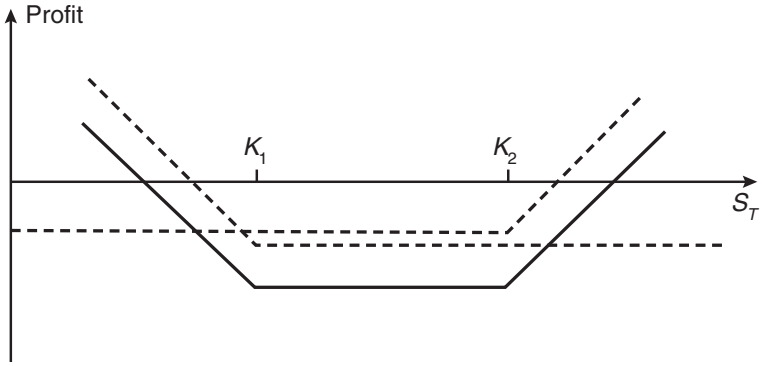
Les strangles

Dans un strangle, parfois appelé *bottom vertical combination*, un investisseur achète un put et un call de mêmes dates d'échéance, mais avec des prix d'exercice différents. Le profil de gain obtenu est présenté dans le graphique 12.12. Le prix d'exercice du call, K_2, est plus élevé que celui du put, K_1. Les flux à l'échéance sont calculés dans le tableau 12.6.

Tableau 12.6 : Revenus d'un strangle à l'échéance

Prix d'exercice	Revenu du call à l'échéance	Revenu du put à l'échéance	Revenu global à l'échéance
$S_T \leq K_1$	0	$K_1 - S_T$	$K_1 - S_T$
$K_1 < S_T < K_2$	0	0	0
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_2$	0	$S_T - K_2$

Un strangle est une stratégie semblable au straddle. L'investisseur parie cependant sur une variation plus importante du cours de l'action. Si l'on compare les graphiques 12.12 et 12.10, on constate en effet que le cours de l'action doit varier beaucoup plus dans un strangle que dans un straddle pour que l'investisseur fasse un bénéfice. Cependant, la perte, si le cours de l'action reste dans les valeurs centrales, est inférieure dans un strangle car l'investissement initial est moins élevé.



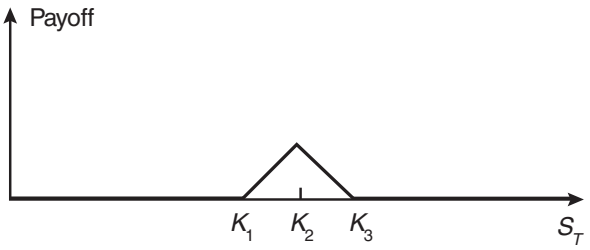
Graphique 12.12 : Un strangle

Le profil de gain d'un strangle dépend de la valeur séparant les deux prix d'exercice. Plus les prix d'exercice sont éloignés, plus l'amplitude de la perte est faible et plus la variation du cours de l'action devra être forte pour espérer engendrer un bénéfice.

La vente d'un strangle est parfois appelée *top vertical combination.* Elle peut se révéler judicieuse pour un investisseur qui estime qu'une forte variation du cours de l'action est improbable. Néanmoins, comme pour la vente d'un straddle, c'est une stratégie risquée qui comporte un potentiel de perte illimité pour l'investisseur.

12.5 Les autres profils de gains

Ce chapitre a simplement illustré quelques-unes des possibilités d'utilisation des options pour engendrer des profils de gains variés. Si des options européennes d'échéance T sont disponibles pour n'importe quel prix d'exercice, tous les profils de flux à la date T sont théoriquement possibles. L'illustration la plus simple de cette éventualité consiste en une série de butterfly spreads. Rappelons qu'un butterfly spread est créé en achetant deux options de prix d'exercice K_1 et K_3 et en vendant deux options de prix d'exercice K_2, avec $K_1 < K_2 < K_3$ et $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Le graphique 12.13 montre le flux à l'échéance d'un butterfly spread. Ce schéma peut être décrit comme un pic. Plus K_1 et K_3 se rapprochent l'un de l'autre, plus le pic devient aigu. Grâce à une combinaison judicieuse d'un grand nombre de ces pics, n'importe quelle fonction de payoff peut être approximée.



Graphique 12.13 : Le revenu à l'échéance d'un butterfly spread

Résumé

Un placement à capital garanti peut être créé à partir d'une obligation zéro-coupon et d'une option d'achat européenne. C'est un produit attractif pour certains investisseurs, car son émetteur garantit à l'acheteur qu'il obtiendra au minimum son capital de départ, quelle que soit la performance de l'actif sous-jacent de l'option.

De nombreuses stratégies impliquent une seule option combinée avec l'action sous-jacente. Par exemple, la stratégie de call couvert nécessite l'achat d'une action et la vente d'un call sur cette action ; tandis qu'une stratégie de protective put demande l'achat d'un put et d'une action. La première se rapproche de l'achat d'un put, la seconde de l'achat d'un call.

Les spreads comportent une position dans une ou plusieurs options d'achat, ou une position dans une ou plusieurs options de vente. Un bull spread peut être réalisé en achetant un call (put) de prix d'exercice bas et en vendant un autre call (put) de prix d'exercice plus élevé. Un bear spread peut, quant à lui, être réalisé en achetant un call (put) de prix d'exercice élevé et en vendant un call (put) de prix d'exercice plus bas. La création d'un butterfly spread implique l'achat de deux calls (puts) de prix d'exercice bas et haut et la vente de deux calls (puts) de prix d'exercice intermédiaire. Un calendar spread comprend la vente d'un call (put) de maturité courte et l'achat d'un call (put) d'une durée de vie plus longue. La réalisation d'un diagonal spread suppose une position longue dans une option et une position courte dans une autre option alors que les prix d'exercice sont différents, tout comme le sont les dates d'échéance.

Les combinaisons comportent une position avec des calls et des puts sur la même action. Une combinaison dite straddle implique d'acheter un call et un put de mêmes prix d'exercice et de dates d'échéance identiques. Un strip consiste à acheter un call et deux puts avec les mêmes prix d'exercice et les mêmes dates d'échéance. Un strap consiste, lui, à acheter deux calls et un put avec les mêmes prix d'exercice et des durées de vie égales. Il y a de nombreux autres moyens d'utiliser des options pour obtenir des bénéfices substantiels à l'échéance. Il n'est donc pas surprenant de constater l'engouement toujours croissant pour les marchés d'options et la fascination qu'ils exercent sur les investisseurs.

Références complémentaires

Bharaadwaj A. et J. B. Wiggins, "Box Spread and Put-Call Parity Test for the S&P Index LEAPS Markets", *Journal of Derivatives*, 8 (4), été 2001, 62-71.

CHAPUT J. S. et L. H. EDERINGTON, "Option Spread and Combination Trading", *Journal of Derivatives*, 10 (4), été 2003, 70-88.

MCMILLAN L. G., *McMillan on Options*, 2^e éd., Wiley, Hoboken, NJ, 2004.

RENDLEMAN R. J., "Covered Call Writing from an Expected Utility Perspective", *Journal of Derivatives*, 8 (3), printemps 2001, 63-75.

RONN A. G. et E. I. RONN, "The Box Spread Arbitrage Conditions", *Review of Financial Studies*, 2 (1), 1989, 91-108.

Problèmes et exercices

12.1 Qu'entend-on par protective put ? Quelle position en options d'achat est équivalente à un protective put ?

12.2 Donnez deux façons de réaliser un bear spread.

12.3 Dans quel cas est-il judicieux pour un investisseur d'acheter un butterfly spread ?

12.4 Des calls sur actions sont disponibles avec des prix d'exercice de 15 €, 17,50 € et 20 € et des échéances à 3 mois. Leurs prix sont respectivement de 4 €, 2 € et 0,50 €. Expliquez de quelle manière les options peuvent être utilisées pour créer un butterfly spread. Construisez un tableau montrant comment les revenus de ce butterfly spread varient en fonction du cours de l'action.

12.5 Quelle stratégie crée un reverse calendar spread ?

12.6 Quelle est la différence entre un strangle et un straddle ?

12.7 Un call de prix d'exercice 50 € coûte 2 €. Un put de prix d'exercice 45 € coûte 3 €. Expliquez de quelle manière on peut réaliser un strangle à partir de ces options. Quel est le profil de gain de ce strangle ?

12.8 Utilisez la parité call-put pour établir une relation entre l'investissement initial pour un bull spread créé à l'aide de calls et l'investissement initial pour un bull spread créé à l'aide de puts.

12.9 Expliquez comment on peut réaliser un bear spread agressif à l'aide d'options de vente.

12.10 Supposons que des options de vente sur une action avec des prix d'exercice de 30 € et 35 € coûtent respectivement 4 € et 7 €. Comment ces options peuvent-elles être utilisées pour créer (a) un bull spread et (b) un bear spread ? Construisez un tableau qui montre les résultats obtenus à l'échéance pour chacun de ces spreads.

12.11 Utilisez la parité call-put pour montrer que le coût d'un butterfly spread créé à l'aide de puts européens est identique à celui qui est créé à l'aide de calls européens.

12.12 Un call de prix d'exercice 60 € coûte 6 €. Un put de même prix d'exercice et de même date d'échéance coûte 4 €. Construisez le tableau qui montre les résultats d'un straddle. Pour quelles valeurs de l'action le straddle conduira-t-il à une perte ?

12.13 Présentez un tableau montrant le résultat à l'échéance d'un bull spread si l'on utilise des options de vente avec des prix d'exercice K_1 et K_2 ($K_2 > K_1$).

12.14 Un investisseur pense que le cours d'une action va connaître une forte et brutale variation, mais il ne sait pas si elle sera positive ou négative. Identifiez six stratégies différentes que l'investisseur peut suivre pour en profiter et expliquez leurs différences.

12.15 Comment peut-on, à l'aide d'options, créer un contrat forward sur une action avec un prix d'exercice et une date d'échéance donnés ?

12.16 « Un box spread comprend quatre options. Deux peuvent être combinées pour créer une position longue sur un forward et les deux autres pour créer une position courte sur un forward. » Commentez cette affirmation.

12.17 Quel est le résultat engendré par un strangle dont le prix d'exercice du put serait plus élevé que celui du call ?

12.18 Une devise étrangère vaut actuellement 0,64 €. Un butterfly spread à 1 an est créé à l'aide d'options d'achat européennes avec des prix d'exercice de 0,60 €, 0,65 € et 0,70 €. Les taux d'intérêt sans risque en France et dans le pays étranger sont respectivement de 5 % et 4 %, et la volatilité du taux de change est de 15 %. Utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer le coût de mise en place du butterfly spread. Montrez que ce coût est le même si ce sont des options de vente européennes qui sont utilisées à la place des options d'achat.

12.19 Un indice offre un taux de dividendes de 1 % et a une volatilité de 20 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 4 %. Quelle doit être la durée de vie d'un placement à capital garanti, tel que celui de l'exemple 12.1, pour qu'il soit rentable pour la banque qui le commercialise ? Utilisez DerivaGem.

12.20 Expliquez la phrase de la fin de la section 12.1, qui affirme que lorsque les dividendes sont nuls, le placement à capital garanti ne peut pas être rentable pour la banque, et ce quelle que soit sa durée.

Questions complémentaires

12.21 Un trader crée un bear spread par la vente d'un put à 6 mois et de prix d'exercice 25 € pour 2,15 € et l'achat d'un put à 6 mois de prix d'exercice 29 € pour 4,75 €. Quel est l'investissement initial ? Quel est le payoff total (hors investissement initial) si le prix de l'action dans 6 mois est de (a) 23 €, (b) 28 € et (c) 33 €.

12.22 Un trader compose un strangle par la vente d'un call européen à 6 mois de prix d'exercice 50 € pour 3 € et la vente d'un put européen à 6 mois de prix d'exercice 40 € pour 4 €. Pour quel intervalle de valeur de l'actif sous-jacent dans 6 mois le trader réalisera-t-il un gain ?

12.23 Trois options de vente sur une action ont la même date d'échéance et des prix d'exercice de 55 €, 60 € et 65 €. Leurs prix sur le marché sont respectivement de 3 €, 5 € et 8 €. Expliquez de quelle manière réaliser un butterfly spread. Construisez un tableau présentant les bénéfices d'une telle stratégie. Pour quelles valeurs de l'action le butterfly spread entraînera-t-il une perte ?

12.24 Un diagonal spread est créé en achetant un call de prix d'exercice K_2 et de date d'échéance T_2 et en vendant un call de prix d'exercice K_1 et de date d'échéance T_1, avec $T_2 > T_1$. Dessinez un graphique montrant les résultats de cette stratégie lorsque (a) $K_2 > K_1$ et (b) $K_2 < K_1$.

12.25 Construisez un graphique présentant les variations des gains et pertes d'un investisseur en fonction de la valeur de l'action à l'échéance pour les portefeuilles suivants :

a. une action et une position courte sur un call ;

b. deux actions et une position courte sur un call ;

c. une action et une position courte sur deux calls ;

d. une action et une position courte sur quatre calls.

Dans chaque cas, vous supposerez que le call a un prix d'exercice égal à la valeur de l'action au moment de la prise de position.

12.26 Supposons que la valeur d'une action ne versant pas de dividendes soit 32 €, sa volatilité 30 % et le taux d'intérêt sans risque, quelles que soient les échéances, 5 % par an. Utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer le coût de réalisation des positions qui suivent. Dans chaque cas, établissez un tableau présentant la relation entre les revenus et le cours de l'action. Négligez l'impact de l'actualisation.

a. Un bull spread utilisant des calls européens de prix d'exercice 25 € et 30 € et d'échéance 6 mois.

b. Un bear spread utilisant des puts européens de prix d'exercice 25 € et 30 € et d'échéance 6 mois.

c. Un butterfly spread utilisant des calls européens de prix d'exercice 25 €, 30 € et 35 € et d'échéance 1 an.

d. Un butterfly spread utilisant des puts européens de prix d'exercice 25 €, 30 € et 35 € et d'échéance 1 an.

e. Un straddle utilisant des options de prix d'exercice 30 € et d'échéance 6 mois.

f. Un strangle utilisant des options de prix d'exercice 25 € et 35 € et d'échéance 6 mois.

12.27 Quelle position est créée en combinant une position longue sur un strangle et une position courte sur un straddle, si tous deux ont la même échéance ? On suppose que le prix d'exercice du straddle est à mi-chemin des deux prix d'exercice du strangle.

12.28 Décrire la position créée par l'achat d'un call de prix d'exercice K_2 et la vente d'un put de prix d'exercice K_1 lorsque les deux ont la même maturité et que $K_2 > K_1$. Que devient cette position si $K_1 = K_2$?

12.29 Une banque décide de créer un placement à capital garanti à 5 ans portant sur une action ne versant pas de dividendes en offrant aux investisseurs une obligation zéro-coupon assortie d'un bull-spread composé de calls. Le taux sans risque est de 4 % et la volatilité du cours de l'action est de 25 %. L'option du bull-spread dont le prix d'exercice est inférieur est supposée à la monnaie. Si, pour le bull-spread, on calcule le ratio du prix d'exercice supérieur par rapport au prix d'exercice inférieur, quel peut être le ratio maximum ? Utilisez DerivaGem.

Chapitre 13
Les arbres binomiaux

L'approche la plus pédagogique, et donc la plus populaire, pour évaluer les options sur actions, s'appuie sur la représentation de l'évolution du cours de l'action par un arbre binomial. Il s'agit d'un graphe représentant les différentes trajectoires du cours du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. L'hypothèse sous-jacente est que le cours de l'action suit une marche aléatoire. À chaque période, ce cours a une probabilité donnée de varier d'un pourcentage défini. Lorsque la durée de chacune des périodes tend vers 0, ce modèle est identique à celui de Black-Scholes-Merton, que nous présenterons au chapitre 15. En effet, dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons que le prix de l'option européenne obtenue à l'aide du modèle binomial converge vers le prix obtenu par le modèle de Black-Scholes-Merton, au fur et à mesure que la durée des sous-périodes se réduit.

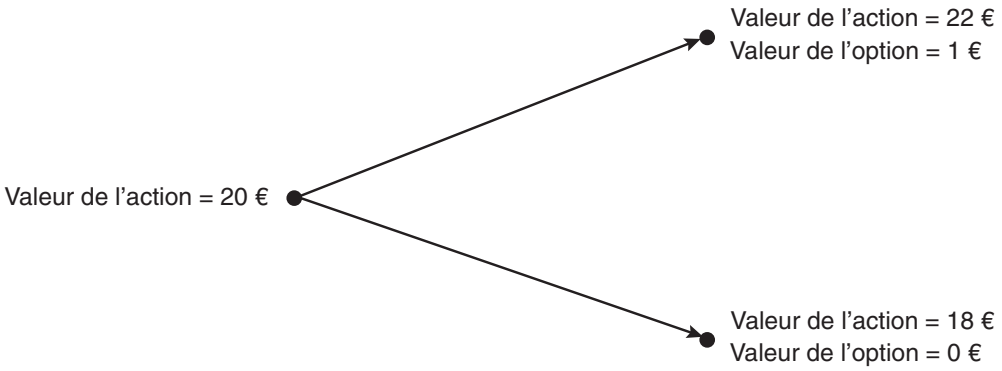
Le contenu de ce chapitre est important pour un certain nombre de raisons. Premièrement, il explique la nature des arguments d'absence d'arbitrage, qui sont utilisés pour évaluer les options. Deuxièmement, il explique la procédure d'évaluation à l'aide d'un arbre binomial, largement employée pour évaluer les options américaines et autres dérivés. Troisièmement, il introduit un principe très important connu sous le nom d'évaluation risque-neutre.

La présentation retenue ici est analogue à celle de Cox, Ross et Rubinstein dans leur article pionnier publié en 1979. Les éléments de ce chapitre se veulent introductifs. Une présentation approfondie des procédures numériques basées sur les arbres binomiaux apparaît au chapitre 21.

13.1 Le modèle binomial à une période et l'argument d'absence d'opportunité d'arbitrage

Supposons que nous cherchions à évaluer un call européen d'échéance trois mois et de prix d'exercice 21 €. Le cours de l'action est actuellement de 20 €. Pour simplifier, supposons que, dans trois mois, le cours de l'action puisse prendre seulement deux valeurs, 22 € ou 18 €. L'option n'a alors que deux valeurs possibles à la fin des trois mois. Si le cours de l'action atteint 22 €, le call vaut 1 €. En revanche, si le cours de

l'action tombe à 18 €, le call a une valeur nulle. Cette situation est illustrée dans le graphique 13.1.



Graphique 13.1 : Variations du cours de l'action de l'exemple numérique de la section 13.1

Un raisonnement simple et élégant peut alors être utilisé pour évaluer l'option. La seule hypothèse nécessaire est l'absence d'opportunités d'arbitrage. Il suffit de construire un portefeuille comprenant l'action et l'option de telle manière qu'il n'y ait aucune incertitude sur la valeur de celui-ci à la fin des trois mois. Si le portefeuille est effectivement sans risque, sa rentabilité est forcément égale au taux sans risque. Cette démarche permet de calculer le coût de constitution du portefeuille et, par conséquent, la valeur de l'option. Puisqu'il y a deux titres (l'action et l'option) et seulement deux résultats possibles, on a toujours la possibilité de constituer un portefeuille sans risque. On dit que le marché est complet.

Considérons donc un portefeuille constitué de Δ actions achetées et d'un call vendu (Δ est la lettre capitale grecque « delta »). La valeur de Δ est choisie de façon à ce que le portefeuille soit sans risque. Si le cours progresse de 20 € à 22 €, la valeur des actions est alors 22Δ € et le call vaut 1 €. La valeur du portefeuille est donc $22\Delta - 1$. Si le cours de l'action baisse de 20 € à 18 €, la valeur des actions est 18Δ et celle de l'option est nulle. La valeur du portefeuille est dans ce cas 18Δ. Le portefeuille est sans risque si Δ est choisi de façon à vérifier l'égalité :

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

d'où l'on déduit :

$$\Delta = 0{,}25$$

Par conséquent, un portefeuille sans risque présente les caractéristiques suivantes :

- achat de 0,25 action ;
- vente d'une option.

Si le cours de l'action atteint 22 €, la valeur du portefeuille est :

$$22 \times 0{,}25 - 1 = 4{,}50 \text{ €}$$

Si le cours de l'action tombe à 18 €, la valeur du portefeuille est :

$$18 \times 0{,}25 = 4{,}50 \text{ €}$$

Que la valeur de l'action augmente ou diminue, celle du portefeuille est toujours égale à 4,50 € à l'échéance de l'option.

En l'absence d'arbitrage, un portefeuille sans risque doit rapporter le taux sans risque. Supposons que dans notre cas, le taux sans risque soit de 4 % par an. Il s'ensuit que la valeur du portefeuille aujourd'hui est la valeur actualisée de 4,50, soit :

$$4{,}50\,\mathrm{e}^{-0{,}04\times 3/12} = 4{,}455$$

La valeur de l'action aujourd'hui est connue et égale à 20 €. Si f désigne la valeur de l'option à la date 0, la valeur du portefeuille à cette date est :

$$20 \times 0{,}25 - f = 5 - f$$

d'où :

$$5 - f = 4{,}455 \text{ €}$$

c'est-à-dire :

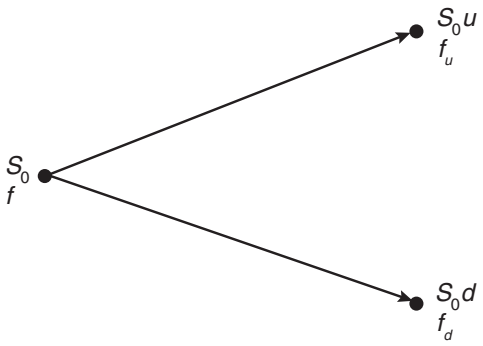
$$f = 0{,}545 \text{ €}$$

En l'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur de l'option doit être 0,545 €. Si elle était supérieure, le portefeuille coûterait moins de 4,367 € à sa création et rapporterait donc plus que le taux sans risque. Si la valeur de l'option était inférieure à 0,633 €, une position courte sur le portefeuille équivaudrait à un emprunt à un taux inférieur au taux sans risque.

Il n'est évidemment pas possible d'acquérir 0,25 action. Néanmoins, le raisonnement reste valable si on imagine, par exemple, que l'on vend 400 options et qu'on achète 100 actions. En général, pour constituer un portefeuille sans risque, il est nécessaire d'acquérir Δ actions pour chaque option vendue. Le paramètre Δ est important dans la couverture des positions en options. Δ est une des lettres grecques qui seront présentées ultérieurement dans ce chapitre et au chapitre 19.

Généralisation

Nous pouvons généraliser le raisonnement d'absence d'opportunité d'arbitrage présenté ci-dessus en considérant une action de prix S_0 et une option sur cette action dont la valeur est f. Nous supposons que l'option arrive à échéance à la date T et que, durant la vie de l'option, le cours de l'action peut progresser pour atteindre un nouveau prix $S_0\,u$ ou baisser jusqu'à $S_0\,d$, en supposant que $u > 1$ et $d < 1$. La rentabilité de l'action en cas de hausse est donc $u - 1$; en cas de baisse, elle est égale à $d - 1$. Si le cours de l'action atteint $S_0\,u$, notons f_u le payoff de l'option ; en revanche, si le cours de l'action chute à $S_0\,d$, le payoff de l'option est noté f_d. Cette situation est illustrée sur le graphique 13.2.



Graphique 13.2 : Valeurs de l'action et de l'option dans un arbre à une période

Comme dans l'exemple précédent, imaginons un portefeuille consistant en une position longue sur Δ actions et une position courte sur une option. En cas de hausse du cours de l'action, la valeur du portefeuille à l'échéance de l'option est :

$$S_0\, u\, \Delta - f_u$$

En cas de baisse du cours de l'action, la valeur du portefeuille devient :

$$S_0\, d\, \Delta - f_d$$

Pour que le portefeuille soit sans risque, les deux valeurs doivent être égales :

$$S_0\, u\, \Delta f_u = S_0\, d\, \Delta - f_d$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0\, u - S_0\, d} \tag{13.1}$$

La rémunération de ce portefeuille sans risque doit être égale au taux sans risque en l'absence d'opportunités d'arbitrage. L'équation (13.1) montre que Δ est le ratio de la différence des valeurs possibles de l'option et de la différence des valeurs possibles de l'action.

Si l'on note le taux sans risque r, la valeur actuelle du portefeuille est :

$$(S_0\, u\, \Delta - f_u)\, \mathrm{e}^{-rT}$$

Le coût de constitution du portefeuille est :

$$S_0\, \Delta - f$$

Il s'ensuit que :

$$S_0\, \Delta - f = (S_0\, u\, \Delta - f_u)\, \mathrm{e}^{-rT}$$

ou encore :

$$f = S_0\, \Delta(1 - u\, \mathrm{e}^{-rT}) + f_u\, \mathrm{e}^{-rT}$$

En substituant à Δ son expression donnée par l'équation (13.1), nous obtenons :

$$f = S_0 \left(\frac{f_u - f_d}{S_0\, u - S_0\, d} \right) (1 - u\, \mathrm{e}^{-rT}) + f_u\, \mathrm{e}^{-rT}$$

soit :

$$f = \frac{f_u\,(1 - u\,\mathrm{e}^{-rT}) - f_d\,(u\,\mathrm{e}^{-rT} - 1)}{u - d}$$

ou encore :

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\,[p\,f_u + (1 - p)\,f_d] \tag{13.2}$$

avec :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{rT} - d}{u - d} \tag{13.3}$$

Les équations (13.2) et (13.3) permettent l'évaluation d'une option par un modèle binomial à une période. La seule hypothèse nécessaire pour cette équation est qu'il n'y ait pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché.

Dans l'exemple numérique présenté auparavant (voir graphique 13.1), $f_u = 1$, $f_d = 0$, u = 1,1, d = 0,9, $r = 0{,}12$, $T = 0{,}25$, $f_u = 1$ et $f_d = 0$. L'équation (13.3) conduit à :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{0{,}12 \times 3/12} - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}6523$$

et en appliquant (13.2), on obtient :

$$f = \mathrm{e}^{-0{,}12 \times 0{,}25}(0{,}6523 \times 1 + 0{,}3477 \times 0) = 0{,}633$$

Le résultat correspond à celui obtenu précédemment dans cette section.

L'absence de pertinence de la rentabilité espérée

On remarque que l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation. En effet, la formule d'évaluation de l'équation (13.2) ne contient pas les probabilités de variation du cours de l'action à la hausse ou à la baisse. Par exemple, nous obtenons la même valeur d'option que la probabilité de hausse soit de 50 % ou de 90 %, à condition de supposer que le cours initial de l'action est le même dans les deux cas. C'est surprenant et cela semble contre-intuitif. Il semblerait plus naturel de penser que plus la probabilité de hausse de l'action est élevée, plus la valeur du call augmente et la valeur du put diminue. Or, ce n'est pas le cas.

La raison fondamentale est que l'option est évaluée, compte tenu du prix de l'actif sous-jacent. En fait, la probabilité d'une hausse ou d'une baisse future est déjà incorporée dans le cours initial de l'action. Il s'ensuit que nous n'avons pas besoin de la prendre une nouvelle fois en compte pour évaluer l'option. Remarquons cependant que si les deux valeurs terminales de l'action sont fixées et que la probabilité de hausse passe de 50 % à 90 %, la valeur initiale de l'action augmente, ce qui aura pour effet de changer u et d et donc le prix de l'option. Ici, cet effet est neutralisé par une évaluation en termes de prix du sous-jacent.

13.2 L'évaluation risque-neutre

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire un principe très important dans l'évaluation des dérivés, connu sous le nom d'*évaluation risque-neutre*. Ce principe stipule que,

lors de la valorisation d'un dérivé, nous pouvons supposer que les investisseurs sont indifférents vis-à-vis du risque ; par abus de langage, on dit qu'ils sont *risque-neutre.* Cette hypothèse signifie qu'ils n'exigent pas une espérance de rentabilité supérieure pour compenser le risque accru d'un investissement. Un monde où les investisseurs sont neutres vis-à-vis du risque est appelé un *univers risque-neutre.* Celui dans lequel nous vivons n'est évidemment pas un univers risque-neutre. Plus les investisseurs prennent de risques, plus ils exigent un taux de rentabilité élevé. Cependant, il s'avère que l'hypothèse d'un univers risque-neutre fournit une valeur des options identique à celle que l'on obtiendrait dans notre univers réel. Presque miraculeusement, cela résout le problème lié au fait que nous ignorons quasiment tout du degré d'aversion au risque des acheteurs et des vendeurs d'options.

L'évaluation risque-neutre semble un résultat surprenant lorsqu'on l'aborde pour la première fois. Les options sont des investissements risqués. Le degré d'aversion au risque d'un investisseur ne devrait-il pas affecter la façon dont elles sont évaluées ? La réponse est qu'en réalité, lorsque nous évaluons une option en fonction du prix de l'action sous-jacente, le degré d'aversion au risque n'a aucune importance si le prix du sous-jacent est un prix d'équilibre. Lorsque les investisseurs deviennent plus « riscophobes », le cours des actions baisse, mais les formules évaluant le prix des options sur ces actions restent inchangées.

Un univers risque-neutre présente deux caractéristiques qui simplifient l'évaluation des produits dérivés :

1. La rentabilité espérée d'une action (ou tout autre investissement) est le taux sans risque ;
2. Le taux d'actualisation utilisé pour l'espérance des flux procurés par une option (ou tout autre instrument) est le taux sans risque.

Revenant à l'équation (13.2), le paramètre p doit être interprété comme la probabilité d'une hausse dans un univers risque-neutre, de sorte que $1 - p$ est la probabilité d'une baisse dans ce même univers. L'expression :

$$p\, f_u + (1 - p)\, f_d$$

représente l'espérance du payoff futur procuré par l'option dans un univers risque-neutre et l'équation (13.2) indique que la valeur de l'option aujourd'hui est égale à l'espérance du payoff futur dans un monde risque-neutre, actualisée au taux sans risque. C'est une application de l'évaluation risque-neutre.

Pour démontrer la validité de notre interprétation de p, nous pouvons écrire que si p est la probabilité d'une hausse, l'espérance de la valeur de l'action, $E(S_T)$, à la date T, est donnée par :

$$E\,(S_T) = p\, S_0\, u + (1 - p)\, S_0\, d$$

qu'on peut encore écrire :

$$E\,(S_T) = p\, S_0\, (u - d) + S_0\, d$$

En remplaçant p par sa valeur dans l'équation (13.3), on obtient :

$$E\,(S_T) = S_0\, \mathrm{e}^{rT} \tag{13.4}$$

Cela montre que le prix des actions croît, en moyenne, au taux sans risque lorsque p est la probabilité de hausse. Autrement dit, le prix des actions est exactement ce qu'il doit être dans un univers risque-neutre lorsque p est la probabilité de hausse.

L'évaluation risque-neutre est un résultat général très important pour l'estimation des produits dérivés. Elle précise que, lorsque nous supposons que l'univers est risque-neutre, nous obtenons la juste valeur pour un dérivé dans tous les autres univers. Nous avons montré que l'évaluation risque-neutre est correcte quand un modèle binomial simple est utilisé pour évaluer le prix de l'action. On peut montrer également que le résultat est exact, quelles que soient les hypothèses que nous pourrions formuler sur l'évolution du cours de l'action. En revanche, dans un modèle plus complexe (trinomial, par exemple), rien n'assure que la probabilité risque-neutre p soit unique.

Pour appliquer l'évaluation risque-neutre à un produit dérivé, on calcule d'abord les probabilités des différents payoffs qu'il peut procurer dans l'univers risque-neutre. On déduit ensuite l'espérance de ces payoffs et on l'actualise au taux sans risque.

Réexamen de l'exemple binomial à une période

Reprenons à présent l'exemple du graphique 13.1 afin de montrer que l'évaluation risque-neutre apporte la même réponse que celle obtenue en construisant un portefeuille sans risque. Dans le graphique 13.1, le cours de l'action est initialement de 20 €; il monte à 22 € ou chute à 18 € après trois mois. L'option considérée est un call européen avec un prix d'exercice de 21 € et une durée de vie de trois mois. Le taux d'intérêt sans risque est 12 % par an.

Notons p la probabilité d'une hausse du cours de l'action dans l'univers risque-neutre; elle est calculée à partir de l'équation (13.3). De plus, l'espérance de rentabilité de l'action dans l'univers risque-neutre est égale au taux sans risque, soit 12 %. La probabilité p doit donc satisfaire l'équation suivante :

$$22\,p + 18\,(1-p) = 20\,\mathrm{e}^{0,12\times 3/12}$$

soit :

$$4\,p = 20\,\mathrm{e}^{0,12\times 3/12} - 18$$

et donc p est égale à 0,6523.

À l'issue des trois mois, l'option d'achat a une probabilité 0,6523 de valoir 1 € et une probabilité 0,3477 de valoir zéro. Ainsi, sa valeur espérée à l'échéance est :

$$0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0 = 0,6523$$

Dans l'univers risque-neutre, cette valeur moyenne doit être actualisée au taux sans risque. La valeur de l'option, à la date d'aujourd'hui, est donc :

$$0,6523\,\mathrm{e}^{-0,12\times 3/12}$$

soit 0,633 €. Nous retrouvons bien la valeur obtenue précédemment, démontrant que le raisonnement fondé sur la construction d'un portefeuille sans risque (que nous appelons raisonnement d'arbitrage dans la suite) et l'évaluation risque-neutre produisent la même valeur d'option.

Univers réel ou univers risque-neutre

Soulignons que p est la probabilité de hausse dans l'univers risque-neutre. Généralement, elle n'est pas égale à la probabilité de hausse dans l'univers réel. Dans notre exemple, p = 0,6523. Lorsque la probabilité de hausse est de 0,6523, l'espérance de rentabilité de l'action est égale au taux sans risque, soit 12 %. Supposons que, dans l'univers réel, l'espérance de rentabilité de l'action soit de 16 % et notons q la probabilité de hausse dans l'univers réel. On a alors :

$$22\,q + 18\,(1-q) = 20\,\mathrm{e}^{0,16\times 3/12}$$

et donc q = 0,7041.

L'espérance de payoff de l'option dans l'univers réel est alors égale à :

$$q \times 1 + (1-q) \times 0$$

c'est-à-dire 0,7041. Malheureusement, il n'est pas facile de connaître exactement le taux d'actualisation à appliquer au payoff de l'option dans l'univers réel. Une position dans une option d'achat est plus risquée qu'une position dans une action. Par conséquent, le taux d'actualisation à appliquer au payoff d'un call est bien supérieur à 16 %. Sans connaître la valeur de l'option, nous ne pouvons pas savoir de combien ce taux doit être supérieur à 16 %[1]. L'évaluation risque-neutre résout le problème. Nous savons en effet que, dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les actifs (et par conséquent le taux d'actualisation à utiliser pour tous les payoffs espérés) est le taux sans risque.

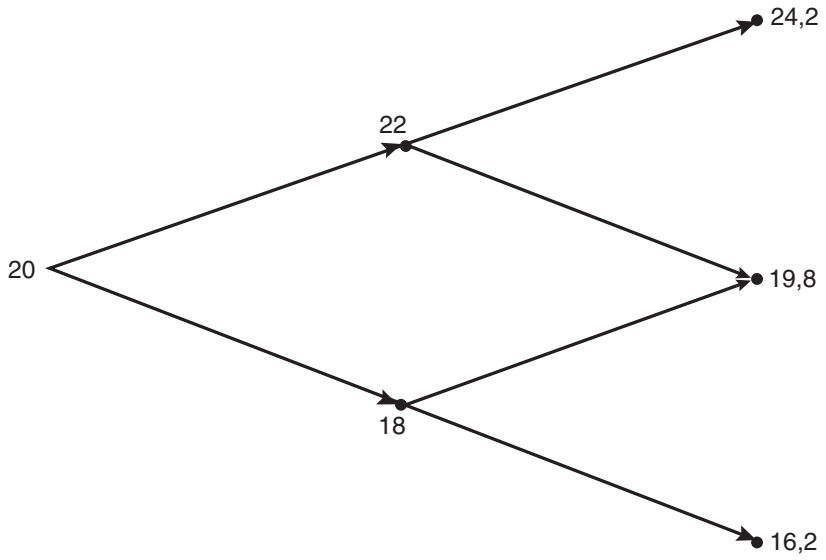
13.3 Les arbres binomiaux à deux périodes

L'analyse précédente peut être étendue à un arbre binomial à deux périodes, tel qu'il est présenté sur le graphique 13.3. Ici, le cours initial de l'action est 20 € et, à chacune des périodes, il peut augmenter de 10 % ou baisser de 10 %. Nous supposons que chaque période dure trois mois et que le taux sans risque est de 12 % par an.

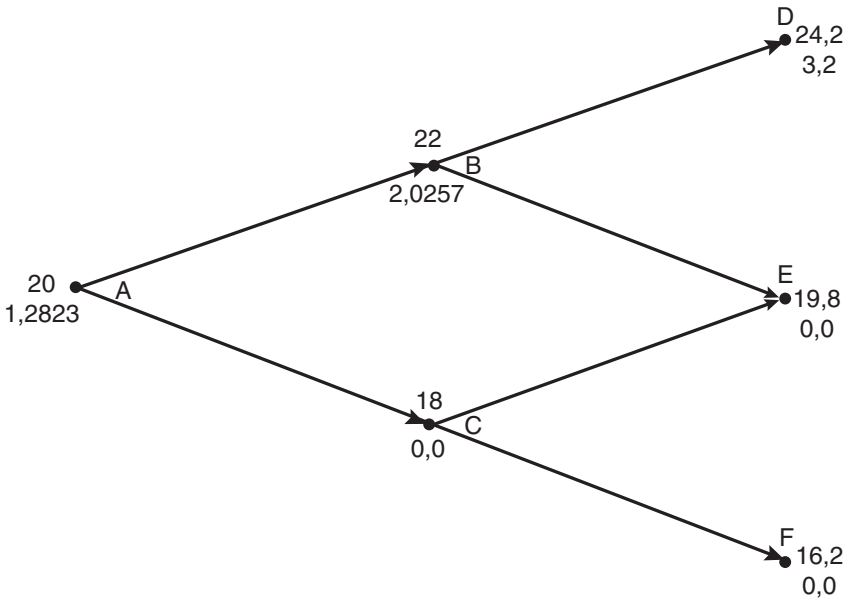
Comme dans l'exemple précédent, le prix d'exercice de l'option est supposé égal à 21 €.

L'objectif est de calculer la valeur de l'option au nœud initial de l'arbre. Il suffit, pour cela, d'appliquer itérativement les principes établis précédemment dans ce chapitre. Le graphique 13.4 représente le même arbre d'évolution que celui du graphique 13.3, mais précise à la fois le cours de l'action et la valeur de l'option à chaque nœud. Le cours de l'action est le nombre du haut, la valeur de l'option est celui du bas. Les valeurs de l'option aux nœuds terminaux de l'arbre sont faciles à calculer. Ce sont les payoffs terminaux du contrat. Au nœud D, le cours de l'action est de 24,2 et la valeur de l'option, à l'échéance, est $24{,}2 - 21 = 3{,}2$. Aux nœuds E et F, l'option est en dehors de la monnaie et sa valeur est nulle.

1. Puisque ici la valeur de l'option est 0,633, nous pouvons déduire que le taux d'actualisation du payoff de l'option est égal à 42,6 %. En effet, $0{,}633 = 0{,}7041\,\mathrm{e}^{-0{,}4258\times 3/12}$.



Graphique 13.3 : Valeurs de l'action dans un arbre à deux périodes

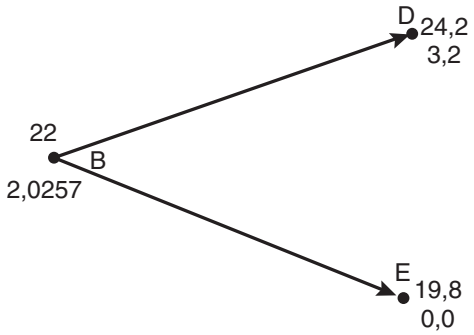


Graphique 13.4 : Valeurs de l'action et de l'option dans un arbre à deux périodes. Le nombre indiqué au dessus de chaque nœud est la valeur de l'action, le nombre du bas, la valeur de l'option.

Au nœud C, la valeur de l'option est nulle, car le nœud C conduit à l'un ou l'autre des nœuds E ou F et, sur chacun d'eux, la valeur de l'option est nulle. La valeur de l'option au nœud B est calculée en prenant appui sur la partie de l'arbre représentée sur le graphique 13.5.

En gardant les notations et les valeurs des paramètres de la section 13.1, c'est-à-dire $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, $r = 0{,}12$ et $T = 0{,}25$, nous obtenons encore $p = 0{,}6523$ et l'équation (13.2) donne la valeur de l'option au nœud B, c'est-à-dire :

$$\mathrm{e}^{-0{,}12\times 3/12}(0{,}6523 \times 3{,}2 + 0{,}3477 \times 0) = 2{,}0257$$



Graphique 13.5 : Évaluation de l'option au nœud B

Il ne nous reste plus qu'à calculer la valeur initiale de l'option au nœud A, en focalisant notre attention sur la première partie de l'arbre. La valeur de l'option au nœud B est 2,0257 alors qu'elle est nulle au nœud C. L'équation (13.2) fournit donc la valeur de l'option au nœud A, sous la forme :

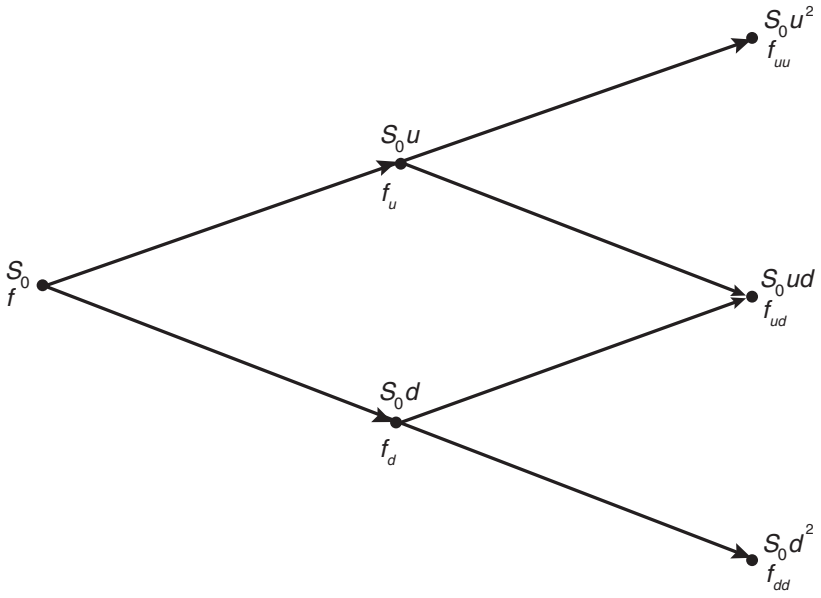
$$\mathrm{e}^{-0,12\times 3/12}(0,6523 \times 2,0257 + 0,3477 \times 0) = 1,2823$$

La valeur de l'option est donc 1,2823 €.

Il faut noter que cet exemple est construit avec des paramètres u et d (qui sont les rentabilités de l'action à la hausse et à la baisse) indépendants de la date et du nœud de l'arbre considérés. De plus, les périodes sont de même durée. Par conséquent, la probabilité risque-neutre, p, telle qu'elle est calculée avec l'équation (13.3) est la même à chaque nœud.

Généralisation

Le graphique 13.6 montre comment généraliser le raisonnement.



Graphique 13.6 : Valeurs de l'action et de l'option dans un arbre général à deux périodes

Le cours initial de l'action est S_0 et, durant chaque période, le cours de l'action est multiplié par u ou par d. La notation de la valeur de l'option apparaît sur l'arbre (par exemple, après deux hausses successives, l'option vaut f_{uu}) Le taux d'intérêt sans risque est noté r et chaque période dure Δt années. Comme la longueur du pas de temps est maintenant Δt, les équations (13.2) et (13.3) s'écrivent :

$$f = \mathrm{e}^{-r\Delta T}\left[p\, f_u + (1-p)\, f_d\right] \tag{13.5}$$

avec :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{r\Delta T} - d}{u - d} \tag{13.6}$$

L'application répétée de l'équation (13.5) donne :

$$f_u = \mathrm{e}^{-r\Delta t}(p\, f_{uu} + (1-p)\, f_{ud}) \tag{13.7}$$

$$f_d = \mathrm{e}^{-r\Delta t}(p\, f_{ud} + (1-p)\, f_{dd}) \tag{13.8}$$

$$f = \mathrm{e}^{-r\Delta t}(p\, f_u + (1-p)\, f_d) \tag{13.9}$$

En remplaçant, dans l'équation (13.9), f_u et f_d par leurs valeurs données dans les équations (13.7) et (13.8), nous obtenons :

$$f = \mathrm{e}^{-2\,r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2\,p\,(1-p)\, f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}) \tag{13.10}$$

Cette formulation est cohérente avec le principe d'évaluation risque-neutre mentionné plus haut. p^2, $2\,p\,(1-p)$ et $(1-p)^2$ sont les probabilités que les nœuds terminaux du haut, du milieu et du bas soient atteints. La valeur de l'option est égale à son payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux sans risque.

Le principe d'évaluation risque-neutre reste valide quand nous ajoutons des périodes supplémentaires sur l'arbre binomial. La valeur de l'option est toujours égale à son payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux d'intérêt sans risque.

13.4 Un exemple avec une option de vente

Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale. Considérons un put européen à deux ans de prix d'exercice 52 € sur une action cotée actuellement 50 €. La durée de vie de l'option est divisée en deux périodes d'un an chacune et, à chaque période, le cours de l'action augmente de 20 % ou baisse de 20 %. Le taux sans risque est supposé égal à 5 %.

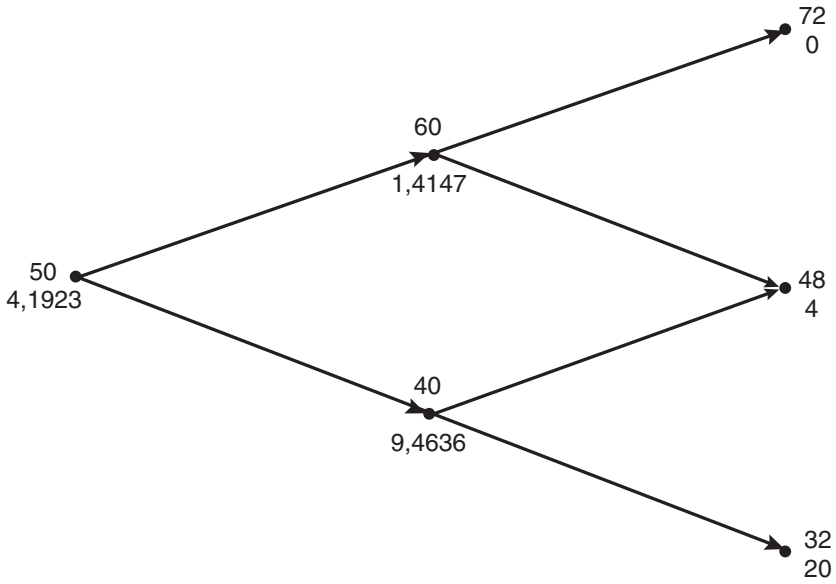
L'arbre de cette situation est représenté dans le graphique 13.7. La probabilité risque-neutre de hausse, p, est donnée par l'équation (13.6), à savoir :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{0{,}05\times 1} - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = 0{,}6282$$

Les valeurs finales possibles de l'action sont : 72 €, 48 € et 32 €. Dans ce cas, $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = 4$ et $f_{dd} = 20$. De l'équation (13.10), on déduit :

$$f = \mathrm{e}^{-2\times 0{,}05\times 1}\left(0{,}6282^2 \times 0 + 2 \times 0{,}6282 \times 0{,}3718 \times 4 + 0{,}3718^2 \times 20\right) = 4{,}1923$$

La valeur du put est donc 4,1923 €. Ce résultat peut également être obtenu en utilisant l'équation (13.5) et en calculant les valeurs d'option sur chaque nœud et à chaque date, en débutant par la fin (ce procédé est appelé « induction arrière ». Le graphique 13.7 montre les valeurs intermédiaires de l'option ainsi calculées.



Graphique 13.7 : Utilisation d'un arbre binomial à deux périodes pour évaluer une option de vente européenne. Le nombre indiqué au dessus de chaque nœud est la valeur de l'action, le nombre du bas, la valeur de l'option.

13.5 Les options américaines

Jusqu'à présent, toutes les options considérées étaient de type européen. Nous allons maintenant aborder l'évaluation des options américaines à l'aide d'arbres binomiaux, tels que ceux des graphiques 13.4 et 13.7. La procédure consiste à calculer la valeur sur chaque nœud de l'arbre, par induction arrière, c'est-à-dire en partant de l'échéance et en revenant vers la date initiale, tout en testant à chaque nœud s'il est optimal ou non d'exercer prématurément l'option. La valeur de l'option sur les nœuds terminaux (à la date d'échéance) est la même que celle des options européennes puisqu'à cette date, il n'y a plus de différence entre les deux types d'options. En revanche, sur les nœuds précédents, la valeur de l'option est le maximum de :

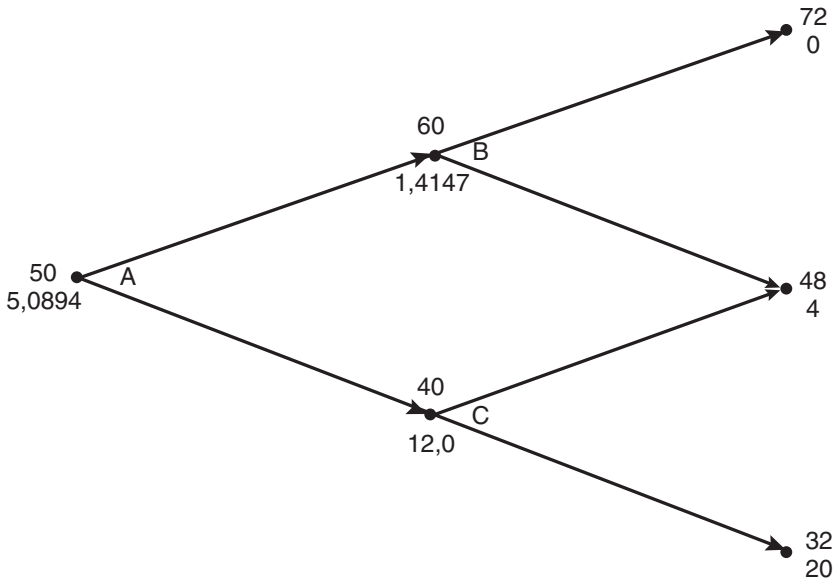
1. La valeur donnée par l'équation (13.5) ;
2. Le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option.

Le graphique 13.8 montre de quelle manière le graphique 13.7 est modifié si c'est une option américaine et non européenne qui est évaluée. Les valeurs de l'action et les probabilités des différentes branches sont inchangées. Les valeurs de l'option sur les nœuds terminaux restent également inchangées. Au nœud B, l'équation (13.5) attribue la valeur 1,4147 à l'option tandis que le flux engendré par un exercice anticipé serait négatif ($= -8$). Il est clair qu'il n'est pas optimal d'exercer au nœud B et la valeur de l'option à ce nœud est bien 1,4147. Au nœud C, l'équation (13.5) donne 9,4636 comme

valeur de l'option, tandis que le flux lié à un exercice anticipé serait de 12. Dans ce cas, l'exercice prématuré est optimal et la valeur de l'option au nœud C est égale à 12. Au nœud initial A, la valeur calculée par application de l'équation (13.5) est alors :

$$e^{-0,05\times 1}\,(0,6282 \times 1,4147 + 0,3718 \times 12,0) = 5,0894$$

et le payoff d'un exercice anticipé est égal à 2. Dans ce cas, comme pour le nœud B, il n'est pas optimal d'exercer prématurément l'option et sa valeur reste donc 5,0894 €.



Graphique 13.8 : Utilisation d'un arbre binomial à deux périodes pour évaluer une option de vente américaine. Le nombre indiqué au dessus de chaque nœud est la valeur de l'action, le nombre du bas, la valeur de l'option.

13.6 Le delta

À ce stade, il est temps de présenter le delta, paramètre essentiel dans la gestion et la couverture des options.

Le delta d'une option sur action se définit comme la variation de valeur de l'option rapportée à la variation de prix de l'action sous-jacente. Il représente le nombre d'unités d'action à détenir pour chaque option vendue, afin de créer un portefeuille sans risque. Il est identique au Δ introduit au début de ce chapitre. La construction d'une telle couverture est parfois appelée « couverture delta-neutre » ou *delta hedging* dans la terminologie anglo-saxonne. Le delta d'un call est positif alors que le delta d'un put est négatif puisque le prix d'un call (put) est une fonction croissante (décroissante) du prix de l'action sous-jacente.

À partir du graphique 13.1, nous pouvons calculer la valeur du delta du call de la manière suivante :

$$\frac{1-0}{22-18} = 0,25$$

Ce ratio traduit le fait que lorsque le cours de l'action varie de 18 € à 22 €, la valeur de l'option varie de 0 € à 1 € (c'est aussi la valeur du delta calculé à la section 13.1).

Sur le graphique 13.4, le delta correspondant aux variations du cours de l'action pour la première période est :

$$\frac{2{,}0257 - 0}{22 - 18} = 0{,}5064$$

Le delta correspondant aux variations du cours de l'action de la seconde période est :

$$\frac{3{,}2 - 0}{24{,}2 - 19{,}8} = 0{,}7273$$

en cas de hausse du cours pendant la première période et :

$$\frac{0 - 0}{19{,}8 - 16{,}2} = 0$$

en cas de baisse du cours pendant la première période.

D'après le graphique 13.7, le delta du put est :

$$\frac{1{,}4147 - 9{,}4636}{60 - 40} = -0{,}4024$$

à la fin de la première période. Il vaut, soit :

$$\frac{0 - 4}{72 - 48} = -0{,}1667$$

soit :

$$\frac{4 - 20}{48 - 32} = -1{,}0000$$

à la fin de la seconde période.

Ces exemples à deux périodes montrent que le delta change à chaque date. Sur le graphique 13.4, le delta passe de 0,5064 à 0,7273 ou à 0. Dans le graphique 13.7, il varie de $-0{,}4024$ à $-0{,}1667$ ou à $-1{,}0000$. Aussi, dans le but de maintenir une couverture sans risque en utilisant une option et l'action sous-jacente, il faut ajuster le nombre d'actions détenues à chaque période. Nous reviendrons sur cette caractéristique des options au chapitre 19.

13.7 La relation liant u, d et la volatilité

En pratique, les trois paramètres nécessaires pour construire un arbre binomial sont u, d et p. Quand u et d sont spécifiés, p est choisi de sorte que l'espérance de rentabilité du sous-jacent soit égale au taux sans risque r. Nous avons déjà démontré que :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{13.11}$$

Les paramètres u et d sont définis en fonction de la volatilité de l'action. La volatilité de la rentabilité de l'action sur une période Δt est égale à $\sigma\sqrt{\Delta t}$ (voir le chapitre 15).

La variance d'une variable X est égale à $E(X^2) - E(X)^2$, où E désigne l'espérance mathématique. Sur une période de durée Δt, si on note p la probabilité que la rentabilité soit $u-1$ et $1-p$ la probabilité que la rentabilité soit $d-1$, la volatilité est donnée par :

$$p\,(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - [p\,(u-1) + (1-p)(d-1)]^2 = \sigma^2 \Delta t \qquad (13.12)$$

Pour ajuster la volatilité du cours de l'action avec les paramètres de l'arbre, l'équation suivante doit donc être vérifiée :

$$pu^2 + (1-p)\,d^2 - [pu + (1-p)\,d]^2 = \sigma^2 \Delta t$$

En remplaçant p dans l'équation (13.12) par sa valeur, déduite de l'équation (13.11), nous obtenons :

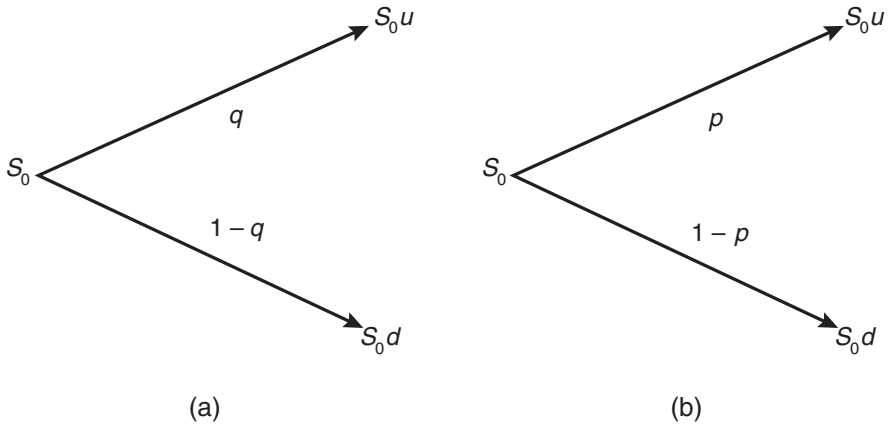
$$\mathrm{e}^{r\Delta t}\,(u+d) - ud - \mathrm{e}^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \qquad (13.13)$$

Lorsque les termes en Δt^2 ou d'ordre supérieur sont négligés, une solution à cette équation est :

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Ce sont les valeurs proposées par Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour ajuster u et d.

Dans cette analyse, nous avons choisi u et d afin qu'ils correspondent à la volatilité dans l'univers risque-neutre. Mais qu'en est-il dans l'univers réel ? Comme nous allons le démontrer, les équations restent identiques. Supposons que p^* soit la probabilité de hausse dans l'univers réel, que l'on distingue de p, précédemment défini comme la probabilité de hausse dans l'univers risque-neutre (voir graphique 13.9).



Graphique 13.9 : Variation du cours de l'action durant le temps Δt dans (a) l'univers réel d'aversion envers le risque et (b) l'univers risque-neutre

Soit μ l'espérance de rentabilité de l'action dans l'univers réel. On doit donc avoir :

$$p^* u + (1-p^*)\,d = \mathrm{e}^{\mu\,\Delta t}$$

soit :

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{\mu\,\Delta t} - d}{u-d} \qquad (13.14)$$

Supposons que σ soit la volatilité dans l'univers réel. L'équation exprimant la variance est la même que celle de l'équation (13.12), en remplaçant p par p^*. Lorsque cette équation est combinée avec l'équation (13.14), nous obtenons :

$$e^{\mu \Delta t}(u + d) - u\,d - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Elle est identique à l'équation (13.13) si l'on remplace r par μ. Lorsque les termes en Δt^2 ou d'ordre supérieur sont négligés, nous retrouvons les mêmes solutions que celles de l'équation (13.13) :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{et} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Le théorème de Girsanov

Les résultats que nous venons d'obtenir sont étroitement liés à un important résultat, beaucoup plus général, connu sous le nom de théorème de Girsanov. Lorsque nous passons de l'univers réel à l'univers risque-neutre, l'espérance du taux de rentabilité de l'action change, mais la volatilité reste la même (du moins quand Δt tend vers zéro). Passer d'un univers caractérisé par une certaine attitude vis-à-vis du risque à un univers caractérisé par un autre niveau d'aversion au risque modifie les espérances des taux de croissance des variables, mais laisse les volatilités de ces variables inchangées. Nous examinerons plus en détail l'impact de l'attitude des agents face au risque sur le comportement des variables de marché au chapitre 28. Passer d'un niveau d'aversion au risque (univers réel) à un autre (univers risque-neutre) est parfois qualifié de « changement de mesure ou de probabilité ». Dans l'univers réel, la mesure est parfois dénommée *mesure P* tandis que celle de l'univers risque-neutre est connue sous le nom de *mesure Q*[2].

13.8 Les formules des arbres binomiaux

L'analyse menée au cours de la section précédente montre que, lorsque la longueur des sous-périodes d'un arbre binomial est Δt, nous pouvons prendre en compte la volatilité en posant :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{13.15}$$

et :

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{13.16}$$

La variable p est donnée par l'équation (13.6) :

$$p = \frac{a - d}{u - d} \tag{13.17}$$

avec :

$$a = e^{r\Delta t} \tag{13.18}$$

2. Avec nos notations, p est la probabilité de hausse sous la mesure Q tandis que p^* est la probabilité de hausse sous la mesure P.

Les équations (13.15) à (13.18) définissent l'arbre binomial.

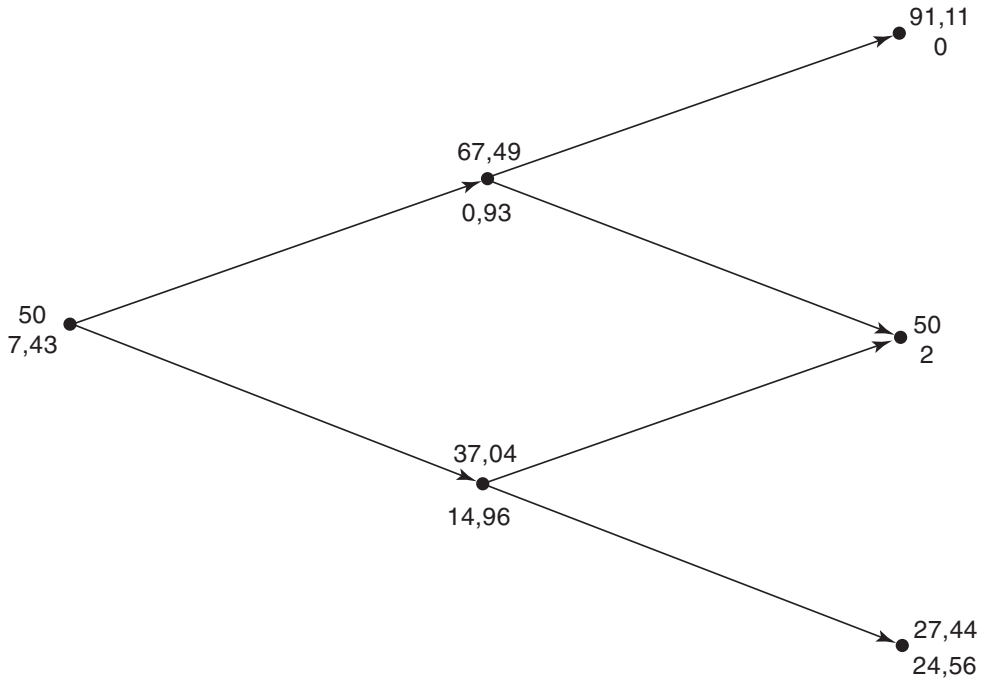
Considérons à nouveau le put américain du graphique 13.8. Le cours du sous-jacent est de 50 €, le prix d'exercice de 52 €, le taux sans risque de 5 %; la maturité est à 2 ans et l'arbre comporte deux périodes. Dans ce cas, $\Delta t = 1$. Supposons que la volatilité soit de 30 %. Les équations (13.15) et (13.18) permettent alors de calculer :

$$u = \mathrm{e}^{0,3\times 1} = 1,3499 \quad ; \quad d = \frac{1}{1,3499} = 0,7408 \quad ; \quad a = e = ^{0,05\times 1} = 1,0513$$

et :

$$p = \frac{1,0513 - 0,7408}{1,3499 - 0,7408} = 0,5097$$

L'arbre ainsi obtenu est présenté dans le graphique 13.10. La valeur du put est alors de 7,43 €. (Elle est différente de celle obtenue dans le graphique 13.8, où nous avions supposé u = 1,2 et d = 0,8.) Vous noterez que l'option est exercée à la fin de la première période si le nœud du bas est atteint.



Graphique 13.10 : Arbre à deux périodes pour l'évaluation d'un put américain à deux ans avec un prix de l'action à 50, un prix d'exercice de 52, un taux sans risque de 5 % et une volatilité de 30 %

13.9 L'augmentation du nombre de périodes

Les modèles binomiaux présentés jusqu'ici sont exagérément simplifiés. Bien sûr, un analyste n'obtiendrait qu'une très grossière approximation de la valeur d'une option en supposant que les variations du cours de l'action durant la vie de l'option se résument à une ou deux étapes binomiales.

Lorsque les arbres binomiaux sont employés dans la pratique, la durée de vie de l'option est divisée, par exemple, en 30 périodes, ou davantage, de longueur Δt. Sur chaque période, l'évolution du cours de l'action est binomiale. Après 30 périodes, 31 valeurs finales sont possibles pour le cours de l'action et 2^{30} trajectoires de cours, soit plus d'un milliard, sont à considérer dans un tel arbre.

Les équations définissant un arbre binomial sont les équations (13.15) à (13.18), quel que soit le nombre de périodes. Supposons, par exemple, qu'il y ait cinq périodes au lieu de deux dans l'exemple du graphique 13.10. Les paramètres seraient $\Delta t = 2/5 = 0{,}4$; $r = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}3$. Ces valeurs donnent $u = \mathrm{e}^{0{,}3\times\sqrt{0{,}4}} = 1{,}2089$; $d = 1/1{,}2089 = 08272$; $a = \mathrm{e}^{0{,}05\times 0{,}4} = 1{,}0202$ et $p = (1{,}0202 - 0{,}8272)/(1{,}2089 - 0{,}8272) = 0{,}5056$.

Le nombre de périodes peut être augmenté (de sorte que Δt devienne plus petit), et le modèle d'arbre binomial s'appuie alors sur des hypothèses à propos du comportement du cours de l'action proches de celles du modèle de Black-Scholes-Merton, qui sera présenté dans le chapitre 15. Lorsqu'un arbre binomial est utilisé pour évaluer une option européenne, la valeur obtenue converge vers le résultat de Black-Scholes-Merton, comme prévu, quand le nombre de périodes augmente. Cette propriété est démontrée dans l'annexe de ce chapitre.

13.10 L'utilisation de DerivaGem

Le logiciel inclus dans cet ouvrage, DerivaGem 3.00, offre une façon d'évaluer les options avec un nombre de périodes compris entre 2 et 500 (en choisissant le type d'option Binomial European ou Binomial American). Les arbres, jusqu'à 10 périodes, peuvent être affichés par le logiciel. Par exemple, quand vous avez chargé le programme, sélectionnez l'onglet Equity_FX_Index_ Futures_Options. Choisissez Equity (action) comme sous-jacent (Underlying Type) et American Binomial comme méthode d'évaluation (Option Type). Entrez le prix de l'action, la volatilité, le taux sans risque, la durée de vie, le prix d'exercice et le nombre de pas, c'est-à-dire les valeurs 50, 30 %, 5 %, 2, 52 et 2. Cochez la case Put et cliquez Calculate. Le prix obtenu pour l'option est de 7,428 (boîte Price). En choisissant alors Display Tree, vous verrez l'équivalent du graphique 13.10. (Les nombres en rouge sur la feuille Excel indiquent les nœuds où l'exercice prématuré est optimal.)

Retournez à la feuille de calcul Equity_FX_Index_Futures_Options et choisissez un nombre de pas égal à 5. Validez ce choix par Entrée puis cliquez sur Calculate. Vous constaterez une valeur d'option égale à 7,671. En choisissant Display Tree, vous verrez l'arbre à 5 périodes, avec les valeurs correspondantes pour u, d, a, p.

En revanche, si vous sélectionnez Binomial European et retenez 500 pas, vous aboutirez à une valeur de put égale à 6,76, alors que la valeur de l'option américaine avec 500 pas est de 7,47. Le modèle de Black et Scholes présenté au chapitre 15 donne lui aussi une valeur de 6,76 pour l'option européenne. On peut aussi, en choisissant un autre support (Underlying Type), évaluer des options portant sur d'autres sous-jacents.

13.11 Les options portant sur d'autres sous-jacents

Nous avons évoqué au chapitre 10 les options sur indices, devises et contrats futures et nous les analyserons à nouveau en détail aux chapitres 17 et 18. En fait, les arbres binomiaux peuvent aussi être utilisés pour évaluer ces différents contrats, de la même façon qu'ils ont permis d'évaluer les options sur actions. Toutefois, l'équation qui définit la probabilité p change. Mais comme c'était le cas pour les options sur actions (équation (13.2)), la valeur de l'option à un nœud donné est égale à p fois la valeur au nœud suivant dans l'état up plus $(1-p)$ fois la valeur de l'option au nœud suivant, le tout actualisé au taux sans risque.

Les options sur des actions payant des dividendes

Considérons une action payant un dividende au taux q. La rentabilité de ce titre est la somme du taux de dividende et du gain en capital ; elle doit être égale au taux sans risque dans l'univers risque-neutre. En conséquence, le taux de croissance du prix est égal à $r-q$. Si le prix initial est S_0, sa valeur espérée après un délai Δt est donnée par :

$$p\,S_0\,u + (1-q)\;S_0\,d = S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\Delta t}$$

de sorte que :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{(r-q)\Delta T} - d}{u-d}$$

Comme dans le cas des options portant sur des actions qui ne paient pas de dividende, on tient compte de la volatilité en retenant $u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = 1/u = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. On peut toujours utiliser les équations (13.15) à (13.18), mais en posant $a = \mathrm{e}^{(r-q)\Delta T}$.

Les options sur indices

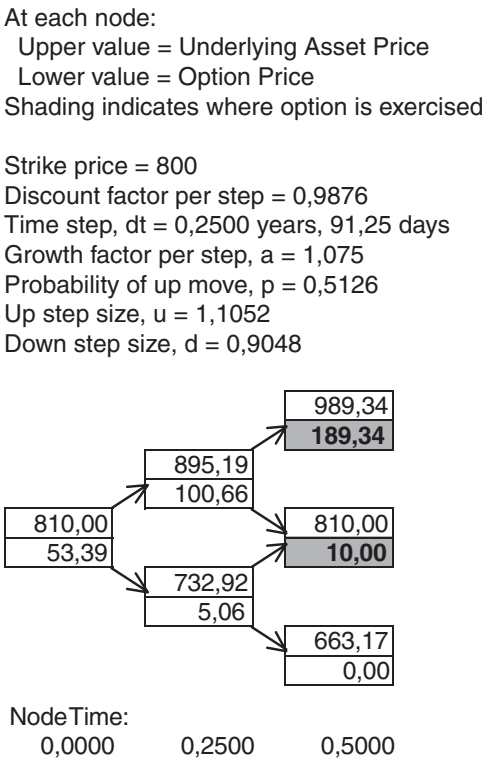
Quand nous avons calculé le prix futures d'un indice au chapitre 5, nous avons supposé que l'indice procurait un taux de dividende q. Nous faisons la même hypothèse ici. L'évaluation d'une option sur indice relève alors de la même démarche que celle d'une option sur une action payant un taux de dividende q.

■ **Exemple 13.1** Un indice d'actions vaut aujourd'hui 810 points, a une volatilité de 20 % et un taux de dividende de 2 %. Le taux sans risque est de 5 %. Le graphique 13.11 montre ce que donne DerivaGem quand on évalue un call à 6 mois sur cet indice avec un prix d'exercice de 800 et un arbre à 2 périodes.

Dans ce cas, on a :

$$\Delta t = 0{,}25 \quad ; \quad u = \mathrm{e}^{0{,}2\sqrt{0{,}25}} = 1{,}1052$$
$$d = 1/u = 0{,}9048 \quad ; \quad a = \mathrm{e}^{(0{,}05-0{,}02)\times 0{,}25} = 1{,}0075$$
$$p = (1{,}0075 - 0{,}9048)/(1{,}1052 - 0{,}9048) = 0{,}5126$$

On obtient une valeur d'option de 53,39.



Graphique 13.11 : Arbre à deux périodes pour évaluer un call à 6 mois sur un indice valant 810, avec un prix d'exercice de 800, un taux sans risque de 5 %, une volatilité de 20 % et un taux de dividende de 2 %

Les options sur devises

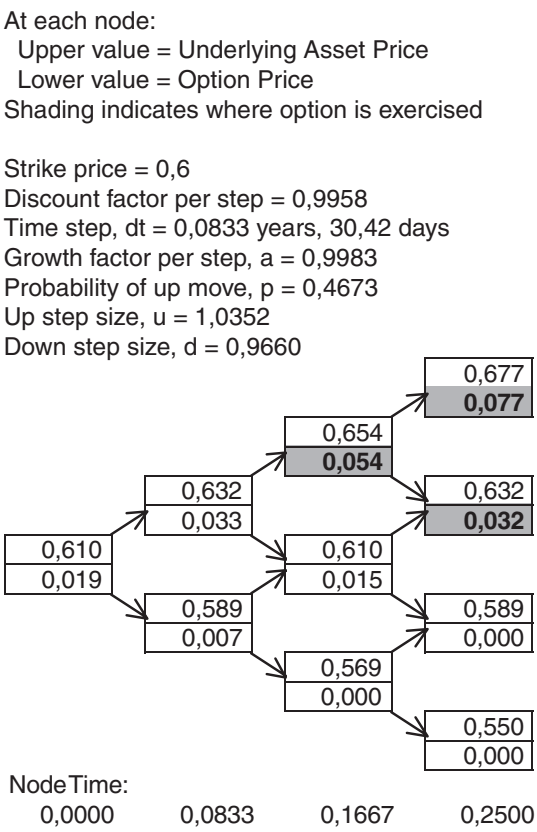
Comme nous l'avons vu à la section 5.10, une devise peut être vue comme un actif payant un taux de dividende égal au taux sans risque étranger, r_f. Par analogie avec ce qui vient d'être fait pour les options sur indices, on peut évaluer les options sur devises à l'aide des équations (13.15) à (13.18) en posant $a = \mathrm{e}^{(r-r_f)\Delta T}$.

■ **Exemple 13.2** Le dollar australien cote 0,6100 dollar US et ce taux de change a une volatilité de 12 %. Le taux sans risque australien est de 7 %, alors que le taux US est de 5 %. Le graphique 13.12 montre ce que donne DerivaGem quand on évalue un call américain (en dollars US) à 3 mois avec un prix d'exercice de 0,6000 et un arbre à 3 périodes.

Dans ce cas on a :

$$\Delta t = 0{,}08333 \quad ; \quad u = \mathrm{e}^{0{,}12\sqrt{0{,}08333}} = 1{,}0352$$
$$d = 1/u = 0{,}9660 \quad ; \quad a = \mathrm{e}^{(0{,}05-0{,}07)\times 0{,}0833} = 0{,}9983$$
$$p = (0{,}9983 - 0{,}9660)/(1{,}0352 - 0{,}9660) = 0{,}4673$$

On obtient une valeur d'option de 0,019.



Graphique 13.12 : Arbre à trois périodes permettant d'évaluer un call américain à trois mois sur une devise valant 0,6100 $, avec un prix d'exercice de 0,6000, un taux sans risque domestique de 5 %, une volatilité de 12 % et un taux sans risque étranger de 7 %

Les options sur contrats futures

Cela ne coûte rien de prendre une position longue ou courte sur un contrat futures. Il s'ensuit que, dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance espéré de la valeur d'un tel contrat est nul (ce point sera discuté à nouveau à la section 18.7). Comme précédemment, nous pouvons noter p la probabilité d'un mouvement up du prix futures, u le pourcentage d'augmentation dans le cas d'un tel mouvement et d le pourcentage de baisse en cas d'un mouvement down. Si F_0 désigne le prix futures initial, le prix futur espéré à une date quelconque sera toujours F_0. On en déduit :

$$p\,u + (1-p)\,d = 1$$

ou encore :

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

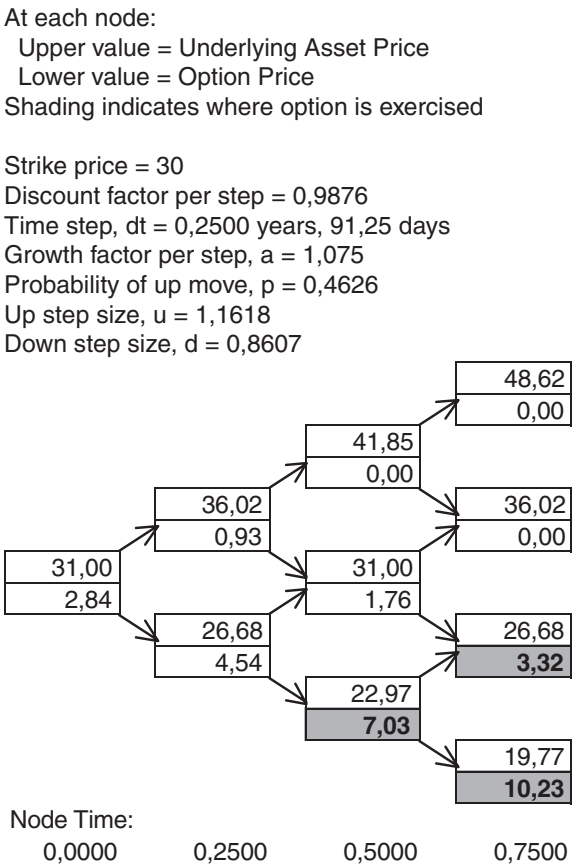
On peut à nouveau utiliser les équations (13.15) à (13.18) pour évaluer une option sur un tel contrat.

■ **Exemple 13.3** Un prix futures est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de 30 %. Le taux sans risque est de 5 %. Le graphique 13.13 montre le résultat donné par DerivaGem pour évaluer un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.

Dans ce cas on a :

$$\Delta t = 0{,}25 \quad ; \quad u = \mathrm{e}^{0{,}3\sqrt{0{,}25}} = 1{,}1618$$
$$d = 1/u = 0{,}8607 \quad ; \quad a = 1$$
$$p = (1 - 0{,}8607)/(1{,}1618 - 0{,}8607) = 0{,}4626$$

On obtient une valeur d'option de 2,84.



Graphique 13.13 : Arbre à trois périodes pour évaluer un put américain à 9 mois sur un contrat futures dont le prix est 31, avec un prix d'exercice de 30, un taux sans risque de 5 % et une volatilité de 30 %

Résumé

Ce chapitre a présenté un premier aperçu de l'évaluation des options sur actions. Si, durant la vie d'une option, les variations du cours d'une action sont gouvernées par un processus binomial, il est possible de constituer un portefeuille sans risque qui comporte une position en options et en actions. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, les portefeuilles sans risque doivent rapporter le taux d'intérêt sans risque. Cela permet d'évaluer l'option en termes de prix de l'action sous-jacente. Il est important de noter qu'aucune hypothèse, sur la probabilité de hausse du cours de l'action à chaque nœud de l'arbre, n'est nécessaire à l'évaluation car cette probabilité est déjà intégrée dans le cours initial du sous-jacent.

Lorsque les variations de cours de l'action sont décrites par un arbre binomial à plusieurs périodes, chacune peut être traitée séparément, en commençant par les valeurs à l'échéance de l'option et en remontant jusqu'à la date initiale, de façon à calculer la valeur de l'option à cette date. À nouveau, seule la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage est nécessaire ; aucune hypothèse n'est imposée aux probabilités de hausse et de baisse du cours de l'action à chaque nœud.

Il existe une autre approche appelée « évaluation risque-neutre » Cette démarche montre qu'une option peut-être évaluée en faisant comme si les agents étaient neutres face au risque. Ce chapitre a montré, à travers des exemples algébriques et numériques, que la méthode fondée sur l'absence d'arbitrage et la technique d'évaluation risque-neutre sont équivalentes et conduisent à la même évaluation de l'option.

Le delta d'une option sur action, noté Δ, exprime l'effet sur la valeur de l'option d'une légère variation du cours de l'action. C'est le ratio de la variation de valeur de l'option sur la variation de cours de l'action. Pour construire un portefeuille sans risque, un investisseur doit acheter Δ actions pour chaque option vendue. L'examen d'un arbre binomial standard révèle que le delta varie pendant la vie de l'option. Cela implique que, pour couvrir une position particulière en options, il faut ajuster régulièrement la quantité d'actions sous-jacentes détenue.

L'utilisation des arbres binomiaux pour d'autres types d'options repose sur les mêmes principes que ceux appliqués pour évaluer les options sur actions. Au chapitre 21, nous compléterons l'étude relative à leur construction et à leur utilisation pratique.

Références complémentaires

Coval J. E. et J. Shumway, "Expected Options Returns", *Journal of Finance*, 56 (3), 2001, 983-1009.

Cox J., S. Ross et M. Rubinstein, "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, octobre 1979, 229-264.

Rendleman R. et B. Bartter, "Two State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34, 1979, 1092-1111.

Shreve, S. E., *Stochastic Calculus for Finance I : The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, New York, 2004.

Problèmes et exercices

13.1 Une action est actuellement cotée 40 €. On sait qu'au bout d'un mois, la valeur de l'action sera 42 € ou 38 €. Le taux d'intérêt sans risque est 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 1 mois et de prix d'exercice 39 € ?

13.2 Expliquez les approches fondées sur l'absence d'opportunités d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre, pour évaluer une option européenne sur un arbre binomial à une seule période.

13.3 Que signifie le delta d'une option ?

13.4 Une action est actuellement cotée 50 €. On sait que dans six mois, elle vaudra 45 € ou 55 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un put européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 50 € ?

13.5 Une action est actuellement cotée 100 €. À la fin de chacune des deux périodes de six mois, sa valeur augmentera de 10 % ou diminuera de 10 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 1 an et de prix d'exercice 100 € ?

13.6 En conservant les données de l'exercice précédent (13.5), évaluez un put européen d'échéance 1 an et de prix d'exercice 100 € ? Vérifiez que les valeurs du put et du call européens valident la parité Call-Put.

13.7 Indiquez les expressions de u et d en fonction de la volatilité.

13.8 Considérons une action dont les variations, au cours de la vie d'une option européenne, sont gouvernées par un arbre binomial à deux périodes. Expliquez pourquoi il n'est pas possible de définir, dès la date initiale, une position en options et en actions qui reste sans risque tout au long de la vie de l'option.

13.9 Une action est actuellement cotée 50 €. On sait que dans deux mois, elle vaudra soit 53 €, soit 48 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 2 mois et de prix d'exercice 49 € ? Utilisez le raisonnement d'arbitrage.

13.10 Une action est actuellement cotée 80 €. On sait que dans quatre mois, elle vaudra soit 75 €, soit 85 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 4 mois et de prix d'exercice 80 € ? Utilisez le raisonnement d'arbitrage.

13.11 Une action est actuellement cotée 40 €. On sait que dans trois mois, elle sera cotée soit 45 €, soit 35 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an. Calculez la valeur d'un put européen d'échéance 3 mois et de prix d'exercice de 40 € ? Vérifiez que les méthodes fondées sur l'absence d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre aboutissent au même résultat.

13.12 Une action est actuellement cotée 50 €. À la fin de chacune des deux périodes de trois mois, sa valeur augmentera de 6 % ou diminuera de 5 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 51 € ?

13.13 En conservant les données de l'exercice précédent (13.12), déterminez la valeur d'un put européen à six mois dont le prix d'exercice est 51 € ? Vérifiez que la les valeurs du put et du call européens obéissent à la relation de parité Put-Call. Si l'option de vente était américaine, serait-il optimal d'exercer prématurément l'option à l'un des nœuds de l'arbre ?

13.14 Une action vaut aujourd'hui 25 €. Dans deux mois, elle sera cotée soit 23 €, soit 27 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Soit S_T, le cours de l'action dans deux mois. Quelle est la valeur d'un produit dérivé qui offrirait un payoff égal à S_T^2 à cette date ?

13.15 Calculez les valeurs de u, d et p quand on construit un arbre d'évaluation d'une option sur devise. Chaque pas correspond à un mois, le taux sans risque domestique est de 5 %, le taux étranger de 8 % et la volatilité annuelle de 12 %.

13.16 La volatilité d'une action sans dividendes de valeur 78 € est de 30 %. Le taux sans risque est de 3 % par an pour toutes les échéances. Calculer les valeurs de u, d et p pour une période de 2 mois. Quelle serait la valeur fournie par un arbre binomial à deux périodes pour un call européen à 4 mois et de prix d'exercice 80 € ? Supposons qu'un trader vende 1 000 options (10 contrats). Quelle

est la position en actions qui permettrait de couvrir sa position au moment de l'opération ?

13.17 Un indice boursier est actuellement égal à 1 500. Sa volatilité est de 18 %. Le taux sans risque est de 4 % par an pour toutes les échéances et le taux de dividende de l'indice est de 2,5 %. Calculez les valeurs de u, d et p pour une période de 6 mois. Quelle serait la valeur fournie par un arbre binomial à deux périodes pour un put américain à 12 mois et de prix d'exercice 1 480 ?

13.18 Le prix à terme d'une matière première est de 90 €. Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer (a) un call américain à 9 mois et de prix d'exercice 93 € et (b) un put américain à 9 mois et de prix d'exercice 93 €. La volatilité est de 28 % et le taux sans risque de 3 % par an pour toutes les échéances.

Questions complémentaires

13.19 Le prix actuel d'une action de biotech ne délivrant aucun dividende est de 140 € avec une volatilité de 25 %. Le taux sans risque est de 4 %. Pour une période de 3 mois :

a. quel est le pourcentage de hausse dans l'état up ?

b. quel est le pourcentage de hausse dans l'état down ?

c. quelle est la probabilité de hausse dans l'univers risque-neutre ?

d. quelle est la probabilité de baisse dans l'univers risque-neutre ?

Utilisez un arbre à deux périodes pour évaluer un call et un put européens à 6 mois. Le prix d'exercice est de 150 € dans les deux cas.

13.20 Dans le problème 13.19, on suppose qu'un trader vend 10 000 calls européens et que l'arbre binomial à deux périodes décrit le comportement de l'action. Combien faut-il d'actions pour couvrir le call européen à 6 mois pour la première et la deuxième période de 3 mois ? Pour la deuxième période, considérez à la fois le cas où le prix de l'action monte pendant la première période et le cas où il baisse au cours de cette même période.

13.21 Une action est actuellement cotée 50 €. Dans six mois, elle sera cotée soit 60 €, soit 42 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 12 % par an. Calculez la valeur d'un call européen à 6 mois de prix d'exercice 48 €. Vérifiez que les méthodes fondées sur l'absence d'arbitrage et sur l'évaluation risque-neutre conduisent au même résultat.

13.22 Une action vaut aujourd'hui 40 €. À la fin de chacune des deux périodes de trois mois, sa valeur augmentera de 10 % ou diminuera de 10 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 12 % par an.

a. Quelle est la valeur d'un put européen à six mois et de prix d'exercice 42 € ?

b. Quelle est la valeur d'un put américain à six mois et de prix d'exercice 42 € ?

13.23 Par tâtonnement, estimez, dans la question précédente (13.22), le prix d'exercice à partir duquel il est optimal d'exercer immédiatement.

13.24 Une action est actuellement cotée 30 €. À la fin de chaque mois et pour les deux prochains mois, sa valeur augmentera de 8 % ou diminuera de 10 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Utilisez un arbre à deux périodes

pour calculer la valeur d'un produit dérivé qui rapporte $[\max(30 - S_T ; 0)]^2$, où S_T représente la valeur de l'action dans deux mois. Si ce produit dérivé est de type américain, devra-t-il être exercé prématurément ?

13.25 Soit un call européen de prix d'exercice 40 €, sur une action ne versant pas de dividendes et cotée 40 €. Le taux sans risque est 4 % par an, la volatilité, 30 % par an et la durée de vie de l'option est de six mois.

a. Calculez u, d et p pour un arbre à deux périodes.

b. Évaluez l'option en utilisant l'arbre à deux périodes.

c. Vérifiez que le logiciel DerivaGem fournit le même résultat.

d. Utilisez DerivaGem pour évaluer l'option avec 5, 50, 100 et 500 périodes.

13.26 Refaites l'exercice 13.25 avec un put américain sur un contrat futures. Le prix d'exercice est de 50, le taux sans risque est de 10 %, la maturité est de 6 mois et la volatilité est de 40 % par an.

13.27 La note de bas de page 1 indique que le taux d'actualisation à utiliser pour le payoff du call du graphique 13.1, dans l'univers réel, est 42,6 %. Montrez que, si l'option est un put et non un call, ce taux est égal à $-52{,}5$ %. Comment expliquez-vous la différence entre ces deux taux ?

13.28 Un indice boursier est actuellement à 990, le taux sans risque est de 5 % et le taux de dividende de l'indice est de 2 %. Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer un put américain à 18 mois et de prix d'exercice 1 000 lorsque la volatilité est de 20 % par an. Quel gain obtiendrait le détenteur de l'option s'il était en mesure d'exercer avant l'échéance ? À quel moment le réaliserait-il ?

13.29 Calculez la valeur d'un call américain à 9 mois portant sur 1 million d'unités d'une monnaie étrangère en utilisant un arbre binomial à trois périodes. Le taux de change actuel est de 0,79 et le prix d'exercice est de 0,80 (tous deux exprimés en euros par unité de la devise étrangère). La volatilité du taux de change est de 12 % par an. Les taux sans risque nationaux et étrangers sont respectivement de 2 % et 5 %. Quelle position initiale faut-il adopter dans la devise étrangère pour couvrir le risque ?

Annexe

Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton à partir d'un arbre binomial

Il existe une façon simple d'obtenir le fameux modèle de Black-Scholes-Merton pour évaluer une option européenne sur une action ne versant pas de dividendes. Elle consiste à faire tendre le nombre de périodes d'un arbre binomial vers l'infini.

Supposons qu'un arbre à n périodes soit utilisé pour évaluer une option d'achat européenne de prix d'exercice K et de durée T. Chaque période est de longueur T/n. S'il y a eu un nombre de hausses j et un nombre de baisses $n-j$ sur l'arbre, le prix final de l'action est défini par $S_0\,u^j d^{n-j}$, où u est le coefficient de hausse, d le coefficient de baisse, et S_0 le prix initial de l'action. Le payoff d'une option d'achat européenne est alors de :

$$\max\left(S_0\,u^j\,d^{n-j}-K\,;0\right)$$

Grâce aux propriétés de la distribution binomiale, la probabilité d'avoir exactement j hausses et $n-j$ baisses est donnée par :

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,p^j(1-p)^{n-j}$$

Il s'ensuit que l'espérance du payoff de l'option d'achat est :

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,p^j\,(1-p)^{n-j}\max\left(S_0\,u^j\,d^{n-j}-K\,;0\right)$$

Lorsque l'arbre évolue dans un univers risque-neutre, nous pouvons actualiser au taux sans risque pour obtenir la valeur de l'option :

$$c=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,p^j\,(1-p)^{n-j}\max\left(S_0\,u^j\,d^{n-j}-K\,;0\right) \qquad \text{(13A.1)}$$

Les termes de l'équation (13A.1) ne sont pas nuls lorsque le cours final de l'action est supérieur au prix d'exercice. Ainsi, quand :

$$S_0\,u^j\,d^{n-j}>K$$

soit :

$$\ln\left(S_0/K\right)>-j\ln\left(u\right)-(n-j)\ln\left(d\right)$$

Puisque $u=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}}$ et $d=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}$, cette condition devient :

$$\ln(S_0/K)>n\sigma\sqrt{T/n}-2\,j\,\sigma\sqrt{T/n}$$

soit :

$$j>\frac{n}{2}-\frac{\ln\left(S_0/K\right)}{2\,\sigma\sqrt{T/n}}$$

L'équation (13A.1) peut alors s'écrire :

$$c=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{j>\alpha}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,p^j(1-p)^{n-j}\left(S_0\,u^j\,d^{n-j}-K\right)$$

où :

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0/K)}{2\,\sigma\sqrt{T/n}}.$$

Pour simplifier, on définit :

$$U_1 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\, p^j\,(1-p)^{n-j}\, u^j\, d^{n-j} \tag{13A.2}$$

et :

$$U_2 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\, p^j\,(1-p)^{n-j} \tag{13A.3}$$

de sorte que :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\,(S_0 U_1 - K U_2) \tag{13A.4}$$

Considérons U_2 en premier lieu. Comme chacun sait, la loi binomiale tend vers une distribution normale lorsque le nombre d'essais tend vers l'infini. Plus précisément, quand il y a n essais et que p est la probabilité de succès, la distribution de probabilité du nombre de succès est approximée par une loi normale de moyenne np et d'écart-type $\sqrt{np\,(1-p)}$.

La variable U_2 dans l'équation (13A.3) représente la probabilité du nombre de succès supérieurs à α. Grâce aux propriétés de la loi normale, il s'ensuit que, pour n grand :

$$U_2 = N\left(\frac{np-\alpha}{\sqrt{np\,(1-p)}}\right) \tag{13A.5}$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale. En substituant α par sa valeur, on obtient :

$$U_2 = N\left(\frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{p\,(1-p)}} + \frac{\sqrt{n}\left(p-1/2\right)}{\sqrt{p\,(1-p)}}\right) \tag{13A.6}$$

Grâce aux équations (12.13) et (12.15), on peut écrire :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{rT/n} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}}$$

En étendant les fonctions exponentielles dans une série, nous voyons que, lorsque n tend vers l'infini $p\,(1-p)$, tend vers $1/4$ et $\sqrt{n}\left(p-1/2\right)$ tend vers :

$$\frac{(r-\sigma^2/2)\,\sqrt{T}}{2\sigma}$$

de sorte que, dans la limite, lorsque n tend vers l'infini, l'équation (13A.6) devient :

$$U_2 = N\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)\;T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{13A.7}$$

Attachons-nous à présent à évaluer U_1. Par l'équation (13.A.2), on sait que :

$$U_1 = \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!}\,(pu)^j\,[(1-p)\,d]^{n-j} \tag{13A.8}$$

Définissons :

$$q = \frac{pu}{pu + (1-p)\,d} \tag{13A.9}$$

Il en découle que :

$$1 - q = \frac{(1-p)\,d}{pu + (1-p)\,d}$$

et nous pouvons écrire l'équation (13A.8) comme suit :

$$U_1 = [pu + (1-p)\,d]^n \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!j!}\,(q)^j\,(1-q)^{n-j}.$$

Puisque l'espérance de rentabilité dans un univers risque-neutre est le taux sans risque r, il en découle que $pu + (1-p)\ d = \mathrm{e}^{rT/n}$ et que :

$$U_1 = \mathrm{e}^{rT} \sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!j!}\,(q)^j\,(1-q)^{n-j}$$

Cela démontre que U_1 implique une loi normale où la probabilité q d'une hausse est supérieure à p. En approximant la distribution binomiale avec une loi normale, nous obtenons, de façon analogue à l'équation (13A.5) :

$$U_1 = \mathrm{e}^{rT}\,N\left(\frac{nq - \alpha}{\sqrt{nq\,(1-q)}}\right).$$

En substituant α, on obtient, comme dans l'équation (13A.6) :

$$U_1 = \mathrm{e}^{rT}\,N\left(\frac{\ln\left(S_0/K\right)}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{q\,(1-q)}} + \frac{\sqrt{n}\left(q - 1/2\right)}{\sqrt{q\,(1-q)}}\right)$$

En substituant u et d dans l'équation (13A.9), on obtient :

$$q = \left(\frac{\mathrm{e}^{rT/n} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}}}{\mathrm{e}^{rT/n}}\right)$$

En développant les fonctions exponentielles en série, nous voyons que, lorsque n tend vers l'infini, $q\,(1-q)$ tend vers $1/4$ et $\sqrt{n}\left(q - 1/2\right)$ tend vers :

$$\frac{(r + \sigma^2/2)\,\sqrt{T}}{2\sigma}$$

avec comme résultat :

$$U_1 = \mathrm{e}^{rT}\,N\left(\frac{\ln\left(S_0/K\right) + (r + \sigma^2/2)\ T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{13A.10}$$

On déduit des équations (13A.4), (13A.7) et (13A.10) que :

$$c = S_0\,N(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\ T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)\ T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Il s'agit du modèle d'évaluation d'une option d'achat européenne de Black-Scholes-Merton. Il sera développé au chapitre 15 et une démonstration alternative sera fournie dans l'annexe de ce même chapitre.

Chapitre 14

Processus de Wiener et lemme d'Itô

L'évolution aléatoire d'une variable au cours du temps peut être modélisée par un « processus stochastique », c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indexées par le temps. Les processus stochastiques se divisent en deux catégories : les processus en temps discret et les processus en temps continu. Dans un processus en temps discret, les changements de valeur de la variable surviennent à des dates déterminées, tandis qu'un processus en temps continu peut varier à n'importe quel instant. À une date donnée, la loi de probabilité de la variable considérée peut être discrète ou continue. Si elle est continue, la variable prend ses valeurs dans un intervalle et l'on dira que l'espace des états du processus est continu, alors que si la loi est discrète, la variable peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs et l'on parlera d'espace d'états discret.

Ce chapitre présente un processus stochastique d'évolution du cours des actions en temps continu et à espace d'états continu. Comprendre les propriétés de ce processus est la première étape d'une bonne appréhension de l'évaluation des options et des autres produits dérivés complexes. Notez qu'en pratique les cours ne suivent pas, *stricto sensu*, un processus en temps continu et à espace d'états continu. En effet, par nature, ces cours sont des variables discrètes (du fait de l'existence de variations minimales, un cent par exemple) et les variations ne peuvent être observées que lorsque le marché est ouvert, le temps n'est donc pas non plus véritablement continu. Toutefois, un processus de ce type se révèle une approximation pratique dans bien des cas.

Beaucoup pensent que les processus stochastiques en temps continu sont si compliqués que leur usage devrait être réservé aux ingénieurs et autres spécialistes. Ce n'est pas le cas. L'obstacle principal, pour comprendre ces processus, est la notation utilisée. Ici, nous présentons une approche pas à pas visant à amener le lecteur à franchir cet obstacle. Nous expliquons également un résultat important, le lemme d'Itô, essentiel à la pleine compréhension de la théorie sous-jacente à l'évaluation des produits dérivés.

14.1 La propriété de Markov

Un processus de Markov est un cas particulier de processus stochastique pour lequel seule la valeur présente d'une variable est utile pour anticiper sa distribution future. L'historique et la façon dont le présent a émergé d'une trajectoire passée ne sont pas pertinents. Les cours des actions sont généralement censés suivre des processus de Markov : les prédictions de la valeur future d'une action n'ont aucun rapport avec son prix de la semaine précédente ou de l'année précédente. La seule information pertinente est que le prix actuel est, par exemple, de 100 €[1]. Les cours futurs sont par nature incertains et ne peuvent s'exprimer qu'en termes de distributions de probabilité. Le processus stochastique de cours d'un titre est markovien si la distribution de probabilité de ce cours à une date future ne dépend pas de la trajectoire spécifique suivie par le cours dans le passé.

Cette propriété est cohérente avec la forme faible de l'efficience des marchés. Celle-ci établit que le cours actuel des actions intègre toutes les informations contenues dans l'historique des cours. Si la forme faible de l'efficience des marchés n'était pas vérifiée, les analystes techniques pourraient obtenir de meilleures rentabilités que la moyenne du marché en interprétant les graphes d'historiques de cours. Les études empiriques montrant qu'ils en sont capables sont très rares.

C'est la compétition sur le marché qui est censée assurer la forme faible de l'efficience. De très nombreux investisseurs suivent le marché et essaient d'en tirer profit à chaque instant. Cela conduit à une situation où le cours d'une action reflète, à chaque instant, les informations des cours passés. Supposons qu'on ait découvert qu'une forme particulière de graphe de cours donne 65 % de chances d'assister à une hausse conséquente. Les investisseurs essaieraient alors d'acheter l'action dès l'apparition de cette configuration, et la demande pour ce titre augmenterait immédiatement. Le cours s'élèverait donc aussitôt et l'effet observé disparaîtrait, tout comme l'opportunité de gain.

14.2 Les processus stochastiques en temps continu

Considérons une variable suivant un processus de Markov ; supposons que sa valeur présente soit de 10 et que la variation de celle-ci sur une année suive $\phi(0,1)$, où $\phi(\mu,\sigma)$ est une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variation de valeur de cette variable sur deux ans ?

La variation sur deux ans est la somme de deux lois normales, chacune d'elles ayant une moyenne nulle et un écart-type égal à 1,0. Puisque le processus est markovien, les deux variations successives sont indépendantes. Or, l'addition de deux variables normales indépendantes suit encore une loi normale dont la moyenne est la somme des moyennes et la variance est la somme des variances[2]. La moyenne de la variation sur

1. Les propriétés statistiques de l'historique du cours d'une action IBM pourraient être utilisées pour déterminer les caractéristiques du processus stochastique suivi par le cours de l'action (sa volatilité notamment). Ce que nous disons ici, c'est que la trajectoire passée du cours n'est pas pertinente.

2. La variance d'une distribution de probabilité est le carré de l'écart-type. La variance d'une variation de la valeur de la variable considérée en une année est donc de 1,0.

deux ans est donc nulle, et la variance est égale à 2,0. La variation de la variable sur deux ans suit, par conséquent, $\phi(0,\sqrt{2})$.

Considérons maintenant la variation de cette variable sur six mois. La variance sur un an est égale à la variance durant les six premiers mois, plus la variance sur les six mois suivants. Si nous supposons qu'elles suivent la même loi, la variance sur six mois doit être égale à 0,5. L'écart-type correspondant est alors égal à $\sqrt{0,5}$. La distribution de probabilité de la variation de valeur de la variable sur six mois suit donc $\phi(0,\sqrt{0,5})$.

De manière plus générale, la variation durant n'importe quelle durée de longueur T suit $\phi(0,\sqrt{T})$. En particulier, sur une très courte durée de longueur Δt, la loi est $\phi(0,\sqrt{\Delta t})$.

La présence de la racine carrée dans ces résultats peut surprendre. Elle résulte des propriétés des processus de Markov, pour lesquels les variances des accroissements dans des périodes de temps successives s'ajoutent. En revanche, les écarts-types des variations sur ces mêmes périodes ne sont pas, eux, additifs. La variance de la variation de la variable de notre exemple est de 1,0 par an, elle est donc de 2,0 pour deux ans, et de 3,0 pour trois ans. Les écarts-types pour deux et trois ans sont, respectivement, égaux à $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Ces résultats expliquent pourquoi on dit souvent que l'incertitude est proportionnelle à la racine carrée du temps.

Les processus de Wiener

Le processus en temps continu suivi par la variable que nous venons d'évoquer est connu sous le nom de « processus de Wiener standard ». C'est un type particulier de processus de Markov avec des accroissements espérés nuls et une variance de ces accroissements égale à 1,0 par an. Ce processus est utilisé en physique pour décrire le mouvement d'une particule sujette à un grand nombre de chocs moléculaires. Il est parfois appelé mouvement brownien.

Exprimée de façon formelle, une variable z suit un processus de Wiener si elle possède les deux propriétés suivantes :

> **Propriété 1**. La variation Δz durant un court intervalle de temps de longueur Δt s'écrit :
>
> $$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{14.1}$$
>
> où ε suit une loi normale, $\phi(0,1)$.
>
> **Propriété 2**. Les valeurs de Δz pour deux courts intervalles de longueur Δt, ne se chevauchant pas, sont indépendantes.

Il découle de la première propriété que Δz suit une distribution normale de moyenne nulle, d'écart-type $\sqrt{\Delta t}$ et de variance Δt. La seconde propriété implique que z suit un processus de Markov.

Considérons l'accroissement de z sur une période T relativement longue. On peut l'écrire $z(T) - z(0)$. Il peut être décomposé en la somme des accroissements de z dans N petits intervalles de longueur Δt où :

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

Ainsi :

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{14.2}$$

où les ε_i (i = 1, 2, ..., N) suivent des lois $\phi(0,1)$. Selon la seconde propriété des processus de Wiener, les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes. On peut donc déduire de l'équation (14.2) que $z(T) - z(0)$ suit une loi normale de moyenne nulle, de variance $N\Delta t = T$ et d'écart-type $\sqrt{T}$. Ce résultat est bien cohérent avec ce qui a été exposé plus haut dans cette section.

■ **Exemple 14.1** Supposons que la valeur, z, d'une variable qui suit un processus de Wiener soit initialement égale à 25 et que le temps soit mesuré en années. Au bout d'un an, la valeur de la variable est distribuée selon une loi normale de moyenne 25 et d'écart-type 1,0. À l'horizon de cinq ans, elle est distribuée selon une loi normale de moyenne 25 et d'écart-type $\sqrt{5}$, soit 2,236. L'incertitude quant à la valeur de la variable à une certaine date dans le futur, mesurée par son écart-type, augmente comme la racine carrée de l'horizon temporel considéré.

Dans le calcul différentiel usuel, il est habituel de procéder par passage à la limite en faisant tendre l'amplitude des variations vers zéro. Ainsi, $dx = a\,dt$ est utilisée pour spécifier la limite de $\Delta x = a\Delta t$ quand $\Delta t \to 0$. Nous pouvons utiliser les mêmes notations lorsque nous traitons de calcul stochastique. La notation dz s'interprète comme la limite de Δz quand $\Delta t \to 0$.

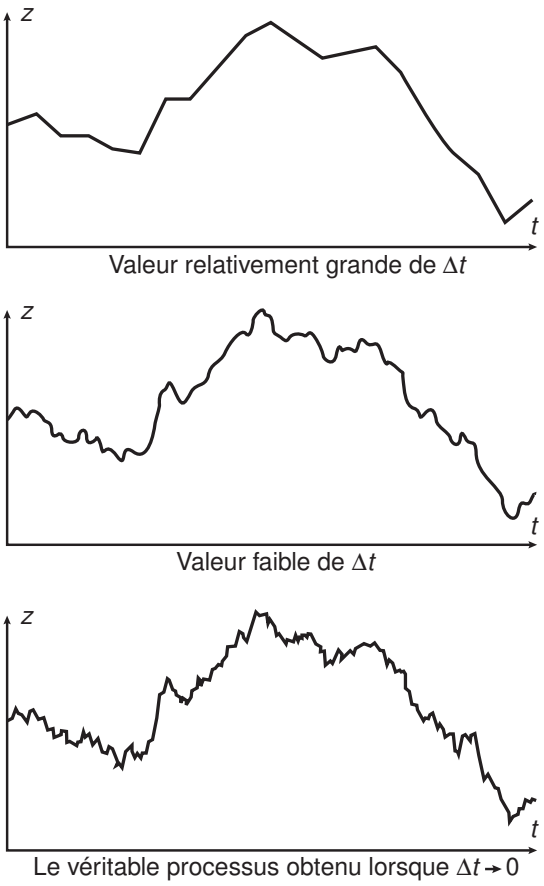
Le graphique 14.1 illustre l'évolution de la trajectoire suivie par z lorsque $\Delta t \to 0$.

Il faut noter que cette trajectoire devient de plus en plus agitée et en dents de scie. Dans un intervalle de longueur Δt, l'amplitude des variations de z est proportionnelle à $\sqrt{\Delta t}$, et lorsque Δt tend vers zéro, $\sqrt{\Delta t}$ devient infiniment grand par rapport à Δt. Cela conduit à deux propriétés surprenantes des processus de Wiener.

1. L'espérance mathématique de la longueur du trajet suivi par z dans tout intervalle de temps est infinie.
2. Quel que soit le nombre x considéré, l'espérance mathématique du nombre de fois où z est égal à x, dans n'importe quel intervalle de temps, est infinie. En d'autres termes, le processus passe en moyenne une infinité de fois par le niveau x.

Le processus de Wiener général

Le processus de Wiener standard, z, décrit jusque-là, a un paramètre de tendance centrale, encore appelé *drift* dans la terminologie anglo-saxonne, égal à zéro, et un paramètre de variance égal à 1,0. Le drift est en fait l'espérance de variation du processus par unité de temps. Un drift nul signifie donc que l'espérance de la valeur de z à une date future quelconque est égale à sa valeur actuelle. Le paramètre de variance égal à 1,0 signifie que la variance de l'accroissement de z dans un intervalle de temps de longueur T est égale à T.



Graphique 14.1 : Les différentes formes de processus de Wiener quand $\Delta t \to 0$ dans l'équation (14.1)

Un processus de Wiener général pour une variable x peut être défini en fonction de dz ainsi :

$$dx = a\,dt + b\,dz \tag{14.3}$$

où a et b sont des constantes.

L'équation (14.3) se comprend mieux en examinant les deux termes du membre de droite séparément. Le terme $a\,dt$ signifie que x a un drift égal à a. Sans le terme $b\,dz$, l'équation serait :

$$dx = a\,dt$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = a$$

L'intégration de cette équation par rapport au temps donne :

$$x = x_0 + at$$

où x_0 est la valeur de x à la date zéro. Dans une période de longueur T, la valeur de x augmente de aT. Le terme $b\,dz$ dans le membre de droite de l'équation (14.3) peut être considéré comme l'ajout de bruit à la trajectoire suivie par x. Cette quantité de bruit est égale à b fois celle apportée par un processus de Wiener standard. Les variations d'un processus de Wiener standard ont un écart-type égal à 1 par unité de temps. Si on

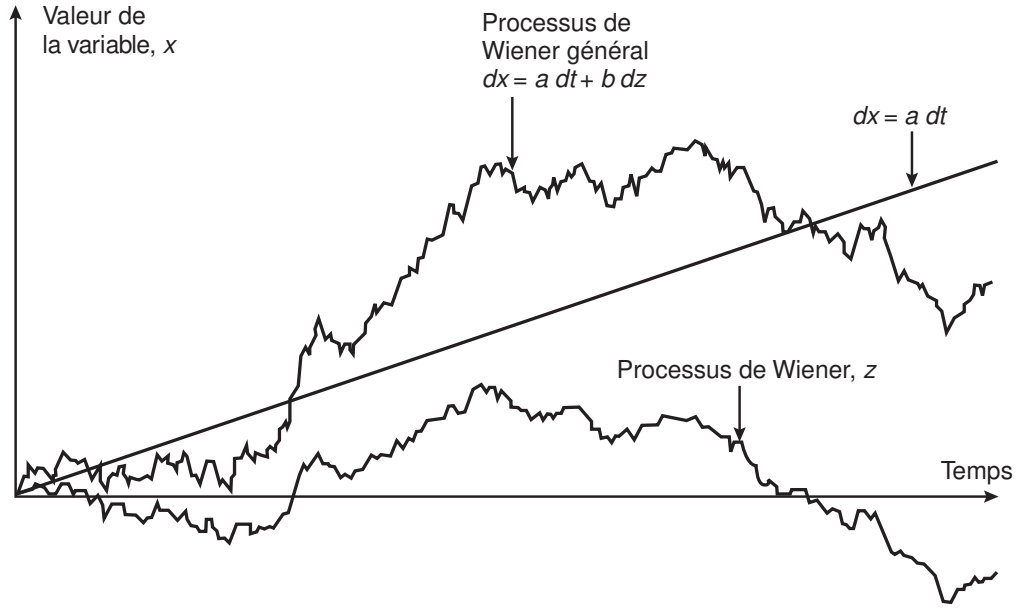
multiplie par b ces variations, l'écart-type est aussi multiplié par b. Dans un intervalle de longueur Δt, la variation Δx de x est déduite des équations (14.1) et (14.3) :

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

où, comme précédemment, ε suit une loi normale centrée réduite. Ainsi, la distribution de Δx suit une loi normale d'espérance $a\Delta t$, d'écart-type $b\sqrt{\Delta t}$ et donc de variance $b^2\Delta t$.

Un raisonnement semblable à celui utilisé pour le processus de Wiener standard montre que la variation de x sur tout intervalle de longueur T est normalement distribuée avec une moyenne aT, un écart-type $b\sqrt{T}$ et une variance b^2T.

Ainsi, le processus de Wiener général défini dans l'équation (14.3) a un drift (c'est-à-dire une variation moyenne par unité de temps) égal à a et un paramètre de variance (c'est-à-dire une variance par unité de temps) égal à b^2. Ceci est illustré dans le graphique 14.2.



Graphique 14.2 : Processus de Wiener général : a = 0,3 ; b = 1,5

■ **Exemple 14.2** Considérons une entreprise dont la trésorerie, mesurée en milliers d'euros, suit un processus de Wiener général avec un drift de 20 (l'unité de temps est l'année) et un paramètre de variance de 900. Initialement, la trésorerie est égale à 50. À l'horizon d'une année, la trésorerie suit une loi normale de moyenne 70 et d'écart-type $\sqrt{900}$, soit 30. À l'horizon de six mois, elle suit une distribution normale de moyenne 60 et d'écart-type $30\sqrt{0,5}$, soit 21,21. L'incertitude quant à la trésorerie à n'importe quelle date future, mesurée par son écart-type, augmente comme la racine carrée du temps restant à courir jusqu'à cette date. Notez que la trésorerie peut devenir négative (nous pourrions interpréter cela comme une situation dans laquelle l'entreprise emprunte des fonds).

Les processus d'Itô

Les paramètres a et b du processus de Wiener général sont constants. Un processus stochastique encore plus général, appelé processus d'Itô, peut être défini si l'on autorise les paramètres a et b à être des fonctions de la variable x et du temps t. Un processus d'Itô peut alors s'écrire :

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz \tag{14.4}$$

À la fois le drift et le paramètre de variance d'un processus d'Itô sont susceptibles de varier au fil du temps. Dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$, la valeur du processus x devient $x + \Delta x$, avec :

$$\Delta x = a\,(x,t)\,\Delta t + b\,(x,t)\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

Cette relation entraîne une petite approximation. Elle suppose en effet que le drift et le paramètre de variance de x restent constants, égaux respectivement à $a(x,t)$ et $b(x,t)^2$, pendant l'intervalle de temps séparant t et $t + \Delta t$.

Le processus de l'équation (14.4) est markovien car la variation de x à la date t ne dépend pas de la trajectoire passée, mais seulement de la valeur atteinte à cette date. Un processus non markovien serait, par exemple, un processus dans lequel les paramètres a et b dépendent des valeurs passées du processus.

14.3 Le processus de cours des actions

Dans cette section, nous présentons le processus stochastique généralement retenu pour modéliser le cours d'une action ne versant pas de dividendes.

Il est tentant de représenter l'évolution d'un tel cours par un processus de Wiener général, c'est-à-dire avec un drift et un paramètre de variance constants. Toutefois, ce modèle ne prend pas en compte un aspect fondamental de l'évolution du cours des actions : le fait que l'espérance de rentabilité requise par les investisseurs est indépendante du prix de l'action. Si les investisseurs exigent 14 % d'espérance de rentabilité par an lorsque l'action est cotée 10 €, alors toutes choses égales d'ailleurs, ils exigeront également 14 % par an lorsque l'action cote 50 €. Il suffit pour s'en convaincre d'imaginer une entreprise réalisant une opération sur titres consistant à échanger cinq actions anciennes contre une nouvelle. Le prix de l'action sera multiplié par 5 sans que l'exigence de rentabilité soit modifiée.

En clair, l'hypothèse d'un drift constant pour le cours de l'action ne convient pas et doit être remplacée par l'hypothèse d'un drift constant pour le processus de rentabilité. Si S est la valeur de l'action à la date t, le drift de S sera supposé égal à $\mu\,S$. Dans un court intervalle de temps de longueur Δt, l'espérance de l'augmentation de S est égale à $\mu\,S\Delta t$. Le paramètre μ représente alors le taux de rentabilité espéré de l'action.

Si la volatilité du cours de l'action est toujours égale à zéro, ce modèle implique que :

$$\Delta S = \mu\,S\,\Delta t$$

et, à la limite, lorsque $\Delta t \to 0$:

$$dS = \mu\,S\,dt$$

soit :

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt$$

En intégrant cette équation entre $t = 0$ et $t = T$, nous obtenons :

$$S_T = S_0\, \mathrm{e}^{\mu T} \tag{14.5}$$

avec S_0 et S_T qui sont respectivement les cours de l'action aux dates 0 et T. L'équation (14.5) montre que, lorsque le paramètre de variance est nul, le cours de l'action croît à un taux composé continu μ par unité de temps.

En pratique, évidemment, la volatilité n'est pas nulle. On peut alors raisonnablement supposer que les variations de cours, exprimées en pourcentage, dans un petit intervalle de longueur Δt, suivent la même loi quel que soit le cours de l'action. Autrement dit, l'incertitude sur le taux de rentabilité à laquelle fait face un investisseur est la même, que l'action soit cotée 10 € ou 50 €. Cela suggère que l'écart-type de la variation de cours dans un intervalle de longueur Δt devrait être proportionnel au cours de l'action. Cette remarque conduit alors au modèle suivant :

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma S\, dz$$

ou encore :

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dz \tag{14.6}$$

L'équation (14.6) est le modèle le plus courant d'évolution des cours. La variable σ représente la volatilité de l'action ; μ est son espérance de rentabilité. Dans un univers risque-neutre, μ est remplacé par le taux sans risque r.

Le modèle en temps discret

Le processus de fluctuation des cours d'action développé dans la section précédente est appelé mouvement brownien géométrique. La version en temps discret est :

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\, \Delta t + \sigma\, \varepsilon\, \sqrt{\Delta t} \tag{14.7}$$

soit :

$$\Delta S = \mu\, S\, \Delta t + \sigma\, S\, \varepsilon\, \sqrt{\Delta t} \tag{14.8}$$

La variable ΔS est la variation du cours de l'action S dans un intervalle de temps de longueur Δt, et ε est une variable normale centrée réduite. Le paramètre μ est la rentabilité espérée de l'action par unité de temps, et le paramètre σ est la volatilité de l'action. Ces deux paramètres sont supposés constants.

Le terme de gauche de l'équation (14.7) exprime la rentabilité produite par l'action pendant un court intervalle de temps de longueur Δt. Le terme $\mu\, \Delta t$ représente donc l'espérance de rentabilité, alors que le terme $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ est la composante stochastique de la dite rentabilité. La variance de la composante stochastique (et donc de la rentabilité dans son ensemble) s'écrit $\sigma^2 \Delta t$. Ceci est cohérent avec la définition de la volatilité σ donnée à la section 13.7 : σ est tel que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ est l'écart-type de la rentabilité dans un court intervalle de temps Δt.

L'équation (14.7) montre que $\Delta S/S$ suit une distribution normale de moyenne $\mu\,\Delta t$ et d'écart-type $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Autrement dit :

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi\left(\mu\,\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \tag{14.9}$$

■ **Exemple 14.3** Soit une action qui ne verse pas de dividendes, sa volatilité est de 30 % par an et son taux de rentabilité composé en continu a pour espérance 15 % par an. Ainsi, dans ce cas, μ = 0,15 et σ = 0,30. Le processus décrivant le cours de l'action est alors :

$$\frac{dS}{S} = 0{,}15\,dt + 0{,}30\,dz$$

Si S est le cours de l'action à une date particulière et si ΔS est l'augmentation du cours dans le prochain intervalle de temps, alors :

$$\frac{\Delta S}{S} = 0{,}15\,\Delta t + 0{,}30\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

où ε suit une loi normale centrée réduite. Considérons un intervalle de temps d'une semaine, soit 0,0192 an, et supposons que le cours initial de l'action soit de 100 €. Ainsi, Δt = 0,0192, et :

$$\Delta S = 0{,}00288\,S + 0{,}0416\,S\,\varepsilon$$

La simulation de Monte-Carlo

Une simulation de Monte-Carlo d'un processus stochastique est une procédure permettant de créer un échantillon aléatoire du processus. Nous l'utiliserons comme un moyen pour mieux comprendre la nature du processus de cours défini dans l'équation (14.6).

Reprenons la situation de l'exemple 14.3 avec une espérance de rentabilité de 15 % par an et une volatilité de 30 % par an. On a donc $\mu = 0{,}15$ et $\sigma = 0{,}30$.

La variation de prix hebdomadaire s'écrit :

$$\Delta S = 0{,}00288\,S + 0{,}0416\,S\varepsilon \tag{14.10}$$

Une trajectoire du cours de l'action sur dix semaines peut être simulée en opérant des tirages successifs de ε selon la loi $\phi\,(0{,}1)$ et en substituant le résultat de ces tirages dans l'équation (14.10). La fonction ALEA() d'Excel donne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Pour produire un échantillon aléatoire d'une loi normale centrée-réduite, on utilise alors l'instruction :

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA(.))

Le tableau 14.1 montre un ensemble particulier de résultats obtenus de cette manière.

Tableau 14.1 : Simulation d'un cours d'action lorsque μ = 0,15 et σ = 0,30 sur dix semaines

Cours de l'action au début de l'intervalle de temps	Réalisation de ε	Variation du cours de l'action durant l'intervalle de temps
100,00	0,52	2,45
102,45	1,44	6,43
108,88	−0,86	−3,58
105,30	1,46	6,70
112,00	−0,69	−2,89
109,11	−0,74	−3,04
106,06	0,21	1,23
107,30	−1,10	−4,60
102,69	0,73	3,41
106,11	1,16	5,43
111,54	2,56	12,20

Le cours initial est égal à 100 €. Au cours du premier intervalle de temps, la réalisation de ε est égale à 0,52. En utilisant l'équation (14.10), la variation durant cette période est donc :

$$\Delta S = 0{,}00288 \times 100 + 0{,}0416 \times 100 \times 0{,}52 = 2{,}45$$

Par conséquent, au début de la seconde période, le cours de l'action est égal à 102,45. La valeur de ε au tirage suivant est 1,44. L'équation (14.10) nous donne la variation de l'action au cours de cette seconde période :

$$\Delta S = 0{,}00288 \times 102{,}45 + 0{,}0416 \times 102{,}45 \times 1{,}44 = 6{,}43$$

Ainsi, au début de la période suivante, le cours de l'action est égal à 108,88, et ainsi de suite. Notez que, puisque le processus simulé est un processus de Markov, les tirages successifs de ε sont indépendants [3].

Il est important de réaliser que le tableau ne montre qu'une seule trajectoire du cours de l'action. D'autres échantillons aléatoires auraient conduit à des trajectoires différentes. N'importe quel intervalle de temps de longueur Δt peut être utilisé dans la simulation. À la limite, quand $\Delta t \to 0$, une description exacte du processus stochastique est obtenue. Le cours final de 111,54 de l'action du tableau 14.1 peut être vu comme une réalisation du cours de l'action au bout de dix semaines. En simulant de façon répétée les variations de cours, comme dans le tableau 14.1, on obtient une distribution de probabilité complète du cours de l'action à l'horizon considéré. La méthode de simulation de Monte-Carlo sera décrite plus en détail au chapitre 21.

3. En pratique, il est plus efficace de construire un échantillon de $\ln(S)$ que de S, comme nous le verrons à la section 21.6.

14.4 Les paramètres

Le processus présenté dans ce chapitre pour modéliser le cours des actions est caractérisé par deux paramètres : μ et σ, où μ est le taux de rentabilité espéré annuel. La plupart des investisseurs exigent une espérance de rentabilité élevée pour accepter de prendre des risques importants. Il s'ensuit que μ dépend du risque de l'action [4] et devrait également dépendre du niveau des taux d'intérêt de l'économie. Plus les taux sont élevés, plus les investisseurs exigeront une espérance de rentabilité sur les actions.

Heureusement, nous ne sommes pas concernés par les déterminants de μ dans tous leurs détails, puisque la valeur d'un actif dérivé, dont le sous-jacent est une action, est en général indépendante de μ. Le paramètre σ, volatilité de l'action, est au contraire d'une importance capitale pour déterminer la valeur de la plupart des actifs dérivés. Les différentes méthodes d'estimation de σ sont examinées au chapitre 15. En général, la volatilité d'une action est comprise entre 0,15 et 0,60 (soit de 15 % à 60 %).

L'écart-type de la variation de cours (exprimée en pourcentage) dans un intervalle de temps de longueur Δt est égal à $\sigma\sqrt{\Delta t}$. De manière approximative, l'écart-type de cette variation dans un intervalle de temps relativement long, de durée T, est égal à $\sigma\sqrt{T}$. La volatilité peut être interprétée comme l'écart-type de la variation du cours de l'action sur une année. Au chapitre 15, nous verrons que la volatilité d'une action est exactement égale à l'écart-type du taux de rentabilité composé continu de l'action en une année.

14.5 Les processus corrélés

Pour l'instant, nous n'avons considéré que des processus dépendant d'une seule source de risque. Nous étendons maintenant l'analyse au cas où plusieurs sources de risque corrélées sont présentes. Considérons les processus x_1 et x_2 caractérisés par :

$$dx_1 = a_1\,dt + b_1\,dz_1 \quad \text{et} \quad dx_2 = a_2\,dt + b_2\,dz_2$$

où z_1 et z_2 sont des processus de Wiener.

Les versions en temps discret de ces processus s'écrivent :

$$\Delta x_1 = a_1\Delta t + b_1\varepsilon_1\sqrt{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta x_2 = a_2\Delta t + b_2\varepsilon_2\sqrt{\Delta t}$$

où ε_1 et ε_2 sont des variables normales centrées réduites.

Les deux processus peuvent être simulés comme à la section 14.3 s'ils ne sont pas corrélés.

Si la corrélation entre les deux n'est pas nulle (elle est notée ρ), il faut tirer les échantillons de ε_1 et ε_2 d'une loi normale bivariée. Nous savons déjà comment obtenir, à l'aide d'Excel, des échantillons indépendants. À partir de deux variables normales indépendantes $u$et v, on peut construire des variables ε_1 et ε_2 corrélées en posant :

$$\varepsilon_1 = u \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \rho\,u + \sqrt{1-\rho^2}\,v$$

4. Plus précisément, μ dépend du risque non diversifiable (l'investisseur pouvant éliminer la partie du risque diversifiable, cette dernière n'exige aucune rémunération particulière).

Comme dans le cas général, les paramètres a et b peuvent être fonction des valeurs du processus. Ici, a_1 et b_1 sont susceptibles de dépendre de x_2 aussi bien que de x_1. De même, a_2 et b_2 sont susceptibles de dépendre de x_1 aussi bien que de x_2. Ces résultats peuvent être généralisés en tirant des échantillons de variables normales multivariées, lorsque $n$processus sont corrélés. Ce point sera détaillé au chapitre 21.

14.6 Le lemme d'Itô

La valeur d'une option sur action est une fonction du cours de l'action sous-jacente et du temps. De façon plus générale, la valeur d'un produit dérivé est une fonction des variables aléatoires sous-jacentes au produit dérivé, et du temps. Une analyse sérieuse des actifs dérivés nécessite une bonne compréhension du comportement des fonctions de variables aléatoires. Un résultat important dans ce domaine a été établi par le mathématicien Kiyosi Itô en 1951 [5]. Ce résultat est connu sous le nom de « lemme d'Itô ».

Supposons que la valeur d'une variable x suive un processus d'Itô :

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz \tag{14.11}$$

où z est un processus de Wiener standard, et a et b sont des fonctions de x et t. Le processus x a un drift égal à a et un paramètre de variance égal à b^2. Le lemme d'Itô montre qu'une fonction G de x et t est caractérisée par le processus suivant :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\,b\,dz \tag{14.12}$$

où z est le même processus de Wiener que celui qui apparaît dans l'équation (14.11). Ainsi, G suit également un processus d'Itô avec un drift égal à :

$$\frac{\partial G}{\partial x}\,a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2$$

et un paramètre de variance égal à :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Une démonstration rigoureuse et complète du lemme d'Itô dépasse le cadre de cet ouvrage. Toutefois, dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons que ce lemme peut être vu comme une extension de résultats bien connus de calcul différentiel. Précédemment, nous avons expliqué que :

$$dS = \mu\,S\,dt + \sigma\,S\,dz \tag{14.13}$$

avec μ et σ constants, est un modèle raisonnable d'évolution du cours des actions. En partant du lemme d'Itô, on déduit que le processus suivi par une fonction G de S et t est défini par :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,\mu\,S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,\sigma^2\,S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\,\sigma\,S\,dz \tag{14.14}$$

5. Voir K. Itô, *On Stochastic Differential Equations*, Memoirs of the American Mathematical Society, 4, 1951.

Notez que S et G sont affectés par la même source d'incertitude sous-jacente, z. Cette remarque est fondamentale pour établir les résultats de Black-Scholes.

Application aux contrats forward

Pour illustrer le lemme d'Itô, considérons un contrat forward portant sur une action ne versant pas de dividendes. Supposons que le taux d'intérêt sans risque soit constant et égal à r quelle que soit l'échéance du contrat. À partir de l'équation (5.1), on a :

$$F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{rT}$$

où F_0 représente le prix forward à la date $t = 0$, S_0 est le cours au comptant à la même date, et T est le temps restant à courir jusqu'à l'échéance du contrat forward.

Nous nous intéressons à l'évolution de la valeur du forward au cours du temps. Notons F et S les valeurs respectives du forward et de l'action à une date quelconque t, avec $t < T$. La relation entre F et S est la suivante :

$$F = S \, \mathrm{e}^{r(T-t)} \tag{14.15}$$

En supposant que le processus suivi par S est celui donné par l'équation (14.13), on peut utiliser le lemme d'Itô pour déterminer le processus suivi par F.

L'équation (14.15) permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \mathrm{e}^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -r \, S \, \mathrm{e}^{r(T-t)}$$

De même, l'équation (14.14) implique que le processus suivi par F est :

$$dF = \left[\mathrm{e}^{r(T-t)} \, \mu \, S - r \, S \, \mathrm{e}^{r(T-t)} \;\; S \, \mathrm{e}^{r(T-t)}\right] dt + \mathrm{e}^{r(T-t)} \, \sigma \, S \, dz$$

En substituant $F = S \, \mathrm{e}^{r(T-t)}$, on obtient :

$$dF = (\mu - r) \; F dt + \sigma \, F \, dz \tag{14.16}$$

Comme le cours de l'action S, le prix forward suit un mouvement brownien géométrique. Son espérance de taux de croissance est égale à $\mu - r$ plutôt qu'à μ. Le taux de croissance de F représente la partie de la rentabilité de S en excès du taux sans risque.

14.7 La propriété de log-normalité

Nous allons à présent utiliser le lemme d'Itô pour en déduire le processus suivi par $\ln S$ lorsque S suit le processus de l'équation (14.13). Notons :

$$G = \ln S$$

Puisque :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

il découle de l'équation (14.14) que le processus suivi par G s'écrit :

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dz \tag{14.17}$$

Sachant que μ et σ sont des constantes, cette équation montre que $G = \ln S$ suit un processus de Wiener général. Ce processus a un drift constant, égal à $\mu - \sigma^2/2$, et un paramètre de variance constant, égal à σ^2. La variation de $\ln S$, entre la date zéro et n'importe quelle date future T, suit une loi normale de moyenne :

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$$

et de variance $\sigma^2 T$.

Cela signifie que :

$$\ln\left(S_T\right) - \ln\left(S_0\right) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T,\, \sigma\sqrt{T}\right] \tag{14.18}$$

ou encore :

$$\ln\left(S_T\right) \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T,\, \sigma\sqrt{T}\right] \tag{14.19}$$

S_T est le cours de l'action à la date future T, S_0 est la valeur présente de l'action (en t = 0) et $\phi\left(m,s\right)$ désigne une loi normale de moyenne m et d'écart-type s.

L'équation (14.19) montre que $\ln(S_T)$est distribué selon une loi normale. Une variable suit une distribution log-normale si son logarithme népérien suit une distribution normale. Le modèle de fluctuation de cours développé dans ce chapitre implique donc que le cours d'une action à la date T, conditionné par son cours actuel, suit une distribution log-normale. L'écart-type du logarithme du cours de l'action est $\sigma\sqrt{T}$. Il est proportionnel à la racine carrée de l'horizon considéré.

Résumé

Les processus stochastiques permettent de décrire l'évolution aléatoire d'une variable au fil du temps. Un processus de Markov est un processus pour lequel seule la valeur présente est utile pour prévoir la distribution future. L'historique de la variable et la façon dont la valeur présente a été obtenue sont sans importance.

Un processus de Wiener standard, z, est un processus décrivant l'évolution d'une variable dont les variations sont normalement distribuées. Le drift, ou ***paramètre de tendance centrale***, de ce processus est nul et son paramètre de variance est égal à 1,0 par unité de temps. Cela signifie que, si la valeur de la variable est x_0 à la date zéro, alors à la date T, elle suit une loi normale de moyenne x_0 et d'écart-type $\sqrt{T}$.

Un processus de Wiener général décrit l'évolution d'une variable normale avec un drift égal à a et un paramètre de variance égal à b^2, avec a et b constants. Si, comme auparavant, la variable est égale à x_0 à la date 0, alors elle suit une loi normale de moyenne $x_0 + aT$ et d'écart-type $b\sqrt{T}$ à la date T.

Un processus d'Itô est un processus x dont le drift et le paramètre de variance peuvent être une fonction à la fois du temps et de x lui-même. La variation de x dans un très petit intervalle de temps peut être supposée normale, avec une bonne approximation, mais sa variation sur une plus longue période est susceptible de ne pas l'être.

La simulation de l'évolution d'une variable peut être une bonne méthode pour comprendre intuitivement son comportement. Cette méthode suppose de diviser la période d'étude en de nombreux intervalles de très courte durée et d'effectuer, pour chacun d'eux, un tirage aléatoire parmi les trajectoires possibles de la variable. La distribution de probabilité de la variable à une date future peut alors être calculée. L'étude de la simulation de Monte-Carlo sera approfondie au chapitre 21.

Le lemme d'Itô est une façon de déterminer le processus stochastique suivi par une fonction de la variable étudiée. Comme nous le verrons au chapitre 15, le lemme d'Itô est fondamental pour l'évaluation des actifs dérivés. L'un des points clés est que le processus de Wiener, z, qui régit le processus stochastique de la variable considérée est le même que celui qui gouverne l'évolution de la fonction dépendant de cette variable. En d'autres termes, variable et fonction de cette variable sont toutes deux sujettes à la même source d'incertitude.

Une hypothèse couramment posée stipule que le cours des actions évolue selon un mouvement brownien géométrique. Dans ces conditions, la rentabilité obtenue par le détenteur de l'action, dans un court intervalle de temps, est distribuée selon une loi normale, et les rentabilités de deux périodes ne se chevauchant pas sont indépendantes. La valeur de l'action à une date future suit une distribution log-normale. Le modèle de Black et Scholes que nous développons dans le prochain chapitre est fondé sur cette hypothèse de mouvement brownien géométrique.

Références complémentaires

Concernant l'efficience des marchés et le caractère markovien du cours des actions

Brealey R. A., *An Introduction to Risk and Return from Common Stock*, 2^e éd., MIT Press, Cambridge, MA, 1983.

Cootner P. H. (ed.), *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge, MA, 1964.

Concernant les processus stochastiques

Cox D. R. et H. D. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman & Hall, London, 1965.

Feller W., *Probability Theory and Its Applications*, vol. 1 et 2, Wiley, New York, 1950.

Karlin S. et H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, 2^e éd., New York, Academic Press, 1975.

Roger P., *Stochastic Processes for Finance*, Frederiksberg, Ventus Publishing, 2013 (téléchargement gratuit à l'adresse www.bookboon.com).

Shreve, S. E., *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-time Models*, Springer, New York, 2004.

Problèmes et exercices

14.1 Que signifie l'expression « la température d'un lieu précis suit un processus de Markov » ? Pensez-vous que la température suive effectivement un processus de Markov ?

14.2 Une règle de trading fondée sur l'historique des cours d'une action peut-elle régulièrement produire une rentabilité supérieure à la moyenne ? Commentez.

14.3 La trésorerie d'une société (en millions d'euros) suit un processus de Wiener général avec un drift de 0,5 par trimestre et un paramètre de variance de 4,0 par trimestre. Quelle devra être la trésorerie initiale de la société pour qu'elle ait une probabilité inférieure à 5 % de devenir négative dans un an ?

14.4 Les variables X_1 et X_2 suivent un processus de Wiener général avec des drifts respectifs de μ_1 et μ_2 et des paramètres de variance de σ_1^2 et σ_2^2. Quel processus la somme $(X_1 + X_2)$ suit-elle si :

a. les variations de X_1 et X_2 pour tout intervalle de temps ne sont pas corrélées ?

b. il y a une corrélation ρ, par unité de temps, entre les variations de X_1 et X_2 ?

14.5 Soit une variable X qui suit le processus :

$$dX = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

Au cours des trois premières années, $\mu = 2$ et $\sigma = 3$; au cours des trois années suivantes $\mu = 3$ et $\sigma = 4$. Si la valeur initiale de la variable est égale à 5, quelle est la distribution de probabilité de cette variable au bout de la sixième année ?

14.6 Soit G une fonction du cours d'une action, S, et du temps ; notons σ_S et σ_G les volatilités de S et G. Montrez que lorsque l'espérance de rentabilité de S augmente de $\lambda\sigma_S$, le taux de croissance de G augmente de $\lambda\sigma_G$, où λ est une constante.

14.7 Les prix de deux actions A et B suivent un mouvement brownien géométrique. Les variations de A et de B, pour tout intervalle de temps, ne sont pas corrélées. Est-ce que la valeur d'un portefeuille constitué d'une action A et d'une action B suit également un mouvement brownien géométrique ? Justifiez votre réponse.

14.8 Le processus suivi par le cours d'une action dans l'équation (14.8) est :

$$\Delta S = \mu\, S\, \Delta t + \sigma\, S\, \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

avec μ et σ constants. Expliquez avec soin la différence entre ce modèle et chacun des modèles suivants :

$$\Delta S = \mu\, \Delta t + \sigma\, \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta S = \mu\, S\, \Delta t + \sigma\, \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta S = \mu\, \Delta t + \sigma\, S\, \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Pourquoi le modèle de l'équation (14.8) est-il le modèle de fluctuation de cours le plus approprié par rapport à chacune des trois possibilités ?

14.9 Il a été suggéré que le taux d'intérêt à court terme, r, suivait le processus stochastique suivant :

$$dr = a\,(b - r)\,dt + r\,c\,dz$$

où a, b et c sont des constantes positives et z est un processus de Wiener. Décrivez la nature de ce processus.

14.10 Supposons que le cours d'une action, S, suive un mouvement brownien géométrique d'espérance de rentabilité μ et de volatilité σ :

$$dS = \mu\,S\,dt + \sigma\,S\,dz$$

Quel est le processus suivi par la variable S^n ? Montrez que S^n suit également un mouvement brownien géométrique.

14.11 Notons x le taux actuariel (composé en continu) d'une obligation zéro-coupon qui paie 1 € à la date T. Admettons que x suive le processus :

$$dx = a\,(x_0 - x)\,dt + s\,x\,dz$$

où a, x_0 et s sont des constantes positives et z est un processus de Wiener. Quel est le processus suivi par le cours de l'obligation ?

Questions complémentaires

14.12 Supposons qu'une action cotant 30 € ait une espérance de rentabilité annuelle de 9 % et une volatilité de 20 % par an. Simulez dans Excel le processus de prix pour une durée de cinq ans, en utilisant des pas de temps d'un mois. Représentez graphiquement le résultat obtenu et testez l'utilisation de la touche de fonction F9 pour voir comment ces trajectoires changent à chaque simulation.

14.13 Supposons qu'une action ait une espérance de rentabilité annuelle de 16 % et une volatilité de 30 % par an. Si, un jour donné, le cours de l'action est de 50 €, calculez :

a. l'espérance du cours de l'action à la fin du jour suivant ;

b. l'écart-type du cours de l'action à la fin du jour suivant ;

c. l'intervalle de confiance à 95 % du cours de l'action à la fin du jour suivant.

14.14 La trésorerie d'une société (en millions d'euros) suit un processus de Wiener général avec un drift de 0,1 par mois et un paramètre de variance de 0,16 par mois. La trésorerie initiale est de 2,0.

a. Quelles sont les distributions de probabilité de la trésorerie au bout d'un mois, six mois et un an ?

b. Quelles sont les probabilités d'une trésorerie négative au bout de six mois et d'un an ?

c. À quelle date future la probabilité d'avoir une trésorerie négative est-elle la plus forte ?

14.15 Supposons que x soit la rentabilité d'une rente perpétuelle du Trésor dont le taux d'intérêt engendre un revenu de 1 € par an. Admettons que x soit exprimé

en taux continu, que l'intérêt soit payé en continu et que x suive le processus suivant :

$$dx = a\,(x_0 - x)\,dt + s\,x\,dz$$

où a, x_0 et s sont des constantes positives et z est un processus de Wiener. Quel est le processus suivi par le cours de l'obligation ? Quelle est l'espérance de rentabilité instantanée (incluant les intérêts et le capital) pour le détenteur de l'obligation ?

14.16 Si S suit le mouvement brownien géométrique de l'équation (14.6), quel est le processus suivi par :

a. $y = 2S$;

b. $y = S^2$;

c. $y = \mathrm{e}^S$;

d. $y = \mathrm{e}^{r(T-t)}/S$.

Dans chaque cas, exprimez les coefficients de dt et dz par rapport à y plutôt qu'à S.

14.17 Le cours d'une action est actuellement de 50 €. Son espérance de rentabilité est 12 % et sa volatilité 30 %. Quelle est la probabilité que le cours de l'action soit supérieur à 80 € dans deux ans (indication : $S_T > 80$ si et seulement si $\ln(S_T) > \ln(80)$) ?

14.18 L'action A, dont le cours est de 30 €, a une rentabilité espérée de 11 % et une volatilité de 25 %. L'action B, dont le cours est de 40 €, a une rentabilité espérée de 15 % et une volatilité de 30 %. Simulez dans Excel le processus de prix pour une durée de trois mois en utilisant des pas de temps d'une journée, avec les valeurs suivantes pour la corrélation : 0,25 ; 0,75 ; 0,95. Représentez graphiquement le résultat obtenu et testez l'utilisation de la touche de fonction F9 pour voir comment ces trajectoires changent à chaque simulation.

Annexe

Démonstration du lemme d'Itô

Dans cette annexe, nous montrons comment le lemme d'Itô peut être vu comme une extension naturelle d'autres résultats plus simples. Considérons une fonction différentiable G d'une variable x. Si Δx représente une très petite variation de x et ΔG la variation de G qui en résulte, un résultat bien connu de calcul différentiel s'écrit :

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx}\Delta x \tag{14A.1}$$

Autrement dit, ΔG est à peu près égal au taux de variation de G relativement à x multiplié par Δx. L'ordre de grandeur de l'erreur commise est Δx^2. Pour une approximation plus précise, la formule de Taylor appliquée à G peut être utilisée :

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3G}{dx^3}\Delta x^3 + \cdots$$

Pour une fonction différentiable G dépendant de deux variables x et y, le résultat analogue à celui de l'équation (14A.1) est :

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y \tag{14A.2}$$

et l'application de la formule de Taylor à G donne :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + \cdots \tag{14A.3}$$

Quand Δx et Δy tendent vers 0, l'équation (14A.3) devient :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy \tag{14A.4}$$

Nous allons maintenant étendre l'équation (14A.4) aux fonctions de variables qui suivent un processus d'Itô. Supposons qu'une variable x dans l'équation (14A.4) suive un processus d'Itô :

$$dx = a\,(x,t)\;dt + b\,(x,t)\;dz \tag{14A.5}$$

et que G soit une fonction de x et du temps t. Par analogie avec l'équation (14A.3), nous pouvons écrire :

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \cdots \tag{14A.6}$$

L'équation (14A.5) peut être réécrite en temps discret sous la forme :

$$\Delta x = a\,(x,t)\,\Delta t + b\,(x,t)\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

ou, plus simplement, si on ne rappelle pas les arguments des fonctions a et b :

$$\Delta x = a\,\Delta t + b\,\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{14A.7}$$

Cette équation révèle une importante différence entre la situation de l'équation (14A.6) et celle de l'équation (14A.3). Quand un passage à la limite était utilisé pour passer de l'équation (14A.3) à l'équation (14A.4), les termes en Δx^2 étaient négligés puisqu'ils étaient d'ordre deux. En revanche, pour l'équation (14A.7), nous avons :

$$\Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t + \text{ des termes d'ordre supérieur à 1 en } \Delta t \qquad (14A.8)$$

Ceci montre que le terme contenant Δx^2 dans l'équation (14A.6) a une composante d'ordre 1 (en Δt) qui ne peut être ignorée.

Comme la variance d'une loi normale standard est égale à 1, on a :

$$E\left(\varepsilon^2\right) - \left[E\left(\varepsilon\right)\right]^2 = 1$$

où E est l'opérateur d'espérance. Puisque $E(\varepsilon) = 0$, c'est donc que $E(\varepsilon^2) = 1$. L'espérance de $\varepsilon^2\Delta t$ est donc égale à Δt. On peut montrer que la variance de $\varepsilon^2\Delta t$ est d'ordre Δt^2 et que, par conséquent, $\varepsilon^2\Delta t$ peut être considéré comme non aléatoire et égal à son espérance Δt lorsque Δt tend vers zéro. Il découle de l'équation (14A.8) que Δx^2 devient non stochastique et égal à $b^2\Delta t$ quand Δt tend vers zéro. En passant à la limite sur Δx et Δt dans l'équation (14A.6) et en utilisant ce dernier résultat, nous obtenons :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2\,dt \qquad (14A.9)$$

C'est la relation du lemme d'Itô. Si nous substituons à ***dx*** sa valeur donnée par l'équation (14A.5), l'équation (14A.9) devient alors :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\,b\,dz$$

qui est le résultat souhaité.

La note technique n° 29 sur le site www.pearson.fr donne les démonstrations d'extensions du lemme d'Itô. Quand G est une fonction de n processus $x_1, \ldots, x_n$ définis par :

$$dx_i = a_i\,dt + b_i\,dz_i$$

on peut écrire :

$$dG = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_i}\,a_i + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}\,b_i\,b_j\,\rho_{ij}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_i}\,b_i\,dz_i \qquad (14A.10)$$

Lorsqu'un seul processus x dépend de plusieurs mouvements browniens, c'est-à-dire :

$$dx = a\,dt + \sum_{i=1}^{n} b_i\,dz_i$$

on a, pour une fonction $G(x,t)$:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i\,b_j\,\rho_{ij}\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\sum_{i=1}^{n} b_i\,dz_i \qquad (14A.11)$$

Dans ces équations, P_{ij} est la corrélation entre z_i et z_j (voir section 14.5).

Chapitre 15

Le modèle de Black, Scholes et Merton

Au début des années 1970, Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton ont opéré une avancée majeure en matière d'évaluation d'options [1]. Ces contributions et l'ensemble des développements auxquels elles ont donné lieu sont à l'origine du célèbre modèle de Black-Scholes-Merton (ou modèle de Black et Scholes). Ce dernier a eu un très grand impact sur les méthodes utilisées par les traders, tant en matière d'évaluation d'options que dans la mise au point de techniques de couverture. Ces travaux ont aussi constitué le point de départ du développement spectaculaire de l'ingénierie financière dans les années 1980 et 1990. En 1997, Robert Merton et Myron Scholes ont été récompensés par le prix Nobel d'économie pour l'importance et la qualité de leurs recherches. Fisher Black est malheureusement décédé en 1995, sinon il aurait sans aucun doute figuré parmi les lauréats, au même titre que ses collaborateurs.

D'autres chercheurs avaient auparavant calculé l'espérance de payoff d'une option européenne. Cependant, comme nous l'avons expliqué dans la section 13.2, il est difficile de déterminer le taux d'actualisation approprié pour ce payoff. Black et Scholes ont utilisé le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF, voir l'annexe au chapitre 3) afin de déterminer une relation entre le rendement requis pour l'option et celui requis pour l'action. Ce n'était pas évident, parce que la relation dépend à la fois du prix des actions et du temps. L'approche de Merton est différente de celle de Black et Scholes. Elle consiste à créer un portefeuille sans risque composé de l'option et de l'action sous-jacente et s'appuyer sur l'argument d'absence d'arbitrage impliquant que, sur une courte période, la rentabilité du portefeuille doit être égale au taux sans risque. C'est ce que nous avons fait dans la section 13.1, mais la résolution est bien sûr plus complexe en temps continu. L'approche de Merton est ainsi plus générale que celle de Black et Scholes, car elle ne repose pas sur les hypothèses du MEDAF.

---

1. Voir F. Black et M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, mai/juin 1973, 637-659 ; R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, printemps 1973, 141-83.

Ce chapitre expose l'approche de Merton, qui a permis d'obtenir la formule de Black-Scholes-Merton.

Il détaille aussi les deux approches du calcul de la volatilité : soit à partir de données historiques, soit en la déduisant implicitement de la valeur des options cotées grâce au modèle théorique. Nous montrons comment l'évaluation risque-neutre introduite au chapitre 13 peut être utilisée ici. Nous expliquons ensuite comment étendre le modèle de Black-Scholes-Merton à l'évaluation d'options européennes sur des actions versant des dividendes. Enfin, nous présentons quelques résultats sur l'évaluation d'options américaines sur des actions payant des dividendes.

15.1 Propriétés de la loi log-normale appliquée au cours des actions

Le modèle de comportement des cours d'actions utilisé par Black, Scholes et Merton a été développé au chapitre 14. Il suppose que, dans un court intervalle de temps, les variations en pourcentage des cours des actions sont distribuées selon une loi normale.

Les notations suivantes seront adoptées dans la suite :

- μ est l'espérance de la rentabilité de l'action ;
- σ est la volatilité du cours de l'action.

La moyenne de la variation en pourcentage du cours de l'action, sur un intervalle de temps Δt, est égale à $\mu\,\Delta t$ et l'écart-type de cette variation est égal à $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Nous avons donc :

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi\left(\mu\,\Delta t\ ;\ \sigma\,\sqrt{\Delta t}\right) \tag{15.1}$$

où ΔS représente la variation du cours de l'action dans l'intervalle de temps Δt, et $\phi(m,s)$ désigne une loi normale de moyenne m et d'écart-type s (c'est l'équation (14.9)).

Comme nous l'avons montré à la section 14.7, ce modèle implique que :

$$\ln\left(S_T\right) - \ln\left(S_0\right) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,T\ ;\ \sigma\sqrt{T}\right]$$

ce qui peut s'écrire :

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,T\ ;\ \sigma\sqrt{T}\right] \tag{15.2}$$

ou encore :

$$\ln\left(S_T\right) \sim \phi\left[\ln\left(S_0\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,T\ ;\ \sigma\sqrt{T}\right] \tag{15.3}$$

où S_0 est le cours de l'action en date 0 et S_T le cours de l'action à une date future T. L'équation (15.3) montre que $\ln S_T$ suit une loi normale. Cela signifie aussi que S_T suit une distribution log-normale. La moyenne de $\ln\left(S_T\right)$ est $\ln\left(S_0\right) + \left(\mu - \sigma^2/2\right)\,T$ et son écart-type $\sigma\sqrt{T}$.

■ **Exemple 15.1** Soit une action cotée initialement 40 €, dont l'espérance de rentabilité annuelle est 16 % et la volatilité 20 % par an. L'équation (15.3) stipule que la distribution de probabilité du cours de cette action, S_T, dans six mois est caractérisée par :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left[\ln(40) + \left(0{,}16 - \frac{0{,}20^2}{2}\right) \times 0{,}5 \; ; \; 0{,}20\sqrt{0{,}5}\right]$$
$$\ln(S_T) \sim \phi(3{,}759 \; ; 0{,}141)$$

Connaissant les propriétés d'une distribution normale, nous savons qu'avec une probabilité de 95 % une variable normalement distribuée se situe entre +/– 1,96 fois son écart-type autour de la moyenne. Ainsi, en considérant un intervalle de confiance de 95 %, nous obtenons :

$$3{,}759 - 1{,}96 \times 0{,}141 < \ln(S_T) < 3{,}759 + 1{,}96 \times 0{,}141$$

qui peut s'écrire :

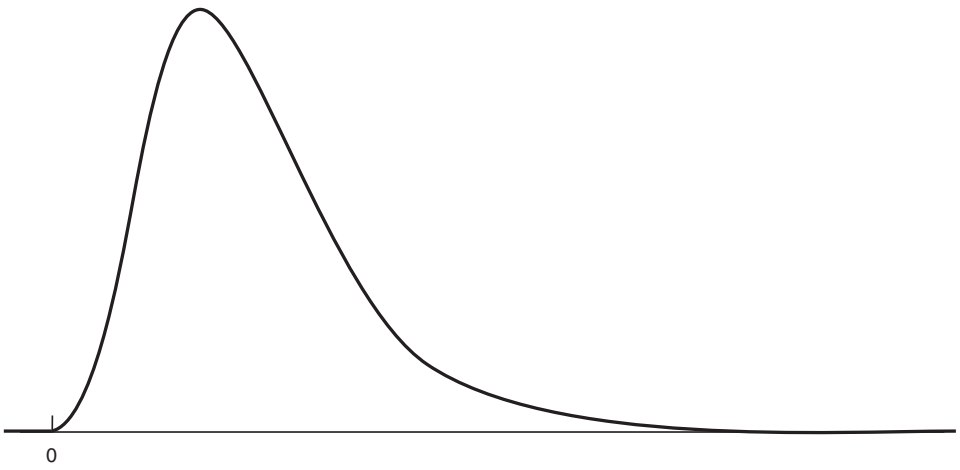
$$e^{3{,}759 - 1{,}96 \times 0{,}141} < S_T < e^{3{,}759 + (1{,}96 \times 0{,}141)}$$

c'est-à-dire :

$$32{,}55 < S_T < 56{,}56$$

Il y a donc 95 % de chances pour que, dans six mois, le cours de cette action se situe entre 32,55 € et 56,56 €.

Une variable suivant une distribution log-normale peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et l'infini. Le graphique 15.1 montre la fonction de densité d'une distribution log-normale.



Graphique 15.1 : Distribution log-normale

Contrairement à la distribution normale, la distribution log-normale est dissymétrique et légèrement décalée par rapport à la moyenne. Ainsi, la moyenne et la médiane sont différentes. À partir de l'équation (15.3) et des propriétés de la loi log-normale, il peut

être démontré que l'espérance de rentabilité de S_T, notée $E(S_T)$, est donnée par l'expression [2] :

$$E(S_T) = S_0 \, \mathrm{e}^{\mu T} \tag{15.4}$$

Cela est cohérent avec la définition de μ comme rentabilité espérée. La variance de S_T, notée $\mathrm{Var}(S_T)$, se calcule alors de la façon suivante :

$$\mathrm{Var}(S_T) = S_0^2 \, \mathrm{e}^{2\mu T}(\mathrm{e}^{\sigma^2 T} - 1) \tag{15.5}$$

■ **Exemple 15.2** Considérons une action cotant 20 €, caractérisée par une espérance de rentabilité annuelle de 20 % et une volatilité annuelle de 40 %. Le cours espéré de l'action, $E(S_T)$, ainsi que la variance, $\mathrm{Var}(S_T)$, attendus dans un an sont donc :

$$E\,(S_T) = 20\,\mathrm{e}^{0,2\times 1} = 24{,}43$$

$$\mathrm{Var}\,(S_T) = 400\,\mathrm{e}^{2\times 0,2\times 1}(\mathrm{e}^{0,4^2\times 1} - 1) = 103{,}54$$

L'écart-type annuel du prix de cette action est donc $\sqrt{103{,}54} = 10{,}18$.

15.2 Distribution du taux de rentabilité

La log-normalité du prix des actions fournit aussi des informations sur la distribution de probabilité du taux de rentabilité continu d'une action, dans l'intervalle de temps limité par les dates t = 0 et t = T. Notons η le taux de rentabilité annuel continu entre t = 0 et t = T. Il s'ensuit que :

$$S_T = S_0 \, \mathrm{e}^{\eta T}$$

et donc :

$$\eta = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \tag{15.6}$$

L'équation (15.2) nous permet d'écrire que :

$$\eta \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \; ; \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right) \tag{15.7}$$

Par conséquent, le taux de rentabilité annuel composé en continu est distribué normalement. Sa moyenne est $\mu - \sigma^2/2$ et son écart-type $\sigma/\sqrt{T}$. Lorsque T augmente, l'écart-type de η diminue. Pour en comprendre la raison, considérons deux cas : T= 1 et T= 20. Il y a moins d'incertitude sur le taux de rentabilité annuel moyen estimé sur 20 ans que sur celui estimé sur une année.

■ **Exemple 15.3** Soit une action ayant une espérance de rentabilité annuelle de 17 % et une volatilité annuelle de 20 %. Le taux de rentabilité (composé continu) sur une période de 3 ans suit une loi normale de moyenne :

$$0{,}17 - \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}15$$

2. Voir la note technique n° 2 sur le site www.pearson.fr pour une démonstration des résultats donnés aux équations (15.4) et (15.5). Pour approfondir les propriétés de la distribution log-normale, voir J. Aitchison et J. A. C. Brown, *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

soit 15 % par an. Son écart-type est de :

$$\frac{0{,}2}{\sqrt{3}} = 0{,}1155$$

soit 11,55 % par an.

Dans la mesure où il y a 95 % de chances qu'une variable normalement distribuée se situe à moins de 1,96 écart-type autour de sa moyenne, le taux de rentabilité se situera, avec une probabilité de 95 %, entre $-7{,}6$ % et $+37{,}6$ %.

15.3 L'espérance de rentabilité

L'espérance de rentabilité, μ, requise par les investisseurs dépend du niveau de risque de l'action. Plus le risque du titre est élevé, plus son espérance de rentabilité est importante. Celle-ci dépend aussi positivement du niveau des taux d'intérêt. Bien que nous n'ayons pas à nous préoccuper des déterminants de μ pour l'évaluation des options, un aspect de l'espérance de rentabilité d'une action est fréquemment source de confusion et mérite d'être expliqué.

L'équation (15.1) indique que $\mu\,\Delta t$ est l'espérance de variation de prix de l'action (en pourcentage) pendant un très court intervalle de temps de longueur Δt. μ est donc l'espérance de rentabilité par unité de temps, mesurée dans un intervalle de temps Δt très court. Il semble naturel de supposer que μ est aussi l'espérance de rentabilité de l'action par unité de temps, mais mesurée sur un intervalle de temps plus long. Malheureusement, ce n'est pas le cas. La rentabilité composée en continu et calculée sur T années est donnée par l'équation (15.6) :

$$\frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$$

L'équation (15.7) montre que l'espérance de cette expression est égale à $\mu - \sigma^2/2$. La raison d'une telle distinction entre le paramètre μ de l'équation (15.1) et la valeur $\mu - \sigma^2/2$ de l'équation (15.7) est subtile mais importante[3]. L'encadré 15.1 fournit un exemple avec un fonds commun de placement pour illustrer pourquoi il en est ainsi. Reprenons le développement à partir de l'équation (15.4) :

$$E(S_T) = S_0\,\mathrm{e}^{\mu T}$$

En prenant le logarithme de chacun des membres de l'expression, nous obtenons :

$$\ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu T$$

Il est alors tentant d'écrire que :

$$\ln[E(S_T)] = E[\ln(S_T)]$$

3. Les éléments exposés dans cette section nous montrent bien que l'expression « espérance de rentabilité » est ambiguë. En effet, selon les cas, elle peut correspondre à μ ou à $\mu - \sigma^2/2$. Sauf mention contraire, nous considérerons que l'expression « espérance de rentabilité » fait référence à μ dans tout le reste de l'ouvrage.

afin d'en déduire que $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu T$. Cependant, de telles simplifications sont incorrectes. En effet, la fonction logarithme n'est pas linéaire. Nous avons donc :

$$\ln[E(S_T)] > E[\ln(S_T)]$$

(par l'inégalité de Jensen), et ainsi $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T$. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec l'équation (15.7).

Encadré 15.1 Les rentabilités affichées par les fonds peuvent être trompeuses...

Supposons que la série suivante soit la suite des rentabilités annuelles d'un fonds commun de placement, mesurées en taux annuel continu :

$$15\ \%,\ 20\ \%,\ 30\ \%,\ -20\ \%,\ 25\ \%$$

La moyenne arithmétique de cette série est 14 %. Cependant, un investisseur gagnerait moins de 14 % annuels en laissant son argent placé pendant ces 5 années. La valeur finale (P_5) d'un portefeuille P_0 de 100 € investis pendant 5 ans dans ce fonds est de :

$$100 \times 1{,}15 \times 1{,}20 \times 1{,}30 \times 0{,}80 \times 1{,}25 = 179{,}40\ €$$

Une rentabilité annuelle moyenne de 14 % pendant 5 ans aurait crédité l'investisseur d'un montant final de :

$$100 \times 1{,}14^5 = 192{,}54\ €$$

Or, il ressort que le gain sur 5 ans n'est que de $179{,}40 - 100 = 79{,}40$ €. Ce résultat correspond à un intérêt annuel composé de :

$$(1{,}7940)^{1/5} - 1 = 0{,}124, \text{ soit } 12{,}4\ \% \text{ annuels}$$

Quelle rentabilité faut-il annoncer ? Bien sûr, il est tentant pour le gérant du fonds de dire : « La moyenne des rentabilités annuelles réalisées sur les 5 dernières années est de 14 %. » Même si cela n'est pas faux, c'est un peu trompeur. Il est plus correct de dire : « Le rendement moyen sur 5 ans d'un portefeuille investi dans notre fonds est de 12,4 % par an. »Ce phénomène est la conséquence d'un résultat mathématique bien connu qui stipule que la moyenne géométrique d'un ensemble de nombres est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

15.4 La volatilité

La volatilité d'une action, notée σ, est une mesure de l'incertitude sur la rentabilité du titre. La volatilité des actions est généralement comprise entre 20 % et 50 %. À partir de l'équation (15.7), la volatilité d'une action est l'écart-type des rentabilités sur une année quand ces dernières sont exprimées en taux composé continu.

Quand T est petit, l'équation (15.1) nous montre que $\sigma\sqrt{T}$ est approximativement égal à l'écart-type de la variation en pourcentage du cours de l'action pendant une période de durée T. Supposons que le cours de Bourse d'une action soit de 50 € et que σ = 0,3 ou 30 % par an. Une variation de cours de l'action d'un écart-type sur une période d'une semaine est proche de :

$$0{,}3 \times \sqrt{\frac{1}{52}} = 4{,}16\ \%$$

Par conséquent, la variation de cours pour un mouvement d'un écart-type pendant une semaine est de l'ordre de :

$$50 \times 0{,}0416 = 2{,}08\ €$$

L'équation (15.1) montre que l'incertitude sur la valeur future d'une action, mesurée par son écart-type, augmente avec l'horizon temporel. Cette augmentation est approximativement proportionnelle à la racine carrée de l'horizon considéré. Par exemple, l'écart-type de la rentabilité d'une action sur 4 semaines est approximativement le double de l'écart-type sur une semaine.

Estimation de la volatilité à partir de données historiques

Afin d'estimer empiriquement la volatilité d'une action, des relevés de cours périodiques sont nécessaires (chaque jour, chaque semaine ou encore chaque mois).

Notons :

$n + 1$: le nombre d'observations ;

S_i : le cours de l'action au terme du i-ème intervalle de temps ;

τ : la durée des intervalles de temps en années.

On pose alors :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

pour i = 1,2, …, n.

L'estimation, s, de l'écart-type des u_i est donnée par la formule :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

soit :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n\,(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

où $\bar{u}$ est la moyenne des u_i [4].

4. La moyenne $\bar{u}$ est souvent considérée comme nulle lorsque des estimations de la volatilité historique sont effectuées.

Nous savons, grâce à l'équation (15.2), que l'écart-type des u_i est égal à $\sigma\sqrt{\tau}$. La variable s est donc un estimateur de $\sigma\sqrt{\tau}$. Nous pouvons donc estimer σ par $\hat{\sigma}$ avec :

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Il peut être démontré que l'écart-type de cet estimateur est approximativement égal à $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$.

Déterminer une valeur appropriée pour n reste très délicat. Généralement, plus le nombre de données est important, meilleure est la qualité de l'estimation. Mais la volatilité historique, σ, varie au fil du temps, et la prise en compte de données trop anciennes n'est pas pertinente pour une bonne prédiction de la valeur future. Un compromis qui semble fonctionner correctement consiste alors en un relevé quotidien des cours de clôture les plus récents sur une période de 90 à 180 jours. Une règle générale très utilisée consiste à faire coïncider le nombre de jours sur lequel on fonde le calcul de la volatilité historique avec l'horizon d'investissement. Ainsi, si l'investisseur cherche à estimer une volatilité pour calculer le prix d'une option d'échéance deux ans, il utilisera des données quotidiennes relevées sur une période de deux ans. Au chapitre 23, nous étudierons des approches plus complètes et plus sophistiquées pour estimer les volatilités. Nous traiterons notamment le modèle GARCH.

Il est également important de savoir comment procéder au comptage du nombre de jours. Faut-il utiliser un nombre de jours de Bourse ouvrés ou calendaires ? Plus loin dans ce chapitre, nous montrons que les études empiriques conseillent l'utilisation des jours de Bourse ouvrés. En d'autres termes, il est préférable d'ignorer les jours de fermeture de la Bourse dans le calcul de la volatilité.

■ **Exemple 15.4** Le tableau 15.1 donne un relevé de cours pendant 21 jours ouvrés consécutifs. Dans ce cas précis, nous obtenons :

$$\sum u_i = 0{,}09531 \quad \text{et} \quad \sum u_i^2 = 0{,}00326$$

L'estimation de l'écart-type sur une base quotidienne s'écrit :

$$\sqrt{\frac{0{,}00326}{19} - \frac{0{,}09531^2}{380}} = 0{,}01216$$

soit 1,216 %. Si nous supposons qu'il y a 252 jours de Bourse par an, τ = 1/252. La volatilité annuelle est estimée comme : $0{,}01216 \times \sqrt{252} = 0{,}193$ soit 19,3 %. L'erreur type de cet estimateur est de :

$$\frac{0{,}193}{\sqrt{2 \times 20}} = 0{,}031$$

soit 3,1 % par an.

Tableau 15.1 : Estimation de la volatilité

Jour	Cours de clôture de l'action (€)	Cours relatif	Rentablilité quotidienne
0	20	0	
1	20,10	1,00500	0,00499
2	19,90	0,99005	−0,01000
3	20,00	1,00503	0,00501
4	20,50	1,02500	0,02469
5	20,25	0,98780	−0,01227
6	20,90	1,03210	0,03159
7	20,90	1,00000	0,00000
8	20,90	1,00000	0,00000
9	20,75	0,99282	−0,00720
10	20,75	1,00000	0,00000
11	21,00	1,01205	0,01198
12	21,10	1,00476	0,00475
13	20,90	0,99052	−0,00952
14	20,90	1,00000	0,00000
15	21,25	1,01675	0,01661
16	21,40	1,00706	0,00703
17	21,40	1,00000	0,00000
18	21,25	0,99299	−0,00703
19	21,75	1,02353	0,02326
20	22,00	1,01149	0,01143

Cette démonstration suppose que l'action ne verse pas de dividendes. Cependant, il reste possible de suivre la même logique avec une action qui verse un dividende. La rentabilité, u_i, calculée sur une période qui inclut le détachement d'un dividende est donnée par la formule suivante :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i + D}{S_{i-1}}\right)$$

où D représente le dividende. La rentabilité des autres intervalles de temps, sans détachement de dividende, s'écrit toujours :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Cependant, dans la mesure où la fiscalité joue un rôle important dans le calcul des rentabilités lors d'un versement de dividendes, il est certainement préférable d'écarter toutes les données correspondant aux intervalles de temps qui incluent le détachement d'un dividende.

Encadré 15.2 Les origines de la volatilité

Il est naturel de supposer que la volatilité a pour origine l'arrivée de nouvelles informations sur le marché. Ces informations conduisent à des révisions d'anticipations quant à la valeur future des titres. Cela entraîne des modifications de prix et donc de la volatilité. Ce raisonnement n'est cependant pas confirmé par les études empiriques. Quand on dispose de plusieurs années de données journalières, on peut calculer :

1. La variance des rentabilités entre la fermeture du marché un jour donné et la fermeture du lendemain ;
2. La variance des rentabilités entre la clôture du vendredi et l'ouverture du lundi suivant.

La seconde variance correspond à une période de 3 jours alors que la première est une variance journalière. On pourrait donc raisonnablement s'attendre à ce que la seconde soit trois fois plus grande que la première. Fama (1965), French (1980) et French et Roll (1986) ont montré que ce n'est pas le cas. Ces trois publications montrent que la seconde variance dépasse la première respectivement de 22 %, 19 % et 10,7 %.

À ce stade, on pourrait dire que les informations sont plus nombreuses quand le marché est ouvert que quand il est fermé. Mais Roll (1984) n'arrive pas à cette conclusion. Il a examiné les prix des contrats à terme sur le jus d'orange, produit pour lequel les informations essentielles sont les conditions climatiques. Or, celles-ci parviennent aussi bien quand le marché est ouvert que quand il est fermé. Roll a ensuite réalisé la même analyse sur les actions ; il trouve que la variance du week-end dépasse de seulement 54 % celle des jours ouvrables.

La seule conclusion raisonnable à laquelle on peut arriver au vu de ces résultats est que la volatilité est engendrée, pour une grande part, par les échanges eux-mêmes (les traders n'ont, le plus souvent, aucun mal à être d'accord avec cette interprétation !)

Jours ouvrables *versus* jours calendaires

Une question importante est celle de savoir s'il faut mesurer le temps en jours ouvrables ou en jours calendaires, spécialement quand il s'agit d'estimer une volatilité. Comme le montre l'encadré 15.2, les travaux empiriques montrent que la volatilité est bien plus forte quand le marché est ouvert que quand il est fermé. En conséquence, les praticiens tendent à ignorer les jours de fermeture quand ils estiment les volatilités à partir de données historiques. Ainsi, la volatilité annuelle doit être calculée à partir de la volatilité par jour de cotation en utilisant la formule suivante :

$$\text{Volatilité annuelle} = \text{Volatilité par jour de cotation} \times \sqrt{\text{nbre de j. de cotation par an}}$$

C'est ce que nous avons fait dans l'exemple 15.4. L'hypothèse classique retient 252 jours de Bourse par an. En conséquence, la durée de vie d'une option est souvent mesurée en comptant les jours de Bourse plutôt que les jours calendaires. Elle est calculée en années, à l'aide du ratio :

$$T = \frac{\text{Jours calendaires jusqu'à l'échéance}}{\text{Jours calendaires par an}}$$

15.5 Les concepts sous-jacents à l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton

L'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes-Merton est une équation qui doit être vérifiée par tout produit dérivé lié à une action ne versant pas de dividendes. Cette équation sera étudiée à la section suivante. Nous nous attacherons à caractériser la nature des raisonnements suivis.

Ceux-ci sont analogues au raisonnement d'arbitrage, décrit au chapitre 13 et utilisé pour l'évaluation des options à l'aide de la méthode binomiale. Ils impliquent la construction d'un portefeuille sans risque consistant en une position sur le produit dérivé et une position sur l'action elle-même. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, l'espérance de rentabilité du portefeuille doit être égale au taux sans risque, r. Cela nous conduit à l'EDP de Black-Scholes-Merton.

La raison pour laquelle il est possible de construire un portefeuille sans risque composé d'une action et d'un produit dérivé vient du fait qu'ils sont tous deux exposés à la même source d'incertitude : la variation du prix de l'action. Sur tout intervalle de temps très court, la valeur du produit dérivé est parfaitement corrélée avec le prix de l'action sous-jacente. Ainsi, quand un portefeuille approprié, composé de l'action et de son produit dérivé, est constitué, le gain ou la perte sur le sous-jacent sont systématiquement compensés par le gain ou la perte sur le produit dérivé. Ainsi, au terme du court intervalle de temps, la valeur globale du portefeuille est toujours connue avec certitude.

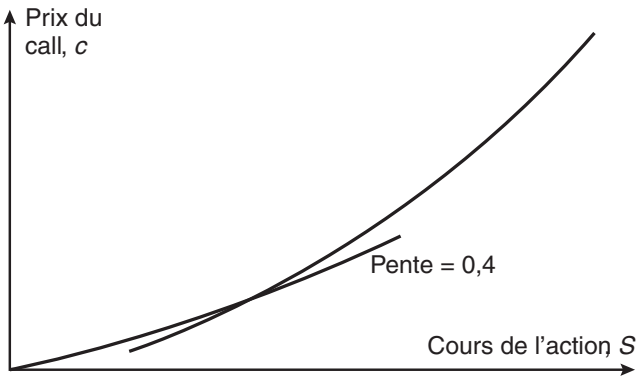
Supposons, par exemple, qu'à un instant précis, la relation entre une variation infinitésimale du cours de l'action, ΔS, et une variation du même ordre de grandeur de la valeur d'un call européen sur cette action, notée Δc, soit égale à :

$$\Delta c = 0{,}4\,\Delta S$$

Cette égalité indique que la pente de la droite représentant la relation entre c et S est de 0,4 (voir graphique 15.2). Le portefeuille sans risque consiste donc en :

1. Une position longue sur 0,4 action ;
2. Une position courte sur un call.

Il y a cependant une différence entre l'approche de Black-Scholes-Merton et l'approche présentée au chapitre 13, qui utilise le modèle binomial. En effet, dans le cas présent, la position prise par l'investisseur sur le titre et son dérivé est qualifiée de « sans risque » uniquement pendant un très court intervalle de temps. (En théorie, le portefeuille constitué n'est en fait réellement sans risque que sur un intervalle de temps infiniment court.)



Graphique 15.2 : Relation entre c et S

Afin de garder un portefeuille sans risque, l'investisseur doit ajuster fréquemment sa position. On dit qu'il doit réajuster son portefeuille [5]. Si nous reprenons l'exemple précédent, la relation entre Δc et ΔS peut varier de $\Delta c = 0{,}4\Delta S$ aujourd'hui à $\Delta c = 0{,}5\Delta S$ dans deux semaines. Afin de conserver un portefeuille sans risque, l'investisseur doit alors procéder à un ajustement ; dans ce cas, il renforcera sa position sur action en achetant 0,1 action pour chaque call vendu. Il n'en reste pas moins vrai que la rentabilité provenant du portefeuille sans risque sur tout intervalle de temps très court doit être égale au taux sans risque. Cette condition est l'élément clé de l'analyse menée par Black et Scholes. C'est notamment cet élément qui a permis le développement de leur célèbre modèle d'évaluation.

Hypothèses

L'obtention de l'EDP de Black-Scholes-Merton nécessite les hypothèses suivantes.

1. Le cours de l'action suit le processus présenté au chapitre 14. μ et σ sont constants.
2. Il n'y a aucune restriction sur les ventes à découvert. Le produit de ces ventes est immédiatement et intégralement disponible.
3. Il n'y a pas de frais de transactions ou d'impôts. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
4. Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé.
5. Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
6. Le marché fonctionne en continu.
7. Le taux sans risque, r, est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé.

Dans les chapitres suivants, nous verrons comment certaines de ces hypothèses peuvent être relâchées. Par exemple, σ et r pourront être définis comme des fonctions de t.

5. Nous présentons ces réajustements de portefeuilles en détail au chapitre 19.

Les taux d'intérêt pourront être modélisés par des processus stochastiques, en considérant que la distribution du cours de l'action, à l'échéance de l'option, est toujours log-normale.

15.6 Démonstration de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton

Le processus suivi par l'action est celui qui est développé à la section 14.3 (mouvement brownien géométrique). Il est caractérisé par :

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dz \tag{15.8}$$

Notons f le prix d'une option d'achat ou de tout autre produit dérivé lié au titre S. La variable f est alors une fonction de S et t. À partir de l'équation (14.14), nous déduisons la relation suivante :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\,\mu\, S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\,\sigma\, S\, dz \tag{15.9}$$

Sous leur forme discrète, les équations (15.8) et (15.9) s'écrivent :

$$\Delta S = \mu\, S\Delta t + \sigma S \Delta z \tag{15.10}$$

et :

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu\, S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\,\sigma\, S\,\Delta z \tag{15.11}$$

où ΔS et Δf représentent les variations de f et S pendant un court intervalle de temps de longueur Δt. Rappelons qu'à la section 14.6, nous avons insisté sur le fait que les variations aléatoires de f et S sont gouvernées par le même processus de Wiener. En d'autres termes, les Δz ($=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$) des équations (15.10) et (15.11) sont identiques. Ainsi, en choisissant un portefeuille composé d'une action et de l'un de ses produits dérivés, la composante aléatoire peut être éliminée.

Un portefeuille approprié peut être défini de la façon suivante :

1. Vente d'une unité du produit dérivé ;
2. Achat de $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions.

Le détenteur du portefeuille est alors en position courte (vendeur) sur le produit dérivé et en position longue (acheteur) sur $\partial f/\partial S$ actions. La valeur du portefeuille, notée Π, s'écrit alors :

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}\, S \tag{15.12}$$

La variation $\Delta\Pi$ de la valeur du portefeuille au cours d'un intervalle de temps Δt est donnée par :

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\,\Delta S \tag{15.13}$$

En substituant à Δf et ΔS, dans l'équation (15.13), leurs valeurs données dans les équations (15.10) et (15.11), nous obtenons :

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{15.14}$$

Puisque cette équation ne comporte pas l'expression Δz, le portefeuille doit être sans risque pendant l'intervalle de temps Δt. Les hypothèses énoncées à la section précédente impliquent qu'un tel portefeuille doit procurer une rentabilité égale au taux sans risque. Dans le cas contraire, les investisseurs profiteraient d'une opportunité d'arbitrage. Deux possibilités se présentent alors : ***primo***, si la rentabilité du portefeuille est supérieure au taux sans risque, l'investisseur emprunte de l'argent au taux sans risque pour le réinvestir en achetant le portefeuille, qui procure une meilleure rentabilité ; ***secundo***, si le portefeuille engendre une rentabilité inférieure au taux sans risque, l'investisseur le vendra à découvert et placera alors le produit de cette vente au taux sans risque afin de dégager un profit totalement sans risque. Nous pouvons donc écrire :

$$\Delta\Pi = r\,\Pi\,\Delta t \tag{15.15}$$

où r représente le taux sans risque. Si nous remplaçons les termes Π et $\Delta\Pi$ de cette équation par leurs expressions données dans les équations (15.12) et (15.14), nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\,\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}\,S\right)\Delta t$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r\,S\,\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f \tag{15.16}$$

L'équation (15.16) est l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton. Cette équation a plusieurs solutions correspondant à tous les produits dérivés qui peuvent avoir S comme actif sous-jacent. La solution de l'équation dépend alors des conditions aux bornes qui caractérisent le produit dérivé considéré. Ces conditions précisent les valeurs de l'actif dérivé analysé aux bornes des ensembles de valeurs possibles de S et t.

Par exemple, dans le cas d'un call européen, la condition aux bornes est :

$$f = \max(S - K\,;0), \text{ quand } t = T$$

Dans le cas d'un put européen, elle s'écrit :

$$f = \max(K - S\,;0), \text{ quand } t = T$$

Notons que le portefeuille utilisé dans la dérivation de l'équation (15.16) n'est pas un portefeuille sans risque de façon permanente. Il est sans risque uniquement pendant un intervalle de temps infinitésimal. En effet, dès que S et t varient, $\partial f/\partial S$ varie aussi. Ainsi, afin de conserver le caractère non risqué du portefeuille, il est nécessaire d'ajuster fréquemment les positions relatives de l'action et du produit dérivé au sein du portefeuille.

■ **Exemple 15.5** Un contrat forward portant sur une action qui ne verse pas de dividendes est un produit dérivé dépendant de cette action sous-jacente. Ce contrat devrait vérifier l'équation (15.16). En reprenant l'équation (5.5), nous savons que la valeur d'un contrat forward, f, à une date quelconque t est donnée en fonction du cours de l'action, S, à cette date par :

$$f = S - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

où K est le prix de livraison. Cela signifie que :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rK\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

En substituant ces termes à ceux du membre de gauche de l'équation (15.16), nous obtenons :

$$-rK\,\mathrm{e}^{-r(T-t)} + rS$$

Ce résultat est égal à *rf*. L'équation (15.16) est donc bien vérifiée.

Un dérivé perpétuel

Considérons un dérivé perpétuel qui paie un montant fixe Q dès que le cours de l'action dépasse un niveau H. Dans ce cas, la valeur du dérivé pour n'importe quel sous-jacent de valeur S ne dépend pas de t. Par conséquent, le terme $\partial f/\partial t$ s'annule et l'EDP (15.16) devient une équation différentielle ordinaire. Supposons d'abord que $S < H$. Les conditions aux bornes pour les actifs dérivés sont $f = 0$ lorsque $S = 0$ et $f = Q$ lorsque $S = H$. La solution simple $f = QS/H$ satisfait à la fois les conditions aux bornes et l'équation différentielle. Elle est donc la valeur de cet actif dérivé. Supposons ensuite que $S > H$. Les conditions aux bornes sont alors $f = 0$ lorsque S tend vers l'infini et $f = Q$ lorsque $S = H$. La valeur suivante de l'actif dérivé :

$$f = Q\left(\frac{S}{H}\right)^{-\alpha}$$

où α est positif, satisfait les conditions aux bornes. Cette valeur de f satisfait également l'équation différentielle quand :

$$-r\,\alpha + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\alpha\,(\alpha+1) - r = 0$$

soit $\alpha = 2r/\sigma^2$.

La valeur de l'actif dérivé est donc :

$$f = Q\left(\frac{S}{H}\right)^{-2r/\sigma^2} \tag{15.17}$$

L'exercice 15.23 montre que l'équation (15.17) peut être utilisée pour évaluer un put américain perpétuel. La section 26.2 étend l'analyse et montre comment un call et un put américains perpétuels peuvent être évalués lorsque le sous-jacent délivre un taux de dividende q.

Les prix de marché des produits dérivés

Chaque fonction $f(S,t)$, solution de l'EDP (15.16), définit le prix théorique d'un actif dérivé qui pourrait être échangé sur le marché. Si cet actif est coté à ce prix, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage. Réciproquement, si la fonction $f(S,t)$ ne vérifie pas l'équation différentielle (15.16), alors elle ne peut être le prix d'un produit dérivé sans créer automatiquement des opportunités d'arbitrage pour les opérateurs du marché.

Afin d'illustrer cet élément, considérons la fonction e^S. Il est évident qu'elle ne vérifie pas l'équation (15.16). Compte tenu de ce qui vient d'être dit, cette fonction ne peut pas représenter la valeur d'un produit dérivé dépendant du cours S. Si un produit dérivé ayant pour valeur e^S existait, il y aurait une opportunité d'arbitrage. Considérons un second exemple en utilisant la fonction suivante :

$$\frac{\mathrm{e}^{(\sigma^2-2r)\,(T-t)}}{S}$$

Cette fonction vérifie l'EDP (15.16). Ainsi, en théorie, le prix du produit dérivé défini par la fonction présentée ci-dessus est un prix de marché acceptable (il correspond au prix d'un actif dérivé dont le payoff à l'échéance est $1/S_T$). D'autres exemples de produits dérivés possibles sont donnés dans les exercices 15.11, 15.12, 15.23 et 15.28.

15.7 L'évaluation risque-neutre

Nous avions introduit l'évaluation risque-neutre en relation avec le modèle binomial au chapitre 13. Ce mode d'évaluation est sans aucun doute l'outil essentiel en matière de valorisation de produits dérivés. Il résulte en effet de l'une des propriétés clés de l'EDP (15.16) de Black-Scholes-Merton, énoncée à la section précédente : cette équation ne fait intervenir aucune variable affectée par le degré d'aversion au risque des investisseurs. Les variables intervenant dans cette équation sont : le temps, la volatilité de l'action et le taux sans risque. Toutes ces variables sont bien indépendantes de la tolérance au risque de l'investisseur. Le cours de l'action est supposé être un cours d'équilibre ; par conséquent, la tolérance au risque de l'investisseur est déjà prise en compte dans cette variable.

L'EDP de Black-Scholes-Merton ne serait pas indépendante du degré d'aversion au risque si elle incorporait l'espérance de rentabilité de l'action, μ, qui dépend elle-même de l'aversion au risque des investisseurs. En effet, rappelons que l'espérance de rentabilité est une fonction du risque de l'actif. Plus l'aversion au risque est élevée, plus l'investisseur exigera une espérance de rentabilité importante pour tout titre risqué. Or, comme nous l'avons vu précédemment, μ n'entre pas dans la formulation de l'équation aux dérivées partielles.

À partir de cette constatation, il est possible d'énoncer les remarques suivantes.

Puisque l'EDP de Black-Scholes-Merton est indépendante du degré d'aversion par rapport au risque, un raisonnement ingénieux peut être utilisé. Si le paramètre de risque ne s'inscrit pas dans l'équation, il n'a alors aucun impact sur la solution de l'équation. Ainsi, nous pouvons choisir arbitrairement n'importe quel niveau d'aversion risque. En

particulier, nous pouvons envisager l'hypothèse la plus simple consistant à supposer que les investisseurs sont neutres face au risque.

Dans un univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tout titre, quel qu'il soit, est le taux sans risque, r. Par conséquent, la valeur présente de tout flux de trésorerie est obtenue en actualisant l'espérance de ce flux au taux sans risque r. Pouvoir supposer que l'investisseur évolue dans un univers risque-neutre simplifie donc considérablement l'analyse et l'évaluation des produits dérivés. Il suffit en effet d'appliquer la méthode suivante.

1. Supposer que l'espérance de rentabilité du sous-jacent est égale au taux sans risque ($\mu = r$).
2. Calculer l'espérance du payoff de l'actif dérivé à l'échéance.
3. Actualiser cette espérance au taux d'intérêt sans risque.

Il est important de comprendre que se placer dans un univers risque-neutre (c'est-à-dire dans une économie où tous les agents sont neutres face au risque) est un simple artifice de calcul qui conduit à une résolution aisée de l'EDP de Black-Scholes-Merton. Les solutions obtenues par cette méthode sont naturellement valables dans tous les univers, même si les agents ne sont pas neutres face au risque. En effet, en passant d'un univers risque-neutre à un univers d'aversion au risque, deux phénomènes se produisent : l'espérance de rentabilité de l'action et le taux d'actualisation du payoff du produit dérivé sont modifiés…, et ces deux variations se compensent toujours exactement.

Application aux contrats forward sur action

À la section 5.7, nous avions évalué les contrats forward sur des actions qui ne versent pas de dividendes. Dans l'exemple 15.5, nous avons vu que la formule d'évaluation vérifiait l'EDP de Black-Scholes-Merton. Dans cette section, nous nous proposons de démontrer la formule d'évaluation à partir de la méthode d'évaluation risque-neutre. Nous supposons que les taux d'intérêt sont constants, égaux à r. Cette hypothèse est plus restrictive que celles du chapitre 5.

On considère une position longue sur un contrat forward, de prix de livraison K et d'échéance T. Comme nous l'avons illustré dans le graphique 1.2, la valeur de ce contrat à maturité s'écrit :

$$S_T - K$$

où S_T est le cours de l'action à l'échéance T. Le principe d'évaluation risque-neutre stipule que la valeur du contrat forward, notée f, en $t = 0$, est égale à sa valeur espérée en T, actualisée au taux sans risque sur la période considérée. On obtient l'expression suivante de la valeur du contrat forward f en $t = 0$:

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\,\hat{E}(S_T - K)$$

où $\hat{E}$ correspond à l'espérance de rentabilité de f dans un univers risque-neutre. Comme K est constant, cette équation devient :

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\,\hat{E}(S_T) - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{15.18}$$

L'espérance du taux de rentabilité de l'action, μ, devient alors r, dans un univers risque-neutre. À partir de l'équation (15.4), on obtient :

$$\hat{E}(S_T) = S_0 \, \mathrm{e}^{rT} \tag{15.19}$$

En substituant (15.19) dans (15.18) on obtient :

$$f = S_0 - K \, \mathrm{e}^{-rT}$$

Ce résultat corrobore bien ceux qui ont été démontrés à la section 5.5.

15.8 Les formules d'évaluation de Black-Scholes-Merton

Les formules de Black-Scholes-Merton permettant de calculer, à la date zéro, la valeur d'un call européen ou d'un put européen sur une action qui ne verse pas de dividendes sont les suivantes :

$$c = S_0 \, N(d_1) - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(d_2) \tag{15.20}$$

$$p = K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(-d_2) - S_0 \, N(-d_1) \tag{15.21}$$

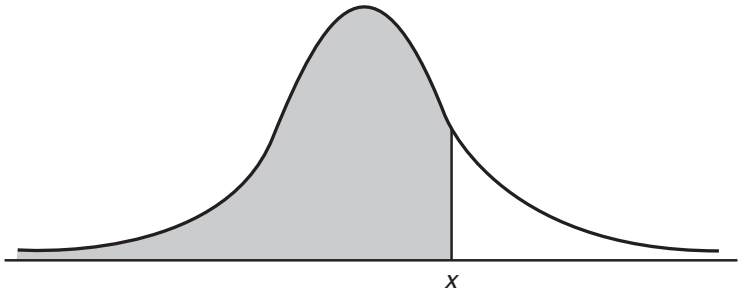
avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2) \, T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2) \, T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La fonction $N(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite. En d'autres termes, c'est la probabilité qu'une variable suivant une loi normale, $\phi(0, 1)$, soit inférieure à x. Cette idée est illustrée dans le graphique 15.3. Les autres variables de la formule sont désormais familières.



Graphique 15.3 : La partie grisée représente $N(x)$

Une manière de démontrer la formule de Black et Scholes consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles (15.16), en tenant compte des conditions aux bornes mentionnées à la section 15.6 [6]. Une seconde approche consiste à utiliser la méthode d'éva-

6. L'EDP fournit la valeur du call et du put à une date quelconque t. Par exemple, la valeur du call qui satisfait l'EDP est $c = SN(d_1) - K \, \mathrm{e}^{-r(T-t)} \, N(d_2)$, avec $d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$. Voir l'exercice 15.17 pour vérifier que l'EDP est bien satisfaite.

luation risque-neutre. Considérons un call européen ; l'espérance de la valeur de cette option à l'échéance s'écrit :

$$\hat{E}\left[\max\left(S_T - K\,;0\right)\right]$$

où $\hat{E}$ désigne l'opérateur d'espérance dans un univers risque-neutre. Selon cette approche, la valeur du call européen, c, est égale à l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance, actualisée au taux sans risque :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\,\hat{E}\left[\max\left(S_T - K\,;0\right)\right] \tag{15.22}$$

L'annexe de ce chapitre montre que cette formulation conduit au résultat présenté dans l'équation (15.20).

Puisque la valeur d'un call européen est égale à celle d'un call américain quand il n'y a pas de dividendes (voir section 11.5), l'équation (15.20) nous donne aussi la valeur d'un call américain sur cette action. Malheureusement, aucune formule analytique ne donne la valeur d'un put américain sur une action qui ne verse pas de dividendes. Des solutions quasi analytiques et des approximations numériques applicables à l'évaluation des puts américains sont détaillées au chapitre 21.

Dans la pratique, la formule de Black et Scholes est appliquée avec un taux sans risque égal au taux actuariel d'un zéro-coupon sans risque de maturité T. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, cette pratique se révèle exacte d'un point de vue théorique quand r est une fonction connue du temps. Elle est aussi exacte quand le taux d'intérêt est stochastique, tant que le cours de l'action à la date T suit une loi log-normale et que le paramètre de volatilité est choisi de façon appropriée.

Interprétation de $N(d_1)$ et $N(d_2)$

Le terme $N(d_2)$ dans l'équation (15.20) est la probabilité, dans l'univers risque-neutre, que l'option soit exercée. $KN(d_2)$ est donc l'espérance du décaissement à l'échéance. Toujours dans l'univers risque-neutre, l'expression $S_0\,N(d_1)\,\mathrm{e}^{rT}$ est l'espérance d'une variable valant S_T si $S_T > K$, et zéro sinon. C'est l'encaissement espéré à l'échéance. Le prix de l'option donné par l'équation (15.20) peut donc être vu comme la valeur actuelle nette espérée du projet d'investissement « achat de l'option ».

Une interprétation alternative consiste à écrire le prix du call sous la forme :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)\,(S_0\,\mathrm{e}^{rT}\,N(d_1)/N(d_2) - K) \tag{15.23}$$

Les termes de cette équation sont définis comme suit :

e^{-rT} est le facteur d'actualisation ;

$N(d_2)$ est la probabilité d'exercice ;

$\mathrm{e}^{rT}\,N(d_1)/N(d_2)$ est le pourcentage attendu d'évolution, dans l'univers risque-neutre, du prix de l'action en cas d'exercice ;

K est le prix d'exercice payé si l'option est exercée.

Les propriétés des formules de Black-Scholes-Merton

Nous allons maintenant montrer que les formules de Black, Scholes et Merton vérifient les propriétés générales des options, en étudiant ce que devient la formule lorsque certains paramètres tendent vers des valeurs limites.

Quand le cours S_0 de l'action sous-jacente devient très élevé, il est presque sûr qu'un call est dans la monnaie – et donc exercé – à l'échéance. L'option est alors semblable à un contrat forward ayant un prix d'exercice K. En utilisant l'expression (5.5), nous pouvons estimer la valeur de l'option par :

$$S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Cette expression est en fait le résultat donné par l'équation (15.20). En effet, quand S_0 tend vers l'infini, il en est de même pour d_1 et d_2 ; $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent donc vers 1,00. De même, le prix de l'option de vente correspondante, p, tend vers 0. En effet, plus on se rapproche de l'échéance, moins l'option a de chances de se retrouver dans la monnaie – et donc exercée – en T. Cela est cohérent avec l'équation (15.21) car $N(-d_1)$ et $N(-d_2)$ tendent tous deux vers 0.

Considérons maintenant l'impact d'une volatilité σ qui tend vers zéro. L'action est alors virtuellement sans risque et sa valeur doit croître au taux d'intérêt sans risque, r, jusqu'à $S_0\,\mathrm{e}^{rT}$ en date T. Le payoff du call, dans ce cas, s'écrit :

$$\max\left(S_0\,\mathrm{e}^{rT} - K\,;0\right)$$

Si l'on actualise cette expression au taux r, on obtient la valeur du call :

$$\mathrm{e}^{-rT}\max\left(S_0\,\mathrm{e}^{rT} - K\,;0\right) = \max\left(S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0\right)$$

Afin de montrer que ce résultat est cohérent avec l'équation (15.20), considérons d'abord le cas où $S_0 > K\,\mathrm{e}^{-rT}$. Cette inégalité implique que $\ln(S_0/K) + rT > 0$. Quand σ tend vers zéro, d_1 et d_2 tendent vers $+\infty$, et donc $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent vers 1. L'équation (15.20) devient :

$$c = S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Lorsque, au contraire, $S_0 < K\,\mathrm{e}^{-rT}$, $\ln(S_0/K) + rT < 0$. Quand σ tend vers zéro, d_1 et d_2 tendent vers $-\infty$, donc $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent vers zéro et l'équation (15.20) indique que le call a une valeur nulle.

Par conséquent, la valeur du call s'écrit $\max(S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,;0)$ quand σ tend vers zéro. De même, le prix d'un put s'écrit $\max(K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,;0)$ quand σ tend vers zéro.

15.9 La fonction de répartition de la loi normale

L'unique problème lié à la mise en œuvre des équations (15.20) et (15.21) est le calcul de la fonction de répartition, N. Les tables de la loi normale sont fournies à la fin de cet ouvrage. La fonction Excel LOI.NORMALE.STANDARD.N (ou « NORMSDIST » dans la version anglaise) fournit également un moyen pratique de calculer (voir exemple 15.6).

■ **Exemple 15.6** À six mois de l'échéance d'une option, le cours de l'action sous-jacente est 42 €, le prix d'exercice de l'option est 40 €, le taux d'intérêt sans risque 10 %, et la volatilité annuelle 20 %.

On a donc :

$$S_0 = 42,\ K = 40,\ r = 0{,}1,\ \sigma = 0{,}2 \text{ et } T = 0{,}5$$
$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 + 0{,}2^2/2) \times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$
$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 - 0{,}2^2/2) \times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}6278$$

et :

$$K\,\mathrm{e}^{-rT} = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}05} = 38{,}049$$

Ainsi, si cette option est un call européen, sa valeur, c, est donnée par :

$$c = 42\,N(0{,}7693) - 38{,}049\,N(0{,}6278)$$

Si cette option est un put européen, sa valeur, p, est donnée par :

$$p = 38{,}049\,N(-0{,}6278) - 42\,N(-0{,}7693)$$

En utilisant la fonction Excel LOI.NORMALE.STANDARD, on obtient :

$$N(0{,}7693) = 0{,}7791,\ \ N(-0{,}7693) = 0{,}2209,$$
$$N(0{,}6278) = 0{,}7349,\ \ N(-0{,}6278) = 0{,}2651$$

et donc :

$$c = 4{,}76,\ \ p = 0{,}81$$

Si on néglige l'actualisation, le cours de l'action doit augmenter de 2,76 € d'ici à l'échéance pour que la position globale de l'acheteur du call soit à l'équilibre, c'est-à-dire que son gain compense le prix d'achat de l'option. De même, le cours de l'action doit baisser de 2,81 € d'ici à l'échéance pour atteindre le point mort de l'acheteur du put.

15.10 Les warrants émis par une société sur ses propres titres

L'exercice d'une option classique n'a pas d'influence sur le nombre d'actions d'une entreprise. Si le vendeur d'un call doit livrer le sous-jacent à l'échéance et qu'il ne le possède pas, il lui suffit de l'acheter sur le marché. Comme nous l'avons évoqué au chapitre 10, les warrants et les stock-options sont différents de ce point de vue, puisque leur exercice implique la création d'actions supplémentaires qui sont livrées au détenteur de l'option ou du warrant en échange du paiement du prix d'exercice. Comme le prix d'exercice est forcément inférieur au prix de marché en cas d'exercice, il y a un phénomène de dilution supporté par les actionnaires.

Comment cette dilution potentielle affecte-t-elle la méthode d'évaluation des warrants et des stock-options ? La réponse est qu'elle ne devrait avoir aucun effet. Si les marchés sont efficients, le prix de l'action intègre déjà la dilution potentielle (voir encadré 15.3) [7].

Encadré 15.3 Warrants, stock-options et dilution

Considérons une entreprise dont le capital comprend 100 000 actions valant 50 € chacune. Elle annonce brutalement qu'elle va distribuer 100 000 stock-options à ses employés, stock-options dont le prix d'exercice est 50 € et qui seront exerçables dans trois ans. Si le marché n'interprète pas cette annonce comme la promesse d'une réduction des salaires ou comme un indice de l'accroissement de la motivation des salariés dans le futur, le prix de l'action va diminuer immédiatement. Si, par exemple, il tombe à 45 €, le coût de dilution est de 5 € par titre, soit 500 000 € au total.

Supposons maintenant que, pendant la période de trois ans suivant l'émission, l'entreprise a de bons résultats qui amènent le cours de ses actions à 100 €. L'exercice des options va rapporter 50 € par stock-option aux détenteurs. Il serait tentant de dire que cela correspond à une dilution supplémentaire puisque 100 000 titres valant 100 € chacun ont été ajoutés à 100 000 titres pour lesquels les acheteurs ont payé un prix unitaire de 50 €, et cela devrait (a) baisser le prix à 75 € et (b) diminuer le revenu du détenteur de stock-option à 25 € par titre. Ce raisonnement ne tient pas, car l'exercice des options est anticipé sans difficulté par le marché et déjà reflété dans le prix de l'action.

Cet exemple montre que, quand les marchés sont efficients, l'impact de la dilution créée par des warrants ou des stock-options est traduit dans le prix dès l'annonce de l'émission. Il n'a pas besoin d'être à nouveau intégré dans l'évaluation des options.

Considérons une entreprise dont le capital comprend N actions et qui a émis M warrants européens. Supposons que chaque warrant confère à son détenteur le droit d'acheter une action de cette entreprise, à la date T, à un prix unitaire K.

Si NS_T représente la valeur des actions de cette société (warrants inclus) à la date T et si les détenteurs des warrants décident d'exercer, alors l'entreprise émettrice percevra un flux de trésorerie égal aux paiements des prix d'exercice MK. La valeur des actions de la société augmentera donc pour atteindre $NS_T + MK$. Cette valeur est redistribuée aux $N + M$ actions et le cours de l'action, après exercice, devient alors égal à :

$$\frac{NS_T + MK}{N + M}$$

7. Les analystes supposent parfois que la somme des valeurs des warrants et des actions suit une loi lognormale. Cela permet d'obtenir une équation du type Black-Scholes pour la valeur du warrant. Voir la note technique n° 3 sur le site www.pearson.fr pour une présentation de ce modèle.

Quand le warrant est exercé, la valeur du revenu obtenu par son détenteur est de :

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} - K$$

ou encore :

$$\frac{N}{N + M}(S_T - K)$$

Les warrants ne devraient être exercés que si le payoff est positif. Le payoff accordé au détenteur d'un warrant est par conséquent :

$$\frac{N}{N + M}\max(S_T - K\,;0)$$

Cela nous montre que la valeur d'un warrant est équivalente à :

$$\frac{N}{N + M}$$

options d'achat sur l'action de l'entreprise. Le coût total de ces options est donc égal à M fois cette quantité. Puisque nous supposons que la société ne retire aucun bénéfice particulier à émettre des warrants, la valeur totale des actions de l'entreprise va baisser du coût total des options dès que la décision d'émettre les warrants est publiée. Cela signifie que la réduction du prix de l'action est :

$$\frac{M}{N + M}$$

fois la valeur d'une option d'achat classique de prix d'exercice K et de maturité T.

■ **Exemple 15.7** Une entreprise dont le capital est constitué d'un million d'actions d'une valeur unitaire de 40 € envisage d'émettre 200 000 bons de souscription d'actions donnant au détenteur de chaque warrant le droit d'acheter une action à un prix de 60 € dans cinq ans. Elle souhaite en évaluer le coût. Le taux d'intérêt est de 3 % par an et la volatilité annuelle de 30 %. L'entreprise ne verse aucun dividende. En utilisant l'équation (15.20), on déduit que la valeur d'une option d'achat européenne à cinq ans sur cette action est de 7,04 €. Ici, N = 1 000 000 et M = 200 000, de sorte que la valeur de chaque warrant est :

$$\frac{1\,000\,000}{1\,000\,000 + 200\,000} \times 7{,}04 = 5{,}87$$

soit 5,87 €. Le coût total de l'émission des warrants est de :

$$200\,000 \times 5{,}87 = 1\,170\,000\ €$$

En supposant que le marché ne perçoive aucun bénéfice particulier lié à l'émission des warrants, nous pouvons prévoir une baisse du cours de l'action de 1,17 € à 38,83 €.

15.11 Les volatilités implicites

Dans la formule d'évaluation d'options de Black et Scholes, un seul paramètre ne peut être observé directement : la volatilité de l'action. À la section 15.4, nous avions expliqué comment il était possible de l'estimer à partir d'historiques de cours. En pratique, les traders travaillent avec la volatilité implicite. Cette volatilité est calculée à partir des prix des options cotées sur le marché [8].

Pour illustrer ce calcul, supposons que le prix d'un call sur action soit 1,875 € quand $S_0 = 21$, $K = 20$, $r = 0{,}1$, et $T = 0{,}25$. La volatilité implicite est la valeur de σ qui, quand elle est substituée dans l'équation (15.20), donne $c = 1{,}875$ €. Malheureusement, il n'est pas possible d'inverser l'équation (15.20) et d'exprimer σ en fonction de S_0, K, r, T et c. Cependant, il est possible de déterminer la valeur de cette volatilité implicite en utilisant un processus itératif. Par exemple, en débutant la résolution avec $\sigma = 0{,}20$, on trouve $c = 1{,}76$. Cette valeur est trop faible, la volatilité implicite est donc supérieure à 0,20. Pour $\sigma = 0{,}30$, on a $c = 2{,}10$ qui est trop élevé. Choisir le milieu de l'intervalle précédent (0,20 ; 0,30) permet d'approcher, puis de trouver la valeur de σ [9], avec le degré de précision souhaité. Dans cet exemple, on finit par trouver la volatilité implicite $\sigma = 23{,}5$ % par an.

Le niveau de volatilité implicite appréhende la volatilité, telle qu'elle est perçue par les opérateurs, pour les semaines ou mois à venir. Tandis que les volatilités historiques (voir la section 15.4) sont tournées vers le passé, les volatilités implicites sont plutôt prospectives. Les traders utilisent plus souvent la volatilité implicite d'une option que son prix comme référence de la valeur de ce contrat. Cette référence est pratique, dans la mesure où elle tend à être moins variable que le prix. Comme nous l'expliquerons au chapitre 20, la volatilité implicite des options liquides est utilisée par les traders pour estimer de manière appropriée les volatilités implicites d'autres options.

L'indice VIX

Le CBOE publie des indices de volatilité implicite. Le plus populaire, le VIX SPX, est un indice de la volatilité implicite des options à 30 jours sur le S&P500, calculé à partir d'un large éventail de calls et de puts [10]. Des précisions sur la façon dont l'indice est calculé sont fournies dans la section 26.15. Des contrats à terme sur le VIX sont négociés depuis 2004 et des options sur le VIX sont échangées depuis 2006. Une opération impliquant des futures ou des options sur le S&P500 constitue un pari sur le niveau futur de l'indice S&P500, mais aussi sur la volatilité du S&P500. En revanche, des futures ou

8. Les volatilités implicites pour des options américaines ou européennes peuvent être calculées à l'aide de DerivaGem.

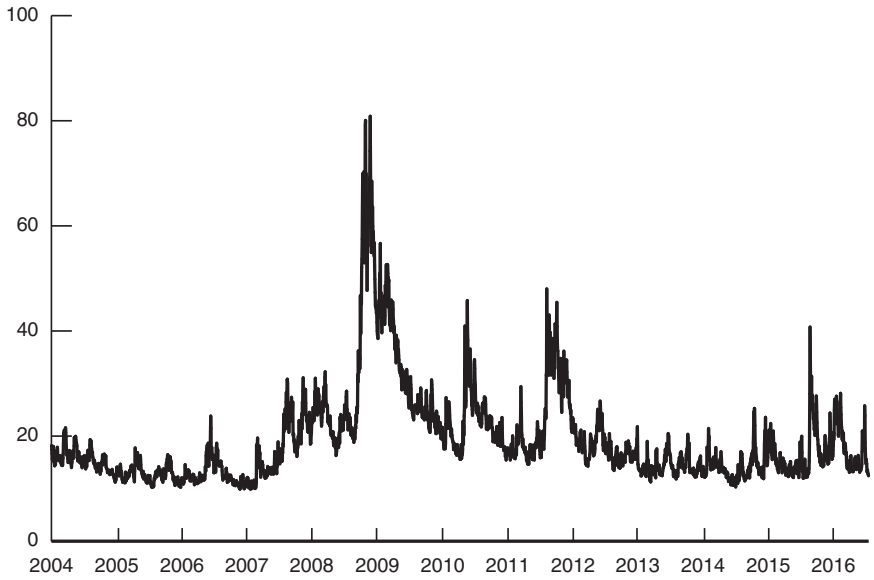
9. Cette méthode est présentée à titre d'exemple. D'autres méthodes plus puissantes, comme celle de Newton-Raphson, sont généralement utilisées dans la pratique (voir la note de bas de page 3 du chapitre 4). Le logiciel DerivaGem peut être employé pour calculer les volatilités implicites.

10. De même, le VXN est un indice de volatilité de l'indice NASDAQ 100 et le VXD un indice de volatilité de l'indice Dow Jones Industrial Average. NYSE-Euronext a créé en 2007 trois indices calculés selon la même méthodologie que le VIX : l'AEX Volatility Index, le BEL 20 Volatility Index et le CAC 40 Volatility Index. Un quatrième indice, le FTSE 100 Volatility Index, a complété ensuite l'offre de NYSE-Euronext en indices de volatilité (http://volatility.euronext.com).

des options sur le VIX ne constituent qu'un pari sur la volatilité. Un contrat porte sur 1 000 fois l'indice.

■ **Exemple 15.8** Supposons qu'un trader achète un contrat futures sur le VIX d'échéance avril lorsque le prix futures est de 18,5 (correspondant à une volatilité à 30 jours sur le S&P500 de 18,5 %) et déboucle sa position lorsque le prix futures est de 19,3 (correspondant à une volatilité sur le S&P500 de 19,3 %). Le trader réalise alors un gain de 800 $.

Le graphique 15.4 montre l'indice VIX entre janvier 2004 et juillet 2016. Entre 2004 et mi-2007, il a varié entre 10 et 20. Il a atteint 30 au cours de la seconde moitié de l'année 2007 et un record de 80 en octobre et novembre 2008, après la faillite de Lehman Brothers. Au début de 2010, il a chuté à un niveau plus habituel, mais en mai 2010 et au second semestre 2011, il est remonté à plus de 45 en raison de la crise de la dette souveraine européenne et de l'incertitude pesant sur les marchés financiers.



Graphique 15.4 : L'indice VIX de janvier 2004 à juillet 2016

15.12 Les dividendes

Jusqu'à maintenant, nous avions supposé que les actions sous-jacentes aux options ne versaient pas de dividendes. Dans cette section, nous allons modifier le modèle de Black et Scholes afin de prendre en compte ces dividendes. Nous supposons que les dividendes payables pendant la durée de vie de l'option ainsi que les dates de paiement sont connus. Cette hypothèse n'est pas contraignante pour les options d'échéance courte. En revanche, pour les options longues (dont la durée de vie est de plusieurs années par exemple), la détermination d'un taux de croissance des dividendes est plus délicate et complique l'évaluation.

Il est raisonnable de penser qu'une action versant un dividende suit le processus stochastique présenté au chapitre 17, sauf au moment du détachement. À cet instant, le cours de l'action diminue d'un montant à peu près égal au dividende [11].

Les options européennes

Les options européennes peuvent être étudiées en supposant que le prix de l'action est la somme de deux composantes : la première, sans risque, est le montant connu du dividende qui sera payé pendant la durée de vie de l'option ; la seconde est risquée. À tout moment, la composante sans risque est la valeur actualisée au taux sans risque de tous les dividendes susceptibles d'être distribués pendant la durée de vie de l'option. Au fur et à mesure que les options se rapprochent de l'échéance, les dividendes sont versés et la composante sans risque disparaît. La formule de Black et Scholes est alors correcte si S_0 est égal à la composante risquée de l'action, et σ est la volatilité du processus suivi par cette partie risquée [12]. En pratique, cela revient à dire que la formule de Black et Scholes est applicable, à condition de déduire du cours de l'action la valeur actualisée des dividendes payables pendant la durée de vie de l'option. L'actualisation s'effectue au taux sans risque à partir des dates de détachement.

■ **Exemple 15.9** Considérons un call européen ayant pour sous-jacent une action qui paie un dividende dans 2 mois, puis un autre dans 5 mois. Le montant attendu pour chaque dividende, à la date de son détachement, s'élève à 0,50 €. Le cours de l'action est actuellement de 40 €, le prix d'exercice de l'option est de 40 €, la volatilité historique annuelle de l'action est 30 %, le taux sans risque 9 %, et l'échéance à six mois. La valeur actualisée des dividendes est donc :

$$0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}1667\times 0{,}09} + 0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}4167\times 0{,}09} = 0{,}9741$$

L'application de la formule de Black et Scholes, avec : $S_0 = 39{,}0259$, $K = 40$, $r = 0{,}09$, $\sigma = 0{,}3$ et T = 0,5, conduit à :

$$d_1 = \frac{\ln(39{,}0259/40) + (0{,}09 + 0{,}3^2/2)\times 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = 0{,}2017$$

$$d_2 = \frac{\ln(39{,}0259/40) + (0{,}09 - 0{,}3^2/2)\times 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = -0{,}0104$$

11. Pour des raisons fiscales, il est possible que le cours de l'action diminue d'un peu moins que le montant du dividende. Afin d'en tenir compte, il convient – dans cette section – d'entendre par dividende le montant D égal à la différence $D = S_1 - S_0$, où S_0 représente le cours de l'action avant le paiement du dividende, et S_1 le cours de l'action post-dividende. Ainsi, si nous anticipons par exemple un dividende de 1 €, mais que, le jour du détachement, le cours de l'action ne baisse que de 0,80 €, nous retiendrons, pour le propos de notre analyse, un dividende de 0,80 €.

12. En théorie, ce n'est pas tout à fait la même volatilité que celle du processus stochastique suivi par le cours de l'action dans son ensemble. La volatilité de la composante risquée est approximativement égale à celle de l'action multipliée par $S_0/(S_0 - D)$, où D est la valeur actuelle des dividendes. Cependant, un ajustement n'est nécessaire que si les volatilités sont estimées d'après des données historiques. Une volatilité implicite est calculée après que la valeur actuelle des dividendes a été soustraite du cours de l'action, et elle représente donc bien la volatilité de la composante risquée.

À l'aide de la fonction Excel LOI.NORMALE.STANDARD, nous trouvons :

$$N(d_1) = 0{,}5800, \;\; N(d_2) = 0{,}4959$$

Le prix du call, c, par l'équation (15.20), est égal à :

$$39{,}0259 \times 0{,}5800 - 40\,\mathrm{e}^{-0{,}09\times 0{,}5} \times 0{,}4959 = 3{,}67$$

soit 3,67 €.

Certains chercheurs ont critiqué cette approche d'évaluation d'option européenne sur un titre versant des dividendes. Ils font valoir que la volatilité devrait être appliquée sur la valeur de l'action, sans soustraire la valeur actualisée des dividendes. Un certain nombre de procédures numériques différentes ont été proposées à cette fin [13]. Lorsque la volatilité est calculée à partir de données historiques, il paraît judicieux d'utiliser l'une de ces procédures. Cependant, dans la pratique, la volatilité utilisée pour évaluer une option est presque toujours la volatilité implicite, obtenue selon la méthode exposée dans le chapitre 20. Si un analyste retient le même modèle à la fois pour la volatilité implicite et pour la volatilité utilisée, les résultats devraient être précis et peu dépendants du modèle. Autre point important : le chapitre 18 explique que les praticiens évaluent généralement une option européenne en fonction du prix forward de l'actif sous-jacent. Cela évite de devoir estimer le revenu qui est attendu de l'actif. La volatilité du prix forward de l'action est la même que celle du prix des actions, dont on soustrait la valeur actualisée des dividendes. Le modèle que nous avons proposé, qui consiste à diviser la valeur des actions en deux composantes, est cohérent et largement utilisé dans la pratique. Nous utiliserons le même modèle lors de l'évaluation des options américaines dans le chapitre 21.

Les options américaines

Penchons-nous à présent sur les calls américains. Au chapitre 11, nous avons montré qu'en l'absence de dividendes, les calls américains ne sont jamais exercés prématurément. L'extension de ce raisonnement montre que lorsqu'une action verse un dividende, il peut être judicieux d'exercer juste avant la date de détachement. Supposons que n dates de détachement soient prévues et que t_1, t_2, … t_n soient les dates précédant ces détachements, avec $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$. Les dividendes correspondants sont notés D_1, D_2, …, D_n.

Considérons d'abord le cas où l'option est exercée juste avant le détachement du dernier dividende (c'est-à-dire en t_n). L'investisseur reçoit alors :

$$S(t_n) - K$$

Si, en revanche, l'option n'est pas exercée, le cours de l'action diminue et vaut :

$$S(t_n) - D_n$$

13. Voir, par exemple, N. Areal et A. Rodrigues, "Fast Trees for Options with Discrete Dividends", ***Journal of Derivatives***, 21 (1), automne 2013, 49-63.

Ainsi, comme nous l'avons démontré dans l'équation (11.4), le prix de l'option est alors supérieur à :

$$S(t_n) - D_n - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t_n)}$$

ce qui conduit à dire que si :

$$S(t_n) - D_n - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t_n)} \geq S(t_n) - K$$

c'est-à-dire :

$$D_n \leq K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t_n)}\right) \tag{15.24}$$

il n'est alors pas optimal d'exercer cette option à l'instant t_n.

D'un autre côté, si :

$$D_n > K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t_n)}\right) \tag{15.25}$$

il est possible de montrer qu'exercer l'option à l'instant t_n, si la valeur de $S(t_n)$ est suffisamment élevée, est optimal, quelles que soient les hypothèses (raisonnables) émises sur le processus stochastique suivi par le cours de l'action. L'inégalité (15.25) tendra donc à être vérifiée quand la date de détachement du dernier dividende est proche de l'échéance de l'option et quand le montant du dividende est important.

Considérons maintenant l'instant t_{n-1} auquel l'avant-dernier dividende est détaché. Si l'option est exercée en t_{n-1}, l'investisseur reçoit alors :

$$S(t_{n-1}) - K$$

Si l'option n'est pas exercée en $t_{n-1,}$le cours de l'action diminue et devient :

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1}$$

L'exercice ultérieur le plus rapproché de l'option envisagée est alors t_n. L'équation (11.4) fournit la borne inférieure suivante pour le prix de l'option, dans le cas où elle n'est pas exercée en t_{n-1} :

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - K\,\mathrm{e}^{-r\left(t_n - t_{n-1}\right)}$$

Cela conduit à dire que si :

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - K\,\mathrm{e}^{-r\left(t_n - t_{n-1}\right)} \geq S(t_{n-1}) - K$$

soit :

$$D_{n-1} \leq K\left(1 - \mathrm{e}^{-r\left(t_n - t_{n-1}\right)}\right)$$

il n'est alors pas optimal d'exercer l'option en t_{n-1}.

De même, pour tout $i < n$, si :

$$D_i \leq K\left(1 - \mathrm{e}^{-r\left(t_{i+1} - t_i\right)}\right) \tag{15.26}$$

il n'est pas optimal d'exercer à la date t_i.

L'inégalité (15.26) est approximativement équivalente à :

$$D_i \leq Kr\left(t_{i+1} - t_i\right)$$

Si nous émettons l'hypothèse selon laquelle K est relativement proche du cours de l'action, il faudrait alors que le taux de dividende soit proche ou supérieur au taux sans risque pour que cette inégalité ne soit pas vérifiée. C'est rarement le cas.

Nous pouvons conclure de cette analyse que, dans la plupart des cas, le seul moment où l'exercice anticipé d'une option d'achat américaine peut être envisagé est à la date précédant juste le détachement du dernier dividende, en t_n. Cependant, si l'inégalité (15.26) est vérifiée pour les valeurs de i=1, 2, ..., $n-1$, et si l'inégalité (15.24) est également vérifiée, alors nous pouvons être sûr qu'un exercice prématuré de cette option n'est jamais optimal.

L'approximation de Black

Black propose une procédure d'approximation qui tient compte des possibilités d'exercice anticipé d'un call [14]. Elle implique de calculer, comme nous l'avons expliqué auparavant, les valeurs des options européennes dont les échéances sont T et t_n. On définit alors la valeur de l'option américaine comme étant la plus grande de ces deux valeurs [15]. Il s'agit d'une approximation, car on suppose que le détenteur de l'option doit décider aujourd'hui s'il exercera l'option en T ou t_n.

Résumé

Nous avons débuté ce chapitre par l'examen des propriétés du processus suivi par le cours des actions, tel que nous l'avions introduit au chapitre 14. Ce processus implique que le cours des actions à une date future donnée, conditionnée par la valeur de l'action aujourd'hui, suit une loi log-normale. Il implique également que la rentabilité de l'action pour une période de temps donnée, calculée en taux composé continu, suit une distribution normale. L'incertitude quant à la valeur future de l'action augmente avec l'horizon temporel. L'écart-type du logarithme du cours de l'action est en fait proportionnel à la racine carrée de l'horizon considéré.

Pour estimer la volatilité, σ, du cours d'une action de façon empirique, le cours est observé selon une périodicité régulière (par exemple, chaque jour, chaque semaine ou chaque mois). Pour chaque période, on calcule le logarithme népérien du ratio : cours de l'action à la fin de la période sur cours de l'action au début de la période. La volatilité est estimée par l'écart-type de ces résultats, divisé par la racine carrée de la longueur de la période (définie en années). Généralement, les jours où la Bourse est fermée sont ignorés pour le calcul de la volatilité.

L'équation aux dérivées partielles, vérifiée par la valeur de tout actif dérivé dont le sous-jacent est une action, peut être obtenue par la création d'une position sans risque en

14. Voir F. Black, "Fact and Fantasy in the Use of Options" *Financial Analysts Journal*, 31, juillet/août 1975, 36-41, 61-72.

15. Cette approximation semble bien fonctionner dans la plupart des cas. Une procédure plus précise est proposée par Roll (1977), Geske (1979) et Whaley (1981) (voir note technique n° 4 sur le site www.pearson.fr). Elle fait intervenir la fonction de répartition d'une loi normale bivariée dont le calcul est donné dans la note technique n° 5 sur le même site.

actif dérivé et en actions. Puisque la valeur du produit dérivé et le cours de l'action dépendent tous deux de la même source d'incertitude, une telle position peut toujours être réalisée. Cette position ne demeure sans risque que durant une très courte période de temps. Néanmoins, la rentabilité d'une position sans risque doit toujours être égale au taux sans risque s'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.

L'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'EDP de Black et Scholes. La méthode d'évaluation risque-neutre établit que lorsqu'un produit dérivé sur action est évalué, il est possible de se placer dans un univers risque-neutre. L'espérance de rentabilité de l'action est alors égale au taux sans risque et il suffit d'actualiser les payoffs à ce taux. Les formules de Black et Scholes pour les options européennes peuvent être obtenues soit en résolvant l'EDP, soit en utilisant l'évaluation risque-neutre.

La volatilité implicite est la volatilité qui, lorsqu'elle est utilisée dans la formule d'évaluation de Black et Scholes, fournit le prix de marché de l'option. Les traders surveillent les volatilités implicites et utilisent fréquemment celles qui sont calculées à partir des options liquides pour évaluer les options moins liquides portant sur les mêmes sous-jacents. Les résultats empiriques montrent que la volatilité d'une action est plus élevée lorsque la Bourse est ouverte que lorsqu'elle est fermée. Cela suggère que ce sont les échanges eux-mêmes qui engendrent une grande part de la volatilité.

Les résultats de Black et Scholes peuvent être étendus aux calls et aux puts européens sur des actions versant des dividendes. La procédure consiste à utiliser la formule de Black et Scholes en réduisant le cours de l'action de la valeur anticipée des dividendes versés durant la vie de l'option. La volatilité est, quant à elle, égale à la volatilité du cours de l'action dont on a déduit la valeur actuelle de ces dividendes.

En théorie, les calls américains sont susceptibles d'être exercés prématurément, juste avant la date de détachement d'un quelconque dividende. En pratique, seule la date de détachement du dernier dividende nécessite d'être étudiée. Fischer Black a suggéré une méthode d'approximation. Celle-ci consiste à définir la valeur du call américain comme la plus grande des valeurs de deux calls européens. Le premier a la même date d'échéance que le call américain ; le second a une date d'échéance égale à celle qui précède juste la date de détachement du dernier dividende.

Références complémentaires

Concernant la distribution des variations de cours d'action

Blattberg R. et N. Gonedes, "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, 47, avril 1974, 244-280.

Fama E. F., "The Behavior of Stock Prices", *Journal of Business*, 38, janvier 1965, 34-105.

Kon S. J., "Models of Stock Returns – A Comparison", *Journal of Finance*, 39, mars 1984, 147-165.

Richardson M. et T. Smith, "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns", *Journal of Business*, 66, 1993, 295-321.

Concernant l'analyse de Black et Scholes

Black F., "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal*, 31, juillet/août 1975, 36-41, 61-72.

BLACK F., "How we came up with the Option Pricing Formula", *Journal of Portfolio Management*, 15 (2), 1989, 4-8.

BLACK F. et M. SCHOLES, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, mai/juin 1973, 637-659.

MERTON R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, printemps 1973, 141-183.

Concernant l'évaluation risque-neutre

COX J. C. et S. A. ROSS, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, 145-166.

SMITH C. W., "Option Pricing : A Review", *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, 3-54.

Concernant les causes de la volatilité

FAMA E. E., "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, janvier 1965, 34-105.

FRENCH K. R., "Stock Returns and the Weekend Effect", *Journal of Financial Economics*, 8, mars 1980, 55-69.

FRENCH K. R. et R. ROLL, "Stock Return Variances : The Arrival of Information and the Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics*, 17, septembre 1986, 5-26.

ROLL R., "Orange Juice and Weather", *American Economic review*, 74 (5), décembre 1984, 861-880.

Problèmes et exercices

15.1 Que suppose le modèle d'évaluation de Black et Scholes à propos de la distribution de probabilité du cours de l'action sur une année ? Que suppose-t-il à propos du taux de rentabilité composé continu des actions sur l'année ?

15.2 La volatilité d'un cours d'action est de 30 % par an. Quel est l'écart-type du pourcentage de variation sur un jour de cotation ?

15.3 Expliquez le principe de l'évaluation risque-neutre.

15.4 Calculez la valeur d'un put européen à 3 mois portant sur une action ne versant pas de dividendes avec un prix d'exercice de 50 €, alors que le cours actuel de l'action est de 50 €. Le taux sans risque est de 10 % par an et la volatilité est de 30 % par an.

15.5 Comment modifiez-vous les calculs de l'exercice 15.4 si un dividende de 1,50 € est attendu dans deux mois ?

15.6 Qu'est-ce que la volatilité implicite ? Comment peut-elle être calculée ?

15.7 Une action est actuellement cotée 40 €. Supposez que son espérance de rentabilité soit de 15 % et que la volatilité soit de 25 %. Quelle est la distribution de probabilité suivie par le taux de rentabilité (en taux composé continu) sur une période de deux ans ?

15.8 Un cours d'action suit un mouvement brownien géométrique avec une espérance de rentabilité de 16 % et une volatilité de 35 %. Le cours actuel est de 38 €.

a. Quelle est la probabilité que soit exercé un call européen sur cette action, avec un prix d'exercice de 40 € et une échéance à 6 mois ?

b. Quelle est la probabilité que soit exercé un put européen sur cette action, avec le même prix d'exercice et la même échéance ?

15.9 En reprenant les notations de ce chapitre, démontrez qu'un intervalle de confiance à 95 % pour S_T est compris entre :

$$S_0 \, e^{\left(\mu - \sigma^2/2\right) T - 1{,}96\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$S_0 \, e^{\left(\mu - \sigma^2/2\right) T + 1{,}96\sigma\sqrt{T}}$$

15.10 Un gestionnaire de portefeuille annonce que la moyenne des rentabilités réalisées chaque année sur les 10 dernières années est de 20 % par an. En quoi cette annonce peut-elle être trompeuse ?

15.11 Supposons qu'une action ne versant pas de dividendes ait une espérance de rentabilité μ et une volatilité σ. Une institution financière innovante vient d'annoncer qu'un titre allait être coté, qui verserait à l'échéance un montant en euros égal à ln (S_T) à la date T, avec S_T représentant la valeur de l'action à la date T.

a. Utilisez l'évaluation risque-neutre pour calculer la valeur de ce titre à la date t, en fonction du cours de l'action en t, noté S.

b. Vérifiez que votre résultat satisfait l'EDP (15.16).

15.12 Soit un produit dérivé qui verse à l'échéance T un montant S_T^n, avec S_T le cours de l'action à cette date. Lorsque ce cours suit un mouvement brownien géométrique, sa valeur, en t ($t \leq T$), est de la forme :

$$h(t,T) \, S^n$$

où S est le cours de l'action en t et h est une fonction de t et de T uniquement.

a. Par substitution dans l'équation différentielle de Black et Scholes, exprimez l'équation différentielle ordinaire vérifiée par $h(t,T)$.

b. Quelle est la condition aux bornes pour l'équation différentielle de $h(t,T)$?

c. Montrez que :

$$h\,(t,T) = e^{\left[0{,}5\sigma^2 n(n-1) + r(n-1)\right](T-t)}$$

où r est le taux sans risque et σ est la volatilité de l'action.

15.13 Quelle est la valeur d'un call européen sur une action ne versant pas de dividendes lorsque le cours de l'action est de 52 €, le prix d'exercice de 50 €, le taux d'intérêt sans risque de 12 % par an, la volatilité de 30 % par an et l'échéance à 3 mois ?

15.14 Quelle est la valeur d'un put européen sur une action ne versant pas de dividendes lorsque le cours de l'action est de 69 €, le prix d'exercice de 70 €, le taux d'intérêt sans risque de 5 % par an, la volatilité de 35 % par an et l'échéance à 6 mois ?

15.15 Soit un call américain sur une action actuellement cotée 70 € ; l'échéance de l'option est dans huit mois, le taux sans risque est de 10 % par an, le prix d'exercice de 65 € et la volatilité de 32 %. Un dividende de 1 € est attendu dans trois mois, puis de nouveau dans six mois. Montrez qu'il n'est jamais optimal d'exercer l'option à aucune de ces deux dates de versement des dividendes. Utilisez DerivaGem pour calculer la valeur de l'option.

15.16 Un call sur une action ne versant pas de dividendes est coté 2,50 € sur le marché. Le cours de l'action est de 15 €, le prix d'exercice de 13 €, l'échéance à 3 mois et le taux sans risque de 5 % par an. Quelle est la volatilité implicite ?

15.17 Utilisant les notations de ce chapitre pour montrer les points suivants.

a. Que représente $N'(x)$?

b. Montrez que $SN'(d_1) = K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N'(d_2)$, où S est le cours de l'action en t et :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

c. Calculez $\partial d_1/\partial S$ et $\partial d_2/\partial S$.

d. Montrez que, quand $c = SN(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(d_2)$, on a :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rK\,\mathrm{e}^{-r.(T-t)}\,N(d_2) - SN'(d_1)\,\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

e. Montrez que $\partial c/\partial S = N(d_1)$.

f. Montrez que c satisfait l'équation différentielle de Black et Scholes.

g. Montrez que c satisfait la condition aux bornes d'un call européen, c'est-à-dire que $c = \max(S - K\,;0)$ lorsque t tend vers T.

15.18 Montrez que les formules de Black et Scholes pour les options d'achat et de vente satisfont la parité call-put.

15.19 Une action est actuellement cotée 50 € et le taux d'intérêt sans risque est de 5 %. Utilisez le logiciel DerivaGem pour convertir le tableau suivant concernant des calls européens en un tableau des volatilités implicites. Vous supposerez qu'il n'y a aucun versement de dividendes.

	Maturité (en mois)		
Prix d'exercice (en €)	**3**	**6**	**12**
45	7,0	8,3	10,5
50	3,7	5,2	7,5
55	1,6	2,9	5,1

Les valeurs des options valident-elles le modèle de Black et Scholes ?

15.20 Expliquez en détail pourquoi l'approche de Black pour évaluer un call américain sur une action versant des dividendes peut donner une réponse approximative seulement, même lorsqu'un seul dividende est anticipé. Est-ce que le résultat fourni par l'approche de Black surévalue ou sous-évalue l'option ? Justifiez votre réponse.

15.21 Soit un call américain sur une action cotée 50 € ; l'échéance est à 15 mois, le taux sans risque est 8 % par an, le prix d'exercice 55 € et la volatilité 25 %. Des dividendes de 1,50 € sont attendus au bout de 4 mois et au bout de 10 mois. Montrez qu'il n'est jamais optimal d'exercer l'option à aucune de ces deux dates de versement de dividendes. Calculez la valeur de l'option.

15.22 Montrez que la probabilité qu'un call européen soit exercé dans un univers risque-neutre est $N(d_2)$. Donnez une expression pour la valeur d'un produit dérivé qui verserait 100 € à l'échéance si le cours de l'action à la date T est plus élevé que K.

15.23 Utilisez le résultat de l'équation (15.17) pour déterminer la valeur d'un put américain perpétuel de prix d'exercice K sur une action ne versant pas de dividendes, s'il est exercé dès que le prix de l'action est égal à H avec $H < K$. Supposons que le prix actuel de l'action S est supérieur à H. Quelle est la valeur de H qui maximise la valeur de l'option ? Déduisez-en la valeur d'un put américain perpétuel de prix d'exercice K.

15.24 Une entreprise a émis des stock-options La dilution doit-elle être prise en compte dans l'évaluation des options ? Justifiez votre réponse.

15.25 Le prix d'une action d'une société est de 50 € et 10 millions d'actions sont en circulation. Cette société envisage de donner à ses employés trois millions d'options à la monnaie sur ses propres actions. L'exercice des options donnera lieu à l'émission d'actions nouvelles. La volatilité de la rentabilité de l'action est de 25 %, le taux sans risque à 5 ans est de 5 % et l'entreprise ne paie pas de dividendes. Estimez le coût d'émission de ces options pour l'entreprise.

Questions complémentaires

15.26 Si la volatilité d'une action est de 18 % par an, estimez l'écart type de la variation en pourcentage des prix dans (a) un jour, (b) une semaine et (c) un mois.

15.27 Le cours d'une action est actuellement de 50 €. L'espérance de rentabilité de l'action est 18 % et sa volatilité est 30 %. Quelle est la distribution de probabilité pour le cours de l'action dans deux ans ? Calculez la moyenne et l'écart-type de cette distribution. Déterminez un intervalle de confiance à 95 %.

15.28 Supposons que les observations du cours d'une action (en €) à la fin de 15 semaines consécutives soient les suivantes :

30,2 ; 32,0 ; 31,1 ; 30,1 ; 30,2 ; 30,3 ; 30,6 ; 33,0 ; 32,9 ; 33,0 ; 33,5 ; 33,5 ; 33,7 ; 33,5 ; 33,2

Estimez la volatilité du cours de l'action. Quelle est l'erreur type de votre estimation ?

15.29 Une institution financière planifie d'offrir un titre qui verse à l'échéance un montant en euros égal à S_T^2 à la date T.

a. Utilisez l'évaluation risque-neutre pour calculer la valeur de ce titre à la date t en fonction du cours de l'action S en t. (Conseil : l'espérance de la valeur de S_T^2 peut être calculée à partir de la moyenne et de la variance de S_T donnée à la section 15.1.)

b. Confirmez que cette valeur satisfait l'EDP (15.16).

15.30 Soit une option sur une action ne versant pas de dividendes et cotée actuellement 30 € ; le prix d'exercice est de 29 €, le taux sans risque annuel de 5 %, la volatilité de 25 % par an et l'échéance à 4 mois.

a. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un call européen ?

b. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un call américain ?

c. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un put européen ?

d. Vérifiez que la parité call-put est satisfaite.

15.31 Supposons que l'action de l'exercice précédent (15.30) verse un dividende de 0,50 € qui sera détaché au bout d'un mois et demi.

a. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un call européen ?

b. Quelle est la valeur de l'option s'il s'agit d'un put européen ?

c. Si l'option est un call américain, un exercice prématuré peut-il être optimal ?

15.32 Soit un call américain sur une action cotée 18 € ; le prix d'exercice est de 20 €, l'échéance à 6 mois, la volatilité de 30 % par an et le taux sans risque de 10 %. Deux versements de dividende de même montant sont attendus au cours de la vie de l'option, et les dates de détachement de ces dividendes sont situées dans deux mois et dans cinq mois. Le montant de chaque dividende est 0,40 €. Utilisez l'approximation de Black et le logiciel DerivaGem pour évaluer l'option. Jusqu'à quel montant le dividende peut-il s'élever sans que la valeur de l'option américaine soit supérieure à celle de l'option européenne correspondante ?

15.33 L'annexe utilise le résultat fondamental :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=E(V)\,N(d_1)-KN(d_2)$$

Démontrez que :

$$E\left[\max\left(K-V\,;0\right)\right]=KN(-d_1)-E(V)\,N(-d_2)$$

et utilisez ce résultat pour retrouver la formule de Black-Scholes-Merton valorisant un put européen qui porte sur une action ne versant pas de dividendes.

Annexe

Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton

Nous allons démontrer la formule de Black et Scholes en étudiant tout d'abord un autre résultat fondamental dont l'utilité sera confirmée dans les chapitres à venir.

Le résultat fondamental

Si V suit une loi log-normale et si s désigne l'écart-type de $\ln(V)$, alors :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=E(V)\,N(d_1)-KN(d_2) \tag{15A.1}$$

où :

$$d_1=\frac{\ln\left[E\left(V\right)/K\right]+s^2/2}{s}$$

$$d_2=\frac{\ln\left[E\left(V\right)/K\right]-s^2/2}{s}$$

et E désigne l'espérance mathématique.

Démonstration de ce résultat

Notons $g(V)$ la fonction de densité de probabilité de V ; on a alors :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=\int_K^{+\infty}\left(V-K\right)\,g\left(V\right)\,dV \tag{15A.2}$$

La variable $\ln V$ est distribuée selon une loi normale d'écart-type s. Grâce aux propriétés de la distribution log-normale, la moyenne de $\ln V$ est égale à m, où [16] :

$$m=\ln[E(V)]-s^2/2 \tag{15A.3}$$

Procédons au changement de variable :

$$Q=\frac{\ln\left(V\right)-m}{s} \tag{15A.4}$$

Cette variable est gaussienne centrée-réduite. Notons $h(Q)$ la fonction de densité de Q, définie par :

$$h\left(Q\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-Q^2/2}$$

En utilisant l'équation (15A.4) pour transformer le membre de droite de l'équation (15A.2) en intégrale par rapport à Q au lieu de V, nous obtenons :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=\int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{Qs+m}-K\right)\,h\left(Q\right)\,dQ$$

16. Pour une démonstration de ce point, voir la note technique n° 2 sur www.pearson.fr.

ou encore :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=\int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty}\mathrm{e}^{Qs+m}\,h\left(Q\right)\,dQ-K\int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty}h\left(Q\right)\,dQ\quad(15A.5)$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{Qs+m}\,h\left(Q\right)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\left(-Q^2+2Qs+2m\right)/2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\left[-(Q-s)^2+2m+s^2\right]/2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{m+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\left[-(Q-s)^2\right]/2}\\&=\mathrm{e}^{m+\frac{s^2}{2}}\,h\left(Q-s\right)\end{aligned}$$

L'équation (15A.5) devient alors :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=\mathrm{e}^{m+\frac{s^2}{2}}\int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty}h\left(Q-s\right)\,dQ-K\int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty}h\left(Q\right)\,dQ\quad(15A.6)$$

Si on note $N(x)$ la probabilité qu'une variable normale centrée-réduite soit inférieure à x, la première intégrale de l'équation (15A.6) est égale à :

$$1-N\left[\left(\ln\left(K\right)-m\right)/s-s\right]$$

ou encore :

$$N\left[\left(-\ln\left(K\right)+m\right)/s+s\right]$$

En substituant à m son expression déduite de l'équation (15A.3), nous obtenons :

$$N\left(\frac{\ln\left[E\left(V\right)/K\right]+s^2/2}{s}\right)=N(d_1)$$

De même, la seconde intégrale de l'équation (15A.6) est $N(d_2)$. L'équation (15A.6) devient donc :

$$E\left[\max\left(V-K\,;0\right)\right]=\mathrm{e}^{m+\frac{s^2}{2}}\,N(d_1)-KN(d_2)$$

En substituant à nouveau à m son expression d'après l'équation (15A.3), nous obtenons le résultat fondamental que nous souhaitions démontrer.

La formule de Black-Scholes-Merton

Considérons à présent un call d'échéance T sur une action ne versant pas de dividendes. Le prix d'exercice est K, le taux sans risque r, le cours de l'action S_0 et la volatilité σ. Comme nous l'avons montré dans l'équation (15.22), la valeur du call, c, est donnée par :

$$c=\mathrm{e}^{-rT}\,\hat{E}\left[\max\left(S_T-K\,;0\right)\right]\quad(15A.7)$$

où S_T est le cours de l'action à la date T et $\hat{E}$ l'opérateur d'espérance mathématique dans l'univers risque-neutre. Selon l'hypothèse de Black et Scholes concernant le processus

stochastique suivi par le cours de l'action, S_T suit une loi log-normale. Ainsi, à partir des équations (15.3) et (15.4), $\hat{E}(S_T) = S_0\,\mathrm{e}^{rT}$ et l'écart-type de $\ln S_T$ est $\sigma\sqrt{T}$.

Grâce au résultat démontré ci-avant, l'équation (15A.7) implique que :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\left[S_0\,\mathrm{e}^{rT}\,N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

ou encore :

$$c = S_0\,N(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\hat{E}\,(S_T t)/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\;T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln(\hat{E}\,(S_T t)/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)\;T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

C'est bien le résultat obtenu par Black-Scholes-Merton.

Chapitre 16
Les stock-options

Les stock-options sont des options d'achat sur les actions d'une société, accordées par cette même société à ses employés. Ces options permettent aux salariés de bénéficier d'une partie de la richesse engendrée par la société. Si la valeur de l'entreprise augmente suffisamment pour que le cours de l'action excède le prix d'exercice, ils peuvent ainsi exercer leurs options et vendre au prix du marché des actions acquises à un prix plus faible.

Les stock-options sont devenues très populaires au cours des vingt dernières années. De nombreuses entreprises, en particulier du secteur des nouvelles technologies, estiment que la seule façon d'attirer et de retenir les meilleurs employés est de leur offrir une rémunération associée à des stock-options et à des perspectives de revenus importants. Certaines entreprises n'octroient des stock-options qu'aux dirigeants situés au sommet de la hiérarchie, d'autres les accordent à tous les niveaux d'encadrement. Microsoft a été l'une des premières entreprises à utiliser les stock-options. Tous les employés de Microsoft ont reçu des options et, comme le cours des actions de la société a fortement augmenté, on estime que plus de 10 000 d'entre eux sont devenus millionnaires. En 2003, Microsoft a annoncé qu'il mettait un terme à l'utilisation des stock-options au profit de l'attribution d'actions. Mais de nombreuses autres sociétés à travers le monde continuent à utiliser les stock-options avec enthousiasme.

Les stock-options sont populaires auprès des entreprises en phase de démarrage. Souvent, ces dernières n'ont pas les moyens de payer aux employés clés le salaire auquel ils pourraient prétendre au sein d'une société bien établie. Elles résolvent ce problème en complétant les salaires par des stock-options. Si la valeur de l'entreprise s'accroît et que ses actions sont introduites en bourse, les stock-options se révéleront alors très profitables.

Ce chapitre explique comment les plans de stock-options fonctionnent et dans quelle mesure leur popularité a été influencée par leur traitement comptable. Il examine la façon dont les stock-options permettent d'aligner les intérêts des actionnaires avec ceux des cadres dirigeants de la société. Il décrit également la façon dont ces options sont évaluées et aborde le scandale lié aux pratiques de rétroactivité (*backdating*).

16.1 Les dispositions contractuelles

Les stock-options ont la plupart du temps une durée relativement longue, de dix à quinze ans, et un prix d'exercice égal au cours de l'action à la date d'attribution, de sorte que l'option est initialement à la monnaie. Elles ont généralement des caractéristiques particulières qui les distinguent des options ordinaires négociées sur les marchés :

1. Il existe une période d'acquisition des droits, au cours de laquelle les options ne peuvent être exercées. Cette période peut ainsi durer quatre ans ;
2. Lorsque des cadres quittent leur emploi (volontairement ou non) au cours de la période d'acquisition des droits, ils perdent la possibilité d'exercer les options ;
3. Lorsque les dirigeants quittent l'entreprise (volontairement ou non) après la période d'acquisition des droits, ils perdent les options qui sont en dehors de la monnaie et doivent exercer immédiatement les options dans la monnaie ;
4. Les bénéficiaires ne sont pas autorisés à vendre les options ;
5. Quand un dirigeant exerce les options, l'entreprise émet de nouvelles actions et les lui vend contre le paiement du prix d'exercice.

La décision d'exercice anticipé

La quatrième caractéristique a d'importantes conséquences. Si le dirigeant, pour une raison quelconque, veut réaliser un profit en espèces avec les options qu'il détient, il est obligé de les exercer et de vendre ensuite les actions qu'il obtient. Il ne peut pas vendre les options à un tiers. Cela conduit à ce que les stock-options ont tendance à être exercées bien plus tôt que ne le laisserait prévoir leur date d'échéance.

Prenons, par exemple, une option sur une action ne versant pas de dividendes. Dans la section 11.5, nous avons montré que, s'il s'agit d'un call, il ne devrait jamais être exercé par anticipation. Le détenteur de l'option a intérêt à la vendre, plutôt que de l'exercer avant son échéance. Toutefois, les arguments que nous avons utilisés à la section 11.5 ne sont pas applicables aux stock-options, puisqu'elles ne peuvent être vendues. Le seul moyen pour les salariés de réaliser un gain en cash grâce à leurs stock-options est de les exercer et de vendre les actions correspondantes. Aussi, il n'est pas inhabituel que les cadres détenant des stock-options les exercent relativement tôt, même lorsque l'action sous-jacente ne verse pas de dividendes.

Est-ce qu'un dirigeant devrait exercer ses options avant l'échéance, mais conserver les actions plutôt que de les vendre ? On suppose que le prix d'exercice de l'option est constant pendant la durée de vie de l'option et qu'elle peut être exercée à tout moment. Pour répondre à cette question, nous considérons deux types d'options similaires : une stock-option et une option d'achat négociable en bourse (de type américain). Si l'action ne verse pas de dividendes, nous savons que l'option américaine ne doit jamais être exercée prématurément. Il en découle qu'il n'est pas non plus optimal d'exercer une stock-option pour ensuite garder l'action. Si le dirigeant souhaite conserver une participation dans son entreprise, la meilleure stratégie consiste à ne pas exercer l'option avant l'échéance. Comme nous l'avons expliqué dans la section 11.5, cela retarde le paiement du prix d'exercice et maintient la valeur d'assurance de l'option. C'est seulement dans le cas où il est optimal d'exercer un call américain que l'exercice prématuré

suivi de la conservation de l'action peut être rationnel[1]. Comme cela a été étudié dans la section 15.12, il n'est optimal d'exercer un call américain par anticipation que si le versement d'un dividende relativement élevé est imminent.

Dans la pratique, le comportement des employés quant à l'exercice anticipé de leurs stock-options varie considérablement d'une entreprise à l'autre. Dans certaines sociétés, la tradition est d'exercer les options tardivement, tandis que dans d'autres, les employés ont tendance à exercer leurs options et à vendre les actions dès que possible, même si les options ne sont que légèrement dans la monnaie.

16.2 Les stock-options permettent-elles d'accorder les intérêts des actionnaires et des salariés ?

Pour que les investisseurs aient confiance dans les marchés de capitaux, il est important que les intérêts des actionnaires et des managers concordent. Les dirigeants salariés doivent être incités à prendre des décisions qui optimisent les intérêts des actionnaires. Les managers sont les agents des actionnaires et, comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 8, les économistes utilisent le terme de coûts d'agence pour décrire les pertes subies lorsque les intérêts de l'agent et du principal (l'actionnaire) sont divergents.

Les stock-options permettent-elles d'atteindre cet objectif ? La réponse à cette question n'est pas simple. Il ne fait aucun doute qu'elles y contribuent utilement dans le cas d'une start-up. Les stock-options sont un excellent moyen pour les principaux actionnaires qui, le plus souvent, sont aussi dirigeants, de motiver leurs employés. Si l'entreprise prospère, l'introduction en bourse sera un succès et les employés s'en réjouiront ; en revanche, si l'entreprise échoue, les options seront sans valeur.

Ce sont les stock-options attribuées aux hauts dirigeants des sociétés cotées en bourse qui sont le plus controversées. Les stock-options représentent environ 50 % de la rémunération des cadres supérieurs aux États-Unis et sont parfois appelées « primes de performance ». Si le cours des actions de l'entreprise augmente, de sorte que les actionnaires réalisent des profits, l'exécutif est récompensé. Mais c'est négliger l'aspect asymétrique des options. Si la société se porte mal, les actionnaires perdent de l'argent, mais la seule conséquence pour les dirigeants est qu'ils n'en gagnent pas davantage. Contrairement aux actionnaires, ils ne réalisent pas de perte[2]. Une meilleure façon de rémunérer la performance consiste à donner directement des actions aux managers. Les gains et les pertes de ces cadres sont alors identiques à ceux des autres actionnaires.

Quelles tentations les stock-options provoquent-elles chez un cadre supérieur ? Supposons qu'un dirigeant prévoie d'exercer un grand nombre de stock-options dans trois mois et de vendre les actions ainsi obtenues. Il (elle) pourrait être tenté d'annoncer plus tôt de bonnes nouvelles – ou même de reporter des profits d'un trimestre sur l'autre –,

1. La seule exception à ce principe est le cas exceptionnel où un dirigeant souhaiterait détenir des titres en raison de leurs droits de vote.

2. Lorsque les options sont en dehors de la monnaie, les entreprises les remplacent parfois par de nouvelles options à la monnaie. Cette pratique, connue sous le nom de « réévaluation », conduit à des gains ou des pertes pour les managers encore moins liés à ceux des actionnaires.

de sorte que le prix des actions augmente juste avant que les options soient exercées. En outre, si des stock-options à la monnaie doivent être accordées aux dirigeants dans trois mois, ces derniers pourraient être tentés de prendre des mesures qui réduisent le prix de l'action juste avant la date d'attribution. Ce type de comportement est bien sûr totalement inacceptable – et il peut être illégal dans certains cas. Mais ces scandales, qualifiés de *backdating*, montrent que la manière dont certains dirigeants ont géré ces questions liées aux stock-options laisse beaucoup à désirer.

Même s'il n'y a pas d'irrégularités telles que celles qui viennent d'être mentionnées, les stock-options peuvent avoir pour effet de motiver les dirigeants à se concentrer sur des profits à court terme, au détriment d'une performance à long terme. Dans certains cas, ils pourraient même être amenés à des prises de risques qu'ils n'auraient pas osées sans l'aspect asymétrique des profits procurés par les options. Les gestionnaires de fonds s'inquiètent du fait que, lorsque ces stock-options sont une composante importante de la rémunération d'un dirigeant, elles sont susceptibles d'être une grande source de distraction. Les cadres supérieurs peuvent passer plus de temps à réfléchir à l'optimisation des différents aspects de leur rémunération qu'à la gestion de l'entreprise !

Les connaissances et la capacité d'un dirigeant à influer sur les résultats et les annonces sont toujours susceptibles d'interagir avec ses opérations boursières, de sorte que cela porte préjudice aux autres actionnaires. Une solution radicale pour atténuer ce problème pourrait consister à exiger que les cadres déclarent auprès du marché – avec un préavis d'une semaine, par exemple – leur intention d'acheter ou de vendre les actions de leur entreprise [3]. (Dès qu'une intention d'acheter ou de vendre est annoncée, il deviendrait obligatoire pour le dirigeant de s'y conformer.) Cela permettrait au marché de tirer ses propres conclusions quant aux motivations des dirigeants à un moment donné. En conséquence, le cours des actions pourrait augmenter avant que les cadres n'achètent et baisser avant qu'ils ne vendent.

16.3 Questions de comptabilité

Une stock-option représente un coût pour l'entreprise et un avantage pour l'employé, comme toute autre forme de rémunération. Ce point, qui pour beaucoup va de soi, est en fait assez controversé. De nombreux dirigeants d'entreprise semblent croire que l'option n'a pas de valeur, à moins qu'elle ne soit dans la monnaie. En conséquence, ils font valoir qu'une option à la monnaie émise par la société ne coûte rien à l'entreprise. La réalité est que, si les stock-options enrichissent les employés, elles appauvrissent les actionnaires de la société. Si les actions se valorisent, elles seront vendues aux salariés à un prix inférieur à celui du marché par l'exercice des stock-options, ce qui représente un coût pour l'entreprise.

Avant 1995, le coût de compensation enregistré comme une charge du compte de résultat était habituellement la valeur intrinsèque. Mais la plupart des stock-options étant à la monnaie lors de leur émission, leur valeur intrinsèque est nulle. En 1995,

3. Cela s'appliquerait à l'exercice des options puisque, si un dirigeant veut exercer ses options pour vendre ensuite les actions ainsi obtenues, il aurait à déclarer au préalable son intention de vendre.

la norme FAS [4] 123 a été adoptée. De nombreuses personnes s'attendaient à ce que la comptabilisation des options se fasse à leur juste valeur. Cependant, à la suite d'un lobbying intense, la version 1995 de la norme FAS 123 encourage seulement les entreprises, sans les contraindre, à comptabiliser la valeur de marché de ces options ou, à défaut, à la signaler en annexe.

Les normes comptables ont à présent évolué et exigent d'enregistrer comme charges du compte de résultat les stock-options à leur juste valeur. En février 2004, l'International Accounting Standards Board a publié la norme IAS 2 obligeant les entreprises à commencer à comptabiliser les stock-options comme charges dès 2005. En décembre 2004, la norme FAS 123 fut révisée pour que la même chose soit exigée aux États-Unis en 2005.

L'impact des nouvelles normes comptables est que les options doivent être évaluées à la date d'attribution. Le montant enregistré en charge du compte de résultat est imputé à l'exercice au cours duquel cette rémunération est accordée. Une évaluation ultérieure à la date d'attribution n'est pas nécessaire. On pourrait faire valoir que les stock-options devraient être réévaluées à chaque fin d'exercice comptable (ou chaque trimestre) et ce, jusqu'à ce qu'elles soient exercées ou jusqu'à l'échéance [5]. Cela permettrait de leur appliquer les mêmes règles que celles concernant les autres opérations sur instruments dérivés. Si l'option s'est valorisée d'une année sur l'autre, il y aurait alors un montant supplémentaire à comptabiliser en charges. Et si sa valeur s'est dépréciée, cela produirait un impact positif sur le résultat de la société.

Cette approche présenterait un certain nombre d'avantages. Les charges cumulées de la société refléteraient le coût réel des options (soit zéro, si les options ne sont pas exercées, soit le montant égal au profit réalisé si elles sont exercées). Bien que les charges d'une année dépendent du modèle d'évaluation des options utilisé, le cumul des charges sur la durée de vie de l'option n'en dépend pas [6]. Il y aurait donc beaucoup moins d'incitations pour l'entreprise à s'engager dans les pratiques de *backdating* décrites dans la suite de ce chapitre. Ce type de comptabilisation est souvent considéré comme néfaste, car il accentue la volatilité des résultats de la société [7].

Les programmes alternatifs de stock-options

Les règles comptables entrées en vigueur en 2005 ont conduit les entreprises à envisager des alternatives aux régimes de rémunération traditionnels dans lesquels des stock-options à la monnaie étaient attribuées. Nous avons déjà mentionné les *restricted stock units* (RSU), unités d'actions de négociation restreinte, qui sont des actions qui ne seront détenues par l'employé qu'à une date ultérieure (la date d'acquisition). Beau-

4. *Financial Accounting Standards.*

5. Voir J. C. Hull et A. White, "Accounting for Employee Stock Options : A Practical Approach to Handling the Valuation Issues", *Journal of Derivatives Accounting*, 1 (1), 2004, 3-9.

6. Fait intéressant, si une option est réglée directement en espèces par la société plutôt que par l'émission de nouvelles actions, elle est soumise au même traitement comptable que celui proposé ici. (Or, il n'y a aucune différence économique entre une option réglée en espèces et une option réglée par la vente d'actions nouvelles à l'employé.)

7. En fait, le résultat est sans doute moins volatil si les options sont réévaluées. Lorsque l'entreprise se porte bien, le résultat est réduit par la réévaluation des stock-options et dans le cas contraire, il est augmenté.

coup d'entreprises ont remplacé les stock-options par ces RSU. Il existe une variante de la RSU : la *market-leveraged stock unit* (MSU), unité d'actions à effet de levier sur le marché, dans laquelle le nombre d'actions qui seront détenues à la date d'acquisition est égal à $\frac{S_T}{S_0}$, avec S_0 le prix de l'action à la date d'attribution et S_T le prix de l'action à la date d'acquisition [8].

Un des arguments opposé à cette pratique est que les salariés sont rémunérés lorsque le marché boursier est en hausse et ce, même si le cours des actions de leur propre entreprise réalise de moins bonnes performances que le marché. Une façon de résoudre ce problème consiste à relier le prix d'exercice des options à la performance d'un indice de marché, tel que le S&P500 ou le CAC40. Supposons, par exemple, qu'à la date d'attribution des stock-options, le cours de l'action soit de 30 € et que le CAC40 cote 3500. Le prix d'exercice serait initialement fixé à 30 €. Si le CAC40 augmente de 10 % à 3850, alors le prix d'exercice est également réévalué de 10 % à 33 €. Si le CAC40 subit une baisse de 15 % à 2975, alors le prix d'exercice est ramené à 25,50 €, correspondant à 15 % de baisse. Le résultat d'une telle procédure est que la performance du cours des actions de l'entreprise doit battre la performance de l'indice CAC40 pour que les options puissent être dans la monnaie. La société peut également utiliser un indice sectoriel correspondant au secteur de la société, plutôt qu'un indice de référence général tel que le CAC40.

16.4 L'évaluation

Les normes comptables donnent aux entreprises un peu de latitude dans le choix de leur méthode d'évaluation des stock-options. Dans cette section, nous passons en revue quelques-unes de ces alternatives.

L'approche « vite fait, mal fait »

Une approche à la va-vite souvent retenue afin d'évaluer une stock-option utilise ce que l'on nomme l'espérance de vie de l'option. Il s'agit de la durée moyenne de détention de l'option avant que le dirigeant l'exerce ou qu'elle arrive à échéance. L'espérance de vie peut être approximée à partir de données historiques sur le comportement d'exercice anticipé des dirigeants et reflète la période d'acquisition, l'impact du départ de dirigeants, et la tendance des stock-options à être exercées plus rapidement que les options ordinaires comme nous l'avons mentionné dans la section 16.1. Cette approche « vite fait, mal fait » implique d'utiliser le modèle de Black-Scholes-Merton en retenant l'espérance de vie de l'option comme durée de vie de l'option, T. La volatilité est en général estimée à partir de plusieurs années de données historiques (voir section 15.4).

8. Il y a parfois des limites supérieure et inférieure au nombre d'actions qui seront acquises. S_0 et S_T peuvent aussi être définis par la moyenne des cours des actions sur un certain nombre de jours qui précèdent respectivement la date d'attribution et la date d'acquisition. Pour une analyse sur les MSU, voir J. C. Hull et A. White, "The Valuation of Market-Leveraged Stock Units", *Journal of Derivatives*, 21 (3), printemps 2014, 85–90.

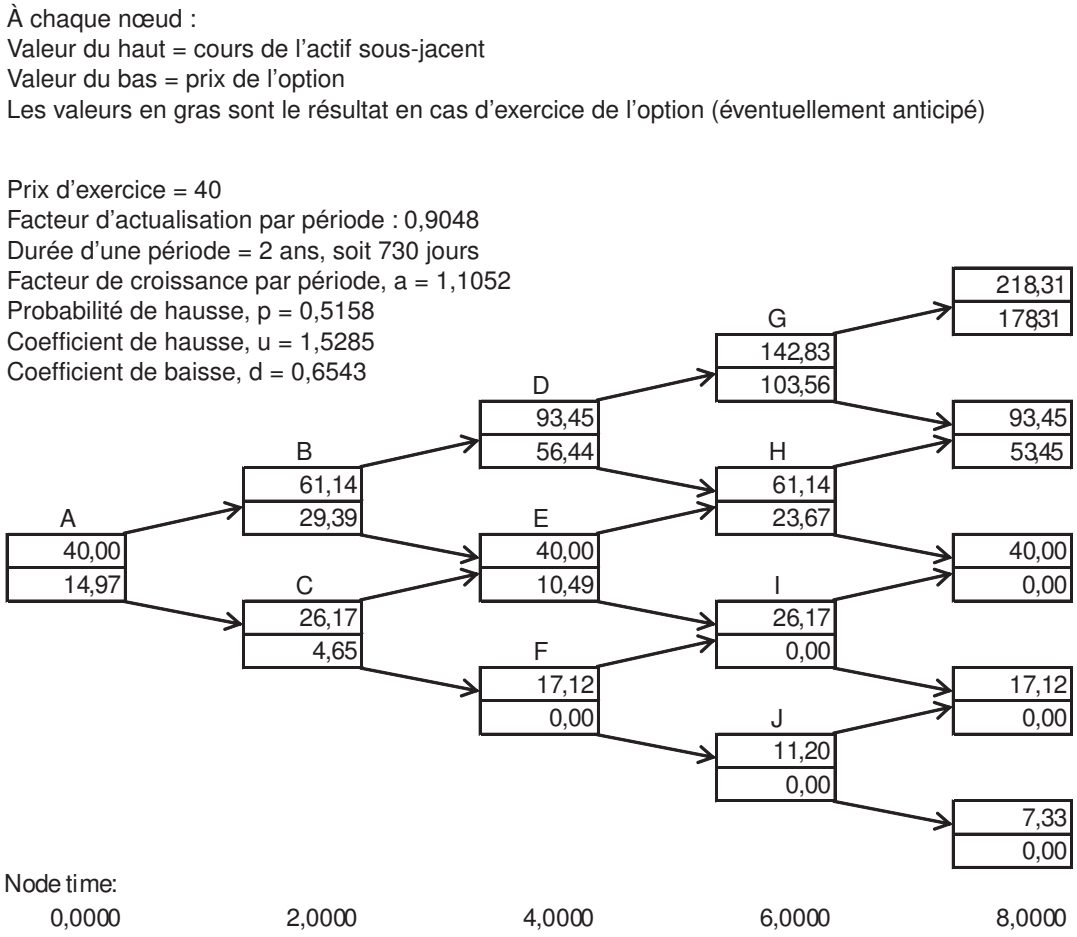
Il faut souligner que l'utilisation de la formule de Black-Scholes-Merton de cette façon n'a pas de validité théorique. Il n'y a aucune raison pour que la valeur d'une option européenne sur action, de durée de vie égale à T, soit approximativement la même que celle de la partie américaine de la stock-option qui nous intéresse ici. Toutefois, les résultats donnés par le modèle ne sont pas trop déraisonnables. Les entreprises, lorsqu'elles comptabilisent leurs charges de stock-options, précisent souvent la volatilité et la durée de vie utilisées pour leur calcul avec le modèle de Black-Scholes-Merton.

■ **Exemple 16.1** Une entreprise accorde un million d'options à ses dirigeants le 1er novembre 2014. Le prix des actions à cette date est de 30 € et le prix d'exercice des options est de 30 €. La durée de vie des options est de 10 ans et elles ne seront exerçables qu'après 3 ans. La société a émis des stock-options identiques au cours des 10 dernières années. Les employés ont, en moyenne, exercé ces options après 4,5 ans. L'entreprise décide donc d'utiliser une espérance de vie de 4,5 ans. Elle estime la volatilité à long terme du prix des actions à 25 % en retenant 5 années de données historiques. La valeur actuelle des dividendes au cours des 4,5 prochaines années est estimée à 4 €. Le taux d'intérêt sans risque zéro-coupon sur 4,5 ans est de 5 %. L'option est donc évaluée à l'aide du modèle de Black-Scholes-Merton (ajusté pour les dividendes, de la manière décrite dans la section 15.12) avec $S_0 = 30 - 4 = 26$, $K = 30$, $r = 5$ %, $\sigma = 25$ % et $T = 4{,}5$. La formule de Black-Scholes-Merton donne 6,31 €. Les charges comptabilisées se montent donc à $1\,000\,000 \times 6{,}31 = 6\,310\,000$ €.

L'approche par un arbre binomial

Une approche plus sophistiquée de la valorisation de stock-options repose sur la construction d'un arbre binomial tel que le présente le chapitre 13. Il convient d'ajuster les règles utilisées lors de l'induction arrière à travers l'arbre, afin de tenir compte (a) de la période d'exercice de l'option, (b) de la probabilité de départ du cadre de l'entreprise, et (c) de la probabilité que le cadre choisisse d'exercer l'option selon différentes circonstances. Les termes de l'option définissent si l'option est sortie de la période d'acquisition des droits (et peut donc être exercée) aux différents nœuds de l'arbre. Les données historiques sur les comportements des cadres bénéficiaires peuvent être utilisées pour estimer la probabilité de l'option d'être exercée prématurément à un nœud ou bien annulée suite au départ d'un cadre de l'entreprise. La probabilité qu'un cadre choisisse d'exercer l'option à différents nœuds de l'arbre est plus difficile à quantifier. Il est clair que cette probabilité augmente à mesure que le ratio du prix des actions sur le prix d'exercice augmente et que l'échéance de l'option s'approche. Si suffisamment de données historiques sont disponibles, la probabilité d'exercice en fonction de ces deux variables peut être estimée – au moins approximativement.

■ **Exemple 16.2** Supposons qu'une société distribue des stock-options d'une durée de vie de 8 ans exerçables après une période d'acquisition de 3 ans. Le cours des actions est égal au prix d'exercice, à savoir 40 €. La volatilité du cours des actions est de 30 %, le taux sans risque est de 5 % et l'entreprise ne verse pas de dividendes. Le graphique 16.1 montre comment un arbre binomial à quatre périodes peut être utilisé pour valoriser l'option (uniquement à titre d'illustration car, dans la pratique, davantage de périodes seraient utilisées).



Graphique 16.1 : Valorisation des stock-options dans l'exemple 16.2

Dans ce cas, σ= 30 %, $\Delta t = 2$ et r= 5 %, de sorte qu'avec les notations utilisées dans le chapitre 13, $a = \mathrm{e}^{0,05\times 2} = 1{,}1052$, $u = \mathrm{e}^{0,3\sqrt{2}} = 1{,}5285$, $d = 1/u = 0{,}6543$ et $p = (a-d)/(u-d) = 0{,}5158$. La probabilité d'un état up est de 0,5158, et celle d'un état down de 0,4842. Il y a trois nœuds où un exercice anticipé pourrait être souhaité : D, G et H. (L'option n'est pas encore exerçable au nœud B et n'est pas dans la monnaie aux autres nœuds.) Nous supposons que les probabilités que le détenteur choisisse d'exercer aux nœuds D, G, et H (conditionnées à l'absence d'exercice préalable) ont été respectivement estimées à 40 %, 80 % et 30 %. Nous supposons que la probabilité qu'un employé quitte la société au cours de chaque période est de 5 %. (Cela correspond à un taux de renouvellement du personnel d'environ 2,5 % par an.) Pour l'application de la méthode, on suppose que les employés attendent toujours la fin d'une période. Si un employé quitte l'entreprise avant la fin de la date d'acquisition ou lorsque l'option est en dehors de la monnaie, l'option est annulée. Dans les autres cas, l'option doit être exercée immédiatement.

Considérons les nœuds à l'échéance : la valeur de l'option est égale à sa valeur intrinsèque. Considérons à présent les nœuds à la date précédente. I et J ne posent pas de problèmes, puisqu'aux nœuds successeurs, la valeur de l'option est nulle. Elle vaut donc également 0 en I et J. Au nœud H, il y a 30 % de chances que l'employé choisisse d'exercer l'option. Dans le cas contraire, si le salarié n'exerce pas, il y a un risque de 5 % que l'employé quitte l'entreprise et doive exercer. La probabilité totale que l'option soit exercée est donc $0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}335$. Si l'option est exercée,

sa valeur est de $61{,}14 - 40 = 21{,}14$. Si elle n'est pas exercée, sa valeur est :

$$e^{-0{,}05\times 2}\,(0{,}5158 \times 53{,}45 + 0{,}4842 \times 0) = 24{,}95$$

La valeur de l'option au niveau du nœud H est donc :

$$0{,}335 \times 21{,}14 + 0{,}665 \times 24{,}95 = 23{,}67$$

La valeur au nœud G est également :

$$0{,}81 \times 102{,}83 + 0{,}19 \times 106{,}64 = 103{,}56$$

Intéressons-nous à présent aux nœuds de la date précédente (4 ans après l'émission). Au nœud F, l'option vaut clairement zéro. Au nœud E, il y a un risque de 5 % que l'employé abandonne l'option parce qu'il quitte l'entreprise et 95 % de chances que l'option soit conservée. Dans ce dernier cas, l'option vaut :

$$e^{-0{,}05\times 2}\,(0{,}5158 \times 23{,}67 + 0{,}4842 \times 0) = 11{,}05$$

L'option vaut donc 0,95×11,05 = 10,49. Au niveau du nœud D, il y a une probabilité de 0,43 que l'option soit exercée et de 0,57 qu'elle soit conservée. La valeur de l'option est alors de 56,44.

Considérons maintenant le nœud initial et les nœuds à la date des 2 ans. La période d'acquisition de l'option n'est pas clôturée sur ces nœuds. Il y a 5 % de chances que l'option soit annulée et une probabilité de 95 % qu'elle soit conservée pendant 2 ans de plus. Cela conduit à l'évaluation présentée dans le graphique 16.1. La valeur de la stock-option au niveau du nœud initial est de 14,97 (à comparer avec une évaluation de 17,98 pour une option américaine classique en utilisant le même arbre).

L'approche par le multiple d'exercice

Hull et White proposent un modèle simple où un employé exerce dès que l'option est susceptible d'être exercée (après la fin de la période d'acquisition) et dès que le ratio du cours des actions rapporté au prix d'exercice est supérieur à un certain seuil [9]. Ce ratio est appelé « multiple d'exercice ». On peut évaluer l'option en utilisant un arbre binomial ou trinomial. Comme nous le précisons dans la section 27.6, il est important de construire un arbre binomial ou trinomial pour lequel les nœuds représentent des cours d'actions qui mèneront à l'exercice. Par exemple, si le prix d'exercice est de 30 €et que l'on suppose que les employés exerceront lorsque le ratio du prix des actions sur le prix d'exercice est de 1,5. L'arbre doit être construit de telle sorte qu'il y ait des nœuds à un niveau de cours de 45 €. La construction de l'arbre est semblable à celle de l'exemple 16.2 et doit tenir compte de la probabilité qu'un employé quitte la société [10]. Pour estimer le multiple d'exercice, il est nécessaire de calculer à partir de données historiques le ratio moyen du prix de l'action sur le prix d'exercice au moment de l'exercice. (Les exercices de l'option à l'échéance et ceux découlant du départ de

9. Voir J. C. Hull et A. White, "How to value employee stock options", *Financial Analysts Journal*, 60 (1), janvier/février 2004, 3-9.

10. Le logiciel mettant en œuvre cette approche est disponible sur le site www-2.rotman.utoronto.ca/∼hull.

l'entreprise ne sont pas compris dans ce calcul de la moyenne.) Il est certainement plus facile d'estimer ce ratio à partir de données historiques que d'évaluer la durée de vie car cette dernière dépend fortement du parcours particulier que peut suivre le cours du titre.

L'approche fondée sur le marché

Une façon d'évaluer une stock-option consiste à regarder ce que le marché est prêt à payer pour elle. Cisco fut la première société à tenter cette approche en 2006. Elle a proposé la vente d'options aux caractéristiques rigoureusement identiques à ses stock-options à des investisseurs institutionnels. Mais cette approche a été rejetée par la SEC au motif que l'éventail des investisseurs concernés par ces options n'était pas assez large.

Zions Bancorp a suggéré une approche différente en proposant que soient vendus des titres procurant des rendements qui reproduisent exactement ceux effectivement réalisés par les dirigeants avec leurs stock-options. Supposons que le prix d'exercice de stock-options accordées à des cadres soit de 40 € et que 1 % de ces cadres l'exerce après exactement 5 ans, lorsque le prix des actions est de 60 €, 2 % après 6 ans, lorsque le prix des actions est de 65 €, et ainsi de suite. Alors, 1 % des titres détenus par un investisseur produiront un gain de 20 € au bout de 5 ans, 2 % un profit de 25 € après 6 ans, et ainsi de suite.

Zions Bancorp testa l'idée en utilisant sa propre attribution de stock-options. Elle vendit les titres en utilisant un processus d'enchères à la hollandaise. Dans ce type d'enchères, des investisseurs particuliers ou institutionnels peuvent présenter une offre en précisant le prix qu'ils sont prêts à payer et le nombre d'options qu'ils sont prêts à acheter. Le prix d'équilibre est déterminé en retenant l'offre la plus élevée, telle que le nombre total d'options demandées à ce prix ou à un prix plus élevé soit égal ou supérieur au nombre d'options mises en vente, autrement dit le prix le plus élevé pour lequel toutes les demandes peuvent être satisfaites. Les acheteurs qui ont proposé un prix supérieur au prix d'équilibre obtiennent leurs titres au prix d'équilibre et ceux qui ont offert le prix d'équilibre obtiennent ce qui reste.

Zions Bancorp annonca qu'elle avait reçu l'approbation de la SEC en octobre 2007 pour cette approche fondée sur le marché.

L'effet de dilution

Le fait que l'entreprise émette de nouvelles actions lors de la levée de l'option conduit à une dilution pour les anciens actionnaires car de nouvelles actions sont vendues à des cadres au-dessous de la valeur de cotation actuelle. Il est naturel de supposer que cette dilution a lieu au moment où l'option est exercée, mais ce n'est pas le cas. Comme nous l'avons expliqué dans la section 15.10, les cours des actions intègrent cette dilution dès que le marché est informé de l'attribution des stock-options. Lorsque les marchés sont efficients, la possibilité d'exercice des options est prévue et immédiatement prise en compte dans le cours de l'action. C'est l'observation faite dans l'encadré 15.3.

Après l'annonce d'une attribution de stock-options, le prix de l'action reflète immédiatement toute dilution. Puisque ce prix est utilisé dans l'évaluation de l'option, il n'est

pas nécessaire d'ajuster les prix de l'option en fonction de la dilution. Dans la plupart des cas, le marché s'attend à ce qu'une société distribue régulièrement des stock-options et, par conséquent, le prix de marché des actions anticipe cette dilution avant même que l'annonce soit faite.

Si une entreprise envisage une attribution de stock-options qui surprendrait le marché, le coût peut être calculé comme nous l'avons expliqué dans l'exemple 15.7 ; il est comparable aux avantages que procurent par exemple une rémunération régulièrement inférieure à la moyenne ou un plus faible taux de turnover.

16.5 Le scandale des options antidatées

Aucune discussion sur les stock-options ne serait complète si l'on omettait de mentionner les scandales liés aux pratiques de backdating. Cette pratique consiste à antidater un document.

Supposons qu'une entreprise décide d'octroyer des options à la monnaie à ses employés le 30 avril lorsque le cours est de 50 €. Si le prix des actions était de 42 € le 3 avril, il est tentant de faire comme si ces options avaient été attribuées le 3 avril et d'utiliser un prix d'exercice de 42 €. Ce n'est pas illégal si la société précise que les options sont de 8 € dans la monnaie à la date d'attribution, le 30 avril. Mais il est illégal que l'entreprise fasse état d'options à la monnaie qui auraient été octroyées le 3 avril. À cette date, la valeur d'une option de prix d'exercice 42 € est bien inférieure à ce qu'elle serait le 30 avril. Les actionnaires sont donc trompés sur le coût véritable de la décision d'attribuer des stock-options si l'entreprise stipule que ces dernières l'ont été le 3 avril.

Quelle est la prévalence de cette pratique ? Pour répondre à cette question, les chercheurs ont examiné si le cours des actions d'une entreprise a, en moyenne, tendance à baisser au moment de la date d'attribution telle qu'elle est déclarée par l'entreprise. La recherche menée par Yermack montre que les cours des actions ont tendance à augmenter après la date officielle d'attribution de stock-options [11]. Lie a complété les recherches de Yermack en montrant que les cours des actions ont également eu tendance à diminuer avant la date déclarée d'attribution de stock-options [12]. En outre, il a montré que cette configuration des cours d'action avant et après la date d'attribution de stock-options est devenue plus marquée au fil du temps. Les résultats obtenus montrent l'existence de rendements anormaux au voisinage de la date d'attribution pour les périodes 1993-1994, 1995-1998 et 1999-2002. (Les rendements anormaux sont les rendements après ajustement de la rentabilité en fonction du portefeuille de marché et du bêta de l'action.) Les tests statistiques standard montrent qu'il est quasiment impossible que ces rendements anormaux soient dus au hasard. Cela a conduit des universitaires et des organismes de réglementation à conclure en 2002 que le backdating était devenu une pratique courante. En août 2002, la SEC a demandé aux entreprises cotées que les attributions de stock-options soient déclarées dans les deux jours ouvrables. Heron et Lie ont montré

11. Voir D. Yermack, "Good timing : CEO stock option awards and company news announcements", *Journal of Finance*, 52, 1997, 449-476.

12. Voir E. Lie, "On the timing of CEO stock option awards", *Management Science*, 51 (5), mai 2005, 802-812.

que cela a conduit à une réduction spectaculaire de la rentabilité anormale autour de la date d'octroi – en particulier pour les entreprises qui ont satisfait à cette requête [13]. On pourrait argumenter que les modèles observés par Yermack et Lie révèlent simplement que les dirigeants choisissent les dates d'attribution après de mauvaises nouvelles ou avant de bonnes nouvelles, mais l'étude de Heron et Lie fournit des preuves convaincantes du contraire.

Les estimations du nombre d'entreprises qui antidatent illégalement l'attribution des stock-options aux États-Unis sont très variables. Des dizaines, peut-être des centaines d'entreprises semblent s'être engagées dans cette pratique. Beaucoup d'entreprises paraissent avoir adopté l'idée qu'il était acceptable d'antidater jusqu'à un mois. Certains chefs d'entreprises ont dû démissionner lorsque leurs pratiques de backdating ont été mises en lumière. En août 2007, Gregory Reyes de Brocade Communications Systems, Inc, est devenu le premier PDG à être jugé pour l'attribution de stock-options antidatées. Apparemment, M. Reyes aurait déclaré à un employé des ressources humaines : « Ce n'est pas illégal, si vous ne vous faites pas prendre. »En juin 2010, il fut condamné à dix-huit mois de prison et à une amende de 15 millions de dollars US.

Les entreprises impliquées dans de telles pratiques ont dû retraiter leurs états financiers antérieurs et ont été accusées à l'occasion de recours collectifs intentés par les actionnaires, qui affirment avoir perdu de l'argent en raison d'attributions antidatées. Par exemple, McAfee a annoncé en décembre 2007 qu'elle retraiterait les résultats entre 1995 et 2005 pour 137,4 millions de dollars US. En 2006, la société a provisionné 13,8 millions de dollars US en raison des risques de poursuites judiciaires.

Résumé

La rémunération des cadres dirigeants a augmenté très rapidement au cours des vingt dernières années et une grande partie de cette augmentation provient de l'exercice de stock-options qui leur ont été attribuées. Jusqu'en 2005, l'octroi de stock-options à la monnaie a été une forme attractive de rémunération. Elle n'avait aucun impact sur le compte de résultat et constituait une rémunération très appréciée des salariés. Les normes comptables exigent maintenant que ces stock-options soient enregistrées en charges du compte de résultat.

Il existe plusieurs approches pour évaluer des stock-options. Une approche communément admise consiste à utiliser le modèle de Black-Scholes-Merton en assimilant la durée vie de l'option à la date estimée d'exercice ou d'échéance de l'option. Une autre approche consiste à supposer que les options sont exercées dès que le ratio du prix des actions sur le prix d'exercice atteint un certain seuil. Une troisième approche consiste à tenter d'évaluer la relation entre la probabilité d'exercice, le ratio du prix des actions sur le prix d'exercice, et la durée de vie de l'option. Une quatrième approche consiste à créer un marché pour des titres qui répliquent les profits procurés par les stock-options.

13. Voir R. Heron et E. Lie, "Does backdating explain the stock price pattern around executive stock option grants", *Journal of Financial Economics*, 83 (2), février 2007, 271-295.

La recherche universitaire a montré sans l'ombre d'un doute que de nombreuses entreprises se sont engagées dans la pratique illégale d'attribution de stock-options antidatées afin de réduire le prix d'exercice, tout en soutenant que les options étaient à la monnaie. Les premières poursuites judiciaires de cette pratique illégale ont débuté en 2007.

Références complémentaires

Carpenter J., "The Exercise and Valuation of Executive Stock Options", *Journal of Financial Economics*, 48 (2), mai 1998, 127-158.

Core J. E. et W. R. Guay, "Stock Option Plans for Non-Executive Employees", *Journal of Financial Economics*, 61 (2), 2001, 253-287.

Heron R. et E. Lie, "Does Backdating Explain the Stock Price Pattern around Executive Stock Option Grants", *Journal of Financial Economics*, 83 (2), février 2007, 271-295.

Huddart S. et M. Lang, "Employee Stock Option Exercises : An Empirical Analysis", *Journal of Accounting and Economics*, 21 (1), février 1996, 5-43.

Hull J. et A. White, "How to Value Employee Stock Options", *Financial Analysts Journal*, 60 (1), janvier/ février 2004, 3-9.

Lie E., "On the Timing of CEO Stock Option Awards", *Management Science*, 51 (5), mai 2005, 802-812.

Yermack D., "Good Timing : CEO Stock Option Awards and Company News Announcements", *Journal of Finance*, 52, 1997, 449-476.

Problèmes et exercices

16.1 Pourquoi était-il intéressant pour les entreprises d'attribuer des stock-options à la monnaie avant 2005 ? Qu'est-ce qui a changé en 2005 ?

16.2 Quelles sont les principales différences entre une stock-option et une option d'achat américaine négociées en bourse ou sur le marché de gré à gré ?

16.3 Expliquez pourquoi les stock-options sur une action ne versant pas de dividendes sont en général exercées avant l'échéance, tandis qu'une option d'achat cotée en bourse et portant sur la même action n'est jamais exercée prématurément.

16.4 « L'attribution de stock-options est une bonne chose pour motiver les dirigeants à agir au mieux dans l'intérêt des actionnaires. » Discutez ce point de vue.

16.5 « Attribuer des stock-options aux dirigeants, c'est comme permettre à un footballeur professionnel de parier sur les résultats du match. » Discutez ce point de vue.

16.6 Pourquoi certaines entreprises américaines ont-elles antidaté l'attribution de leurs stock-options avant 2002 ? Qu'est-ce qui a changé en 2002 ?

16.7 De quelle façon les avantages de la pratique de backdating peuvent-ils être réduits si l'attribution des stock-options est réévaluée à la fin de chaque trimestre ?

16.8 Expliquez comment vous pourriez reproduire des courbes telles que celles du graphique 16.2.

16.9 Le 31 mai, le prix de l'action d'une entreprise est de 70 €. Un million d'actions sont en circulation. Un cadre dirigeant exerce 100 000 stock-options de prix d'exercice 50 €. Quel est l'impact sur le cours des actions ?

16.10 Les annexes accompagnant les états financiers d'une entreprise stipulent : « Nos stock-options ont une durée de vie de 10 ans et comprennent une période d'acquisition des droits de 4 ans. Nous avons évalué les options octroyées cette année à l'aide du modèle de Black-Scholes-Merton, en retenant une espérance de vie de 5 ans et une volatilité de 20 %. » Quelle en est la signification ? Commentez l'approche utilisée par la société.

16.11 Dans une adjudication à la hollandaise de 10 000 options, les offres sont comme suit :

a. une offre A à 30 € pour 3 000 options ;

b. une offre B à 33 € pour 2 500 options ;

c. une offre C à 29 € pour 5 000 options ;

d. une offre D à 40 € pour 1 000 options ;

e. une offre E à 22 € pour 8 000 options ;

f. une offre F à 35 € pour 6 000 options.

Quel est le résultat de l'enchère ? Qui achète, combien et à quel prix ?

16.12 Une société a accordé 500 000 stock-options à ses cadres dirigeants. Le prix des actions et le prix d'exercice sont tous deux de 40 €. Les options ont une durée de vie de 12 ans et la période d'acquisition des droits est de 4 ans. La société décide d'évaluer les options sur la base d'une espérance de vie de 5 ans et d'une volatilité de 30 % par an. L'entreprise ne verse pas de dividendes et le taux sans risque est de 4 %. Quel sera le montant comptabilisé en charge du compte de résultat de la société pour ses stock-options ?

16.13 Le DAF d'une société stipule que : « Le traitement comptable des stock-options est absurde. Nous avons accordé 10 000 000 de stock-options à la monnaie à nos salariés l'année dernière, alors que le cours des actions était de 30 €. Nous avons estimé la valeur de chaque option à la date d'attribution à 5 €. À la fin de l'année, le cours des actions est tombé à 4 €, mais nous devions encore supporter une charge de 50 millions d'euros dans le compte de résultat. » Commentez.

Questions complémentaires

16.14 Quelle est l'espérance (risque neutre) de la durée de vie de la stock-option de l'exemple 16.2 ? Quelle est la valeur de l'option obtenue si on utilise cette durée de vie dans le modèle de Black-Scholes-Merton ?

16.15 Une société a octroyé 2 000 000 de stock-options à ses salariés. Le prix des actions et le prix d'exercice sont tous deux de 60 €. Les options durent 8 ans et sont exerçables au bout de 2 ans. La société décide d'évaluer les options en utilisant une espérance de vie de 6 ans et une volatilité de 22 % par an. Les dividendes versés sur les actions représentent 1 € par an, payable par moitié chaque semestre, et le taux sans risque est de 5 %. Quel sera le montant des charges comptabilisées par la société dans son compte de résultat ?

16.16 Une société a octroyé 1 000 000 de stock-options à ses salariés. Le prix des actions et le prix d'exercice sont tous deux de 20 €. Les options durent 10 ans et l'acquisition des droits 3 ans. La volatilité du cours des actions est de 30 %, le taux sans risque est de 5 % et l'entreprise ne verse pas de dividendes. Utilisez un arbre binomial à quatre périodes pour évaluer les options. Supposons qu'il existe une probabilité de 4 % que le salarié quitte l'entreprise à la fin de chacune des périodes sur votre arbre. Supposons également que la probabilité que l'option soit volontairement exercée par anticipation sur un nœud, sous condition d'absence d'exercice antérieur, lorsque (a) l'option a plus de 3 ans et (b) l'option est dans la monnaie, soit :

$$1 - \mathrm{e}^{-a\frac{\frac{S}{K}-1}{T}}$$

où S est le prix de l'action, K est le prix d'exercice, T la durée de vie restante et $a = 2$.

16.17 Tritez les questions suivantes.

a. Les hedge funds gagnent des frais de gestion, plus une prime d'encouragement constituée par un pourcentage des bénéfices qu'ils génèrent, le cas échéant (voir l'encadré 1.3). Quel comportement un gestionnaire de fonds est-il incité à adopter avec ce type de rémunération ?

b. « Octroyer des stock-options à un dirigeant lui procure le même type de rémunération que celle reçue par un gérant de hedge fund et le motive à se comporter de la même manière. » Commentez cette déclaration.

Chapitre 17

Les options sur indices et devises

Dans ce chapitre, nous examinons plus en détail les options sur indices et sur devises introduites au chapitre 10. Nous expliquons leur fonctionnement et revenons sur quelques exemples d'utilisation. Dans la seconde moitié du chapitre, nous étendons les résultats sur les modes d'évaluation vus au chapitre 15 aux options européennes sur actions quand le taux de dividende est connu. Nous expliquons ensuite qu'il est possible d'assimiler les indices et les devises à des actions versant un taux de dividende connu. Les premiers résultats obtenus dans les chapitres précédents pour les options sur actions peuvent ainsi être appliqués à d'autres supports.

17.1 Les options sur indices

Les options sur indices se négocient à la fois sur les marchés de gré à gré et sur les marchés organisés. Certains indices reproduisent les variations de l'ensemble du marché, d'autres sont fondés sur les performances d'un secteur en particulier (mines, technologies, etc.). La plupart des grands indices sont supports de contrats d'options. On peut citer pour les marchés américains : le Dow Jones Industrial Average (DJX), le Nasdaq 100 (NDX), le Russell 2000 (RUS), le S&P100 (OEX et XEO) et le S&P500 (SPX). On échange les options sur ces indices sur le Chicago Board Options Exchange (CBOE). Toutes sont européennes, excepté celles qui portent sur le S&P100, qui sont américaines. Sur Euronext, les options sur indices les plus échangées portent sur le CAC 40 et les indices DJ Stoxx.

Un contrat d'option sur indice porte en général sur un multiple de l'indice (une fois, 10 fois ou 100 fois selon le marché) ; dans le cas du CAC 40, c'est une fois l'indice et, pour le S&P500, 100 fois l'indice. Pour des raisons techniques évidentes, on dénoue en cash les options sur indices. À l'exercice de l'option, le détenteur d'un call reçoit donc le montant $S - K$ versé par le vendeur de l'option ; S représente ici la valeur de l'indice à la clôture du jour d'exercice, et K est le prix d'exercice. Pareillement, le détenteur d'un put reçoit $K - S$, versé par le vendeur de l'option.

L'assurance de portefeuille

Les gestionnaires de portefeuille peuvent recourir aux options sur indices pour limiter leurs risques de perte. Supposons que la valeur d'un indice soit aujourd'hui S_0 et considérons le gestionnaire d'un portefeuille bien diversifié dont le bêta est égal à 1,0. Un bêta de 1,0 implique que les rentabilités du portefeuille répliquent celles de l'indice. Si le taux de dividende du portefeuille est le même que celui procuré par l'indice, le pourcentage de variation de la valeur du portefeuille au cours d'une période donnée devrait être très proche de celui de l'indice. Chaque contrat sur le CAC 40 porte sur une fois l'indice. Il en découle que la valeur du portefeuille est protégée contre une éventuelle baisse de l'indice en dessous de K si, pour chaque montant de S_0 euros détenus en portefeuille, le gestionnaire achète un put de prix d'exercice K. Supposons, par exemple, que le portefeuille vaille 400 000 € et que la valeur de l'indice soit de 4 000. Le portefeuille représente 100 fois l'indice en valeur. Le gestionnaire peut obtenir une assurance contre le risque de chute brutale du portefeuille en dessous de 350 000 €, dans les trois mois qui viennent, en achetant 100 contrats de puts avec un prix d'exercice de 3 500. Pour illustrer le mécanisme, supposons que l'indice chute à 3 200 dans trois mois. Le portefeuille vaudrait alors 320 000 €. Le payoff des options serait alors égal à :

$$100 \times (3\,500 - 3\,200) = 30\,000 \text{ €}$$

La valeur totale du portefeuille assuré serait bien :

$$320\,000 + 30\,000 = 350\,000 \text{ €}$$

Bien sûr, cette couverture n'est pas gratuite, puisque 100 contrats de puts ont été achetés.

Cas d'un bêta du portefeuille différent de 1,0

Si le bêta (ß) du portefeuille n'est pas égal à 1,0, il faut acheter un nombre de ß puts pour chaque S_0 € dans le portefeuille, où S_0 est la valeur actuelle de l'indice. Supposons que le portefeuille de 400 000 € dont il est question ait un bêta de 2,0 au lieu de 1,0. Nous continuons de supposer que l'indice CAC 40 est égal à 4 000. Le nombre de contrats de puts nécessaire est de :

$$2{,}0 \times \frac{400\,000}{4\,000} = 200$$

au lieu de 100 précédemment.

Pour calculer le prix d'exercice, on peut s'appuyer sur le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF ou CAPM, voir l'annexe du chapitre 3). Supposons que l'on souhaite se couvrir contre une valeur du portefeuille inférieure à 365 000 € dans les trois prochains mois. Le taux sans risque est de 5 % et le taux de dividende est de 2 %, à la fois pour l'indice et pour le portefeuille. Dans le cadre du MEDAF, la prime de risque, c'est-à-dire le surplus de rentabilité attendu d'un portefeuille par rapport au taux sans risque, est censé être égal à ß fois la prime de risque de l'indice. Le modèle permet de calculer la valeur du portefeuille pour différentes valeurs de l'indice à la fin des trois mois. Le tableau 17.1 montre les calculs lorsque l'indice est égal à 4 160. Dans ce cas, la valeur du portefeuille à la fin de la période de trois mois est de 429 000 €. On peut effectuer des calculs similaires pour d'autres valeurs de l'indice à la fin de cette période de

trois mois. Le tableau 17.2 présente les résultats. Le prix d'exercice des options acquises devrait être le niveau de l'indice correspondant au niveau de la couverture requise pour le portefeuille. Ici, le niveau de protection est de 365 000 €; par conséquent, le prix d'exercice des 200 contrats d'options achetés est de 3 840[1].

Tableau 17.1 : Calcul de l'espérance de valeur du portefeuille lorsque la valeur de l'indice dans trois mois est de 4 160 et que son ß = 2,0

Valeur de l'indice dans trois mois	4 160
Rentabilité due à la variation de l'indice	160/4 000, soit 4 % pour trois mois
Dividendes de l'indice	$0{,}25 \times 2 = 0{,}5$ % pour trois mois
Rentabilité totale de l'indice	$4 + 0{,}5 = 4{,}5$ % pour trois mois
Taux d'intérêt sans risque	$0{,}25 \times 5 = 1{,}25$ % pour trois mois
Prime de risque de l'indice	$4{,}5 - 1{,}25 = 3{,}25$ % pour trois mois
Prime de risque du portefeuille	$2 \times 3{,}25 = 6{,}5$ % pour trois mois
Rentabilité du portefeuille	$6{,}5 + 1{,}25 = 7{,}75$ % pour trois mois
Dividendes du portefeuille	$0{,}25 \times 2 = 0{,}5$ % pour trois mois
Augmentation de la valeur du portefeuille	$7{,}75 - 0{,}5 = 7{,}25$ % pour trois mois
Valeur du portefeuille	400 000 € $\times 1{,}0725 =$ 429 000 €

Tableau 17.2 : Relation entre la valeur de l'indice et la valeur du portefeuille pour un bêta égal à 2,0

Valeur de l'indice dans trois mois	Valeur du portefeuille dans trois mois (€)
4 320	461 000
4 160	429 000
4 000	400 000
3 840	365 000
3 680	333 000
3 520	301 000

Pour illustrer la façon dont l'assurance fonctionne, supposons que l'indice chute à 3 680, c'est-à-dire une baisse de 8 %. Comme on le voit dans le tableau 17.2, la valeur du portefeuille est alors de 333 000 €. Grâce aux options de vente, on obtient $(3\,840 - 3\,680) \times 200 = 32\,000$ €, ce qui est exactement la somme nécessaire pour que la valeur du portefeuille du gestionnaire passe de 333 000 € à 365 000 €. Bien sûr, cette couverture n'est pas gratuite puisque 200 puts ont été achetés.

1. On obtiendra environ 0,5 % des 400 000 €, soit 2 000 €, sous forme de dividendes au cours des trois prochains mois. Si nous voulons que le niveau de couverture de 365 000 € comprenne les dividendes, on doit choisir un prix d'exercice correspondant à 363 000 € plutôt qu'à 365 000 €. Dans ce cas, le prix d'exercice serait de 3 830.

Les exemples de cette section montrent que deux arguments justifient l'augmentation du coût de la couverture lorsque le bêta d'un portefeuille augmente : davantage de contrats d'options sont nécessaires et le prix d'exercice est plus élevé.

17.2 Les options de change

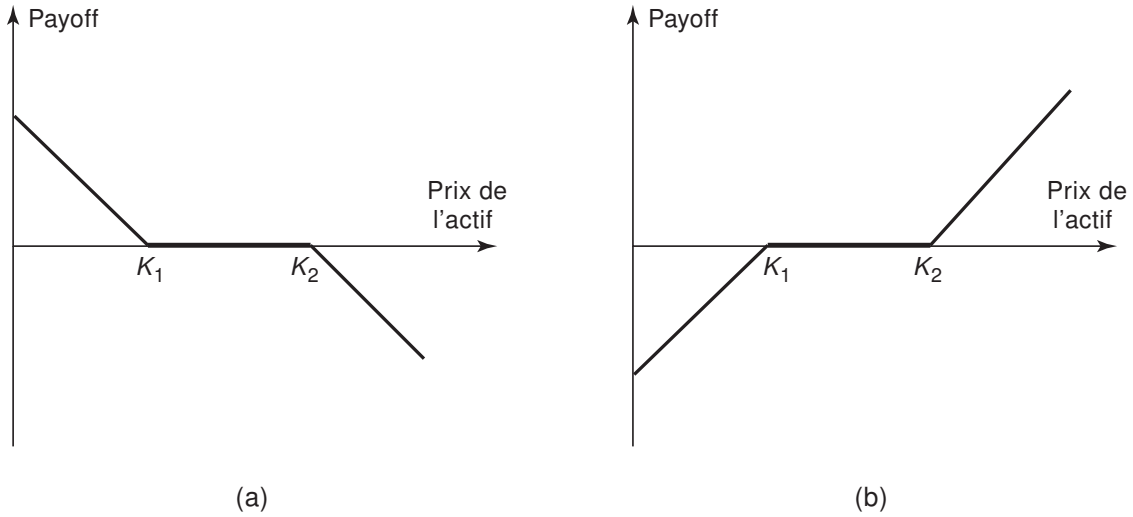
Les options sur devises sont principalement négociées sur un marché de gré à gré. L'avantage de ce type de marché est que des transactions importantes sont possibles, avec des prix d'exercice, des dates d'expiration et d'autres caractéristiques conçus pour répondre aux besoins des trésoriers d'entreprise. Bien que des options sur devises s'échangent sur le NASDAQ OMX aux États-Unis, le marché organisé de ces options est beaucoup plus réduit que le marché de gré à gré. Prenons l'exemple d'un call européen qui donne à son détenteur le droit d'acheter 1 million d'euros au taux de change de 1,2000 \$/€. Si le taux de change réel, à l'échéance de l'option, est de 1,2500, le payoff se montera à $1\,000\,000 \times (1{,}2500 - 1{,}2000) = 50\,000$ \$. De la même façon, imaginons un put européen qui donne à son porteur le droit de vendre 10 millions de livres sterling contre des euros au taux de change de 1,1500 €/£. Si le taux de change réel à l'échéance de l'option est de 1,1200, le payoff sera de $10\,000\,000 \times (1{,}15 - 1{,}12) = 300\,000$ €.

Pour une entreprise souhaitant se prémunir contre une exposition au risque de change, les options sur devises constituent une alternative intéressante aux contrats forward. Une société qui doit, par exemple, recevoir des livres sterling à une date future connue peut couvrir son risque en achetant des puts sur la livre sterling dont l'échéance correspond à la date de livraison. Cette stratégie garantit que la valeur des livres sterling obtenues ne sera pas inférieure au prix d'exercice, tout en permettant à la société de réaliser un bénéfice en cas de variation favorable du taux de change. De même, une société qui doit payer en livres sterling à une date future connue peut se couvrir en achetant des calls sur la livre sterling avec une échéance correspondant à cette date. Cette approche garantit que le coût du règlement en livres sterling ne dépassera pas un montant connu, tandis que la société pourra toujours profiter d'une variation favorable du taux de change. Alors qu'un contrat forward fixe le taux de change auquel une transaction à venir est réalisée, une option fournit une sorte d'assurance. Cette dernière n'est évidemment pas gratuite. Alors qu'il ne coûte pratiquement rien de prendre une position sur un contrat forward, une option nécessite le paiement immédiat d'un premium.

Les contrats range-forward

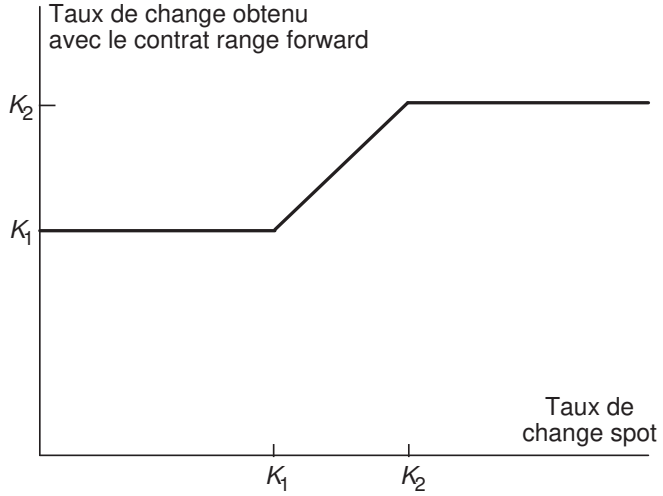
Un contrat *range-forward* est une déclinaison du contrat forward standard sur taux de change. Il existe quantités d'autres dénominations anglo-saxonnes pour le contrat *range-forward*, comme *zero-cost collar*, *flexible forward*, *option cylindre*, *option fence*, *min-max* et *forward band*, mais nous emploierons la plus usitée. Considérons une entreprise française. Elle sait qu'elle recevra 1 million de livres sterling dans trois mois. Supposons que le taux de change à terme à trois mois soit de 1,1200 €/£. La société peut fixer ce taux de change et le montant qu'elle recevra par une position courte sur un forward à trois mois lui permettant de vendre 1 million de livres sterling dans trois mois. Elle aurait ainsi l'assurance que le montant reçu pour ce million de livres sterling sera bien de 1 120 000 €.

Une autre solution consiste à acheter un put de prix d'exercice K_1 et de vendre un call de prix d'exercice K_2, avec $K_1 < 1{,}1200 < K_2$. Cela consiste en une position courte sur un contrat range-forward. Le graphique 17.1a représente le payoff de cette position.



Graphique 17.1 : Payoffs (a) d'une position courte et (b) d'une position longue sur un contrat range-forward

Dans les deux cas, les options portent sur 1 million de livres sterling. Si le taux de change dans les trois mois se révèle être inférieur à K_1, le put est exercé et, par conséquent, la société peut vendre son million de livres sterling au taux K_1. Si le taux de change est entre K_1 et K_2, aucune des deux options n'est exercée et l'entreprise traite au taux de change courant. Enfin, si le taux de change est supérieur à K_2, le call est exercé par la contrepartie, de sorte que le million de livres sterling est vendu obligatoirement au taux K_2. Le graphique 17.2 illustre les différents taux de change obtenus par ce contrat.



Graphique 17.2 : Taux de change obtenu lorsqu'on utilise un contrat range-forward pour se couvrir en cas d'encaissement ou de décaissement de devises

Si, plutôt que de recevoir 1 million de livres sterling, l'entreprise sait qu'elle devra les payer dans trois mois, elle peut vendre un put européen de prix d'exercice K_1 et acheter

un call de prix d'exercice K_2. Cela consiste à prendre une position longue sur un contrat range-forward. Le graphique 17.1b présente le payoff correspondant. Si le taux de change dans les trois mois se révèle être inférieur à K_1, le put sera exercé par la contrepartie et elle devra acheter le million de livres sterling au taux de change K_1. Si le taux de change s'établit entre K_1 et K_2, aucune des deux options ne sera exercée et la société traitera au taux de change courant. Enfin, si le taux de change est supérieur à K_2, le call sera exercé et l'entreprise pourra acheter le million de livres sterling au taux de change K_2. La structure des différents taux de change relatifs à l'achat de 1 million de livres sterling sera la même que celle appliquée à la vente de 1 million de livres sterling reçu dans le premier exemple (voir graphique 17.2).

Dans la pratique, on met en place un contrat range-forward afin que le prix du put soit égal au prix du call. On peut ainsi créer un contrat qui ne coûte rien, tout comme le coût de mise en place d'un contrat à terme qui est théoriquement nul (abstraction faite des frais de gestion et des appels de marge). Supposons que le taux sans risque soit de 5 % en France et en Grande-Bretagne, de sorte que le taux de change spot soit identique au taux forward, c'est-à-dire 1,1200 €/£. Supposons en outre que la volatilité des taux de change soit de 14 %. Nous pouvons utiliser DerivaGem pour montrer qu'un put de prix d'exercice 1,1000 permettant de vendre une livre sterling a le même prix qu'un call de prix d'exercice 1,1413 permettant d'acheter une livre sterling. (La valeur des deux options est de 0,04338.) Poser $K_1 = 1{,}1000$ et $K_2 = 1{,}1413$ dans notre exemple conduit donc à créer un contrat à coût nul.

Lorsque le prix d'exercice du call et celui du put se rapprochent jusqu'à devenir identiques dans un contrat range-forward, ce dernier devient finalement un contrat forward traditionnel. Une position courte sur un contrat range-forward, comme sur le graphique 17.1a, devient alors une position courte sur un contrat forward, et réciproquement dans le cas de positions longues (graphique 17.1b).

17.3 Les options sur actions versant un taux de dividende connu

Quelle est la différence entre une action qui verse un taux de dividende annuel q et une autre action identique qui ne verse pas de dividendes ? Les deux titres procurent le même profit global (incluant dividendes et gain en capital). Cependant, le détachement d'un dividende entraîne une baisse du cours égale au montant de ce dividende. Le paiement d'un taux de dividende q induit donc un taux de croissance du cours de l'action diminué de q par rapport à ce qu'il serait sans dividende. Si, avec un taux de dividende q, le cours de l'action passe de S_0 à S_T entre 0 et T, alors, en l'absence de dividendes et toutes choses égales par ailleurs, il passerait de S_0 à $S_T\,\mathrm{e}^{qT}$.

Ce raisonnement montre que la valeur de l'action suit la même loi de probabilité à la date T pour chacun des deux cas suivants :

1. La valeur initiale de l'action est S_0 et elle verse un dividende au taux q ;
2. La valeur initiale de l'action est $S_0\,\mathrm{e}^{-qT}$ et elle ne verse aucun dividende.

Une règle simple en découle : pour évaluer une option européenne d'échéance T sur une action versant un taux de dividende connu et égal à q, il suffit de réduire la valeur de l'action à $S_0\,\mathrm{e}^{-qT}$ et de procéder ensuite comme si elle ne versait pas de dividendes [2].

Les bornes inférieures de la valeur des options

Grâce à la remarque précédente, on peut déterminer simplement les bornes inférieures de la valeur d'une option européenne sur une action payant un taux de dividende q. Il suffit de remplacer S_0 par $S_0\,\mathrm{e}^{-qT}$ dans l'équation (11.4) et l'on obtient :

$$c \geq \max\left(S_0\,\mathrm{e}^{-qT} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,,\,0\right) \tag{17.1}$$

On peut aussi le prouver directement en considérant les deux portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen, plus un montant de cash égal à $K\,\mathrm{e}^{-rT}$;

Portefeuille B : e^{-qT} actions dont on réinvestit les dividendes dans des actions supplémentaires.

Pour obtenir la limite inférieure du prix du put européen, on procède à la même substitution dans l'équation (11.5), ce qui donne :

$$p \geq \max\left(K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,,\,0\right) \tag{17.2}$$

On peut également montrer ces résultats directement en considérant les deux portefeuilles suivants :

Portefeuille C : un put européen plus e^{-qT} actions dont on réinvestit les dividendes dans des actions supplémentaires ;

Portefeuille D : un montant de cash égal à $K\,\mathrm{e}^{-rT}$.

La parité call-put

En substituant $S_0\,\mathrm{e}^{-qT}$ à S_0 dans l'équation (11.6), on obtient une relation de parité call-put pour une action versant un taux de dividende q :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0\,\mathrm{e}^{-qT} \tag{17.3}$$

On peut également montrer ce résultat directement en considérant les deux portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen, plus un montant en cash égal à $K\,\mathrm{e}^{-rT}$;

Portefeuille C : un put européen plus e^{-qT} actions dont on réinvestit les dividendes dans des actions supplémentaires.

2. Cette méthode est analogue à celle développée dans la section 15.12 pour évaluer une option européenne sur une action versant des dividendes en espèces, cas pour lequel nous avons conclu qu'il faut déduire la valeur actualisée des dividendes du cours de l'action. Dans notre cas, c'est le taux de rendement des dividendes que nous déduisons du prix des actions.

Ces deux portefeuilles vaudront tous deux $\max(S_T; K)$ à l'échéance T. Ils doivent donc avoir la même valeur aujourd'hui, d'où l'équation de parité call-put (17.3). Pour les options américaines, la parité call-put est exprimée par (voir problème 17.12) :

$$S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} - K \leq C - P \leq S_0 - K \, \mathrm{e}^{-rT}$$

Les formules d'évaluation

Les valeurs des calls et puts européens se déduisent du remplacement de S_0 par $S_0 \, \mathrm{e}^{-qT}$ dans les équations (15.20) et (15.21) :

$$c = S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, N(d_1) - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(d_2) \tag{17.4}$$

$$p = K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(-d_2) - S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, N(-d_1) \tag{17.5}$$

Puisque :

$$\ln\left(\frac{S_0 \, \mathrm{e}^{-qT}}{K}\right) = \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - qT$$

d_1 et d_2 sont alors égaux à :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2) \; T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2) \; T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Ces résultats sont dus à Merton [3]. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 15, on peut définir le terme « dividende » comme la réduction de la valeur de l'action à la date de détachement du dividende. Si le taux de dividende n'est pas constant au cours de la vie de l'option, les équations (17.4) et (17.5) restent vérifiées si q est égal à la moyenne annualisée du taux de dividende durant la vie de l'option.

L'évaluation risque-neutre

Pour démontrer formellement les égalités (17.4) et (17.5), on peut soit résoudre l'EDP que le prix d'une option doit satisfaire, soit passer dans l'univers risque-neutre. Quand on introduit un taux de dividende, dans l'analyse de la section 15.6, l'EDP (15.16) devient [4] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q) \; S \, \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \, \sigma^2 \, S^2 \, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{17.6}$$

Cette équation, de même que l'équation (15.16), n'est affectée par aucune variable dépendant de l'attitude des investisseurs face au risque, à l'exception du prix d'équilibre de l'action qui intègre déjà cet élément. Par conséquent, la procédure d'évaluation risque-neutre, décrite à la section 15.7, reste valide. Dans un univers de neutralité face au risque, le rendement total de l'action doit être égal à r, le taux sans risque. Avec un

3. Voir R. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, printemps 1973, 141-183.

4. Voir la note technique n° 6 sur le site www.pearson.fr pour une démonstration.

taux de dividende q, l'espérance du taux de croissance du prix de l'action doit être égale à $(r - q)$. Le processus risque-neutre du prix de l'action est alors :

$$dS = (r - q)\ S\,dt + \sigma\,S\,dz \tag{17.7}$$

Pour évaluer un produit dérivé qui dépend d'une action versant un taux de dividende q, il suffit donc de considérer un taux de croissance du prix de l'action égal à $(r - q)$; on actualise ensuite l'espérance du payoff au taux r. Cette approche s'applique en particulier à l'évaluation de calls européens, en notant $S_0\,\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$ l'espérance de la valeur de l'action à la date T. Un raisonnement analogue à celui utilisé dans l'annexe du chapitre 15 conduit à écrire l'espérance du payoff du call à la date T sous la forme :

$$\mathrm{e}^{(r-q)\,T}\,S_0\,N(d_1) - KN(d_2)$$

où d_1 et d_2 sont définis comme précédemment. Actualiser au taux r sur la période allant jusqu'à l'échéance T conduit à l'équation (17.4).

17.4 L'évaluation des options européennes sur indices

Lors de l'évaluation des futures sur indices, au chapitre 5, nous avons supposé qu'on pouvait considérer un indice comme un actif versant un dividende. En évaluant les options sur indices, nous faisons les mêmes hypothèses. Autrement dit, les équations (17.1) et (17.2) représentent une limite inférieure pour les options européennes sur indices. L'équation (17.3) exprime la parité call-put de ces options et on peut utiliser les équations (17.4) et (17.5) pour évaluer ces options. Grâce à l'approche binomiale, on peut évaluer les options américaines. Dans tous les cas, S_0 est égal à la valeur de l'indice, σ est la volatilité de l'indice, et q représente la moyenne des taux de dividendes annuels de l'indice au cours de la vie de l'option.

■ **Exemple 17.1** Soit un call européen sur le S&P500 dont l'échéance est dans deux mois ; la valeur actuelle de l'indice est de 930, le prix d'exercice est de 900, le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an et la volatilité de l'indice est de 20 % par an. On attend des rendements en dividende de 0,2 % et 0,3 % respectivement pour le premier et le second mois. Dans ce cas, S_0 = 930, K = 900, r = 0,08, σ = 0,2 et T = 2/12. Le rendement en dividende total durant la vie de l'option est de 0,2 + 0,3 = 0,5 %, c'est-à-dire 3 % par an.

Puisque q = 0,03 et que :

$$d_1 = \frac{\ln(930/900) + (0{,}08 - 0{,}03 + 0{,}2^2/2) \times 2/12}{0{,}2\sqrt{2/12}} = 0{,}5444$$

$$d_2 = \frac{\ln(930/900) + (0{,}08 - 0{,}03 - 0{,}2^2/2) \times 2/12}{0{,}2\sqrt{2/12}} = 0{,}4628$$

$$N(d_1) = 0{,}7069 \quad ; \quad N(d_2) = 0{,}6782$$

la valeur du call, c, est donnée par l'équation (17.4) :

$$c = 930 \times 0{,}7069\,\mathrm{e}^{-0{,}03\times 2/12} - 900 \times 0{,}6782\,\mathrm{e}^{-0{,}08\times 2/12} = 51{,}83$$

Un contrat de call coûte donc 5 183 $ puisqu'il porte sur 100 fois l'indice.

Le calcul de q ne devrait inclure que les dividendes dont le détachement se produit pendant la durée de vie de l'option. Aux États-Unis, les détachements de dividendes ont tendance à se produire au cours de la première semaine des mois de février, mai, août et novembre. À tout moment, la valeur de q est donc susceptible de dépendre de la durée de vie de l'option. C'est encore plus vrai pour certains indices étrangers. Au Japon, par exemple, toutes les entreprises ont tendance à utiliser la même date de détachement de dividende. En Europe, c'est très variable : en France, par exemple, la date de versement du dividende dépend de l'assemblée générale ordinaire qui approuve les comptes. La date de versement du dividende est donc liée en partie à la date de clôture de l'exercice comptable.

Si le montant total du dividende versé par les actions de l'indice (plutôt que le taux de rendement du dividende) est censé être connu, on peut utiliser la formule de Black et Scholes classique en déduisant la valeur actuelle des dividendes de la valeur initiale de l'action. C'est l'approche recommandée au chapitre 15 en présence d'actions versant des dividendes dont les montants sont connus. Il peut toutefois être difficile de la mettre en œuvre pour un indice comprenant un grand nombre d'actions, dans la mesure où il est nécessaire de connaître le montant des dividendes attendus sur chacune des actions composant l'indice.

On avance parfois le fait que, à long terme, la rentabilité d'un portefeuille d'actions est plus élevée que celle procurée par un portefeuille d'obligations lorsque les deux ont la même valeur initiale. Si tel était le cas, un put d'échéance longue sur le portefeuille d'actions, où le prix d'exercice serait égal à la valeur future du portefeuille d'obligations, ne coûterait pas grand-chose. En fait, comme l'illustre l'encadré 17.1, il est plutôt onéreux.

Les prix forward

Soit F_0 le prix forward d'un indice pour un contrat dont l'échéance est T. Comme le montre l'équation (5.3), $F_0 = S_0 \, \mathrm{e}^{(r-q)\,T}$. Cela signifie que les équations pour le prix d'un call européen c et d'un put européen p peuvent s'écrire à partir des équations (17.4) et (17.5) :

$$c = F_0 \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(d_1) - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(d_2) \tag{17.8}$$

$$p = K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(-d_2) - F_0 \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(-d_1) \tag{17.9}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

La relation de parité put-call de l'équation (16.3) peut s'écrire :

$$c + K \, \mathrm{e}^{-rT} = p + F_0 \, \mathrm{e}^{-rT}$$

soit :

$$F_0 = K + (c - p) \, \mathrm{e}^{rT} \tag{17.10}$$

Si, comme on le constate couramment sur les marchés organisés, des paires d'options avec le même prix d'exercice font l'objet de nombreux échanges pour une date d'échéance particulière T, cette équation peut être utilisée pour estimer le prix forward de l'indice pour un contrat d'échéance T. Comme plusieurs échéances sont cotées, on

peut construire la structure par termes des prix forward et d'autres options peuvent être évaluées avec les équations (17.8) et (17.9). L'avantage de cette approche est que le taux de dividende de l'indice n'a pas à être estimé de manière explicite.

Les rendements implicites des dividendes

Si une estimation du taux de rendement des dividendes est nécessaire (pour évaluer une option américaine, par exemple), les calls et les puts de même prix d'exercice et de même échéance peuvent encore être utilisés. On déduit de l'équation (17.3) que :

$$q = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{c - p + K\,\mathrm{e}^{-rT}}{S_0}\right)$$

Pour un prix d'exercice et une échéance particuliers, les estimations de q calculées à partir de cette équation sont sans doute peu fiables. Mais quand les résultats de nombreuses paires de calls et de puts sont combinés, alors une image plus claire émerge du taux de dividende implicitement considéré par le marché.

Encadré 17.1 Peut-on garantir sur le long terme un rendement des fonds aussi élevé que celui des obligations d'État ?

Considérons un gérant de fonds qui essaie de persuader des investisseurs de placer leur argent dans un fonds qui réplique le S&P500. Il peut être tenté de leur garantir un rendement aussi élevé que celui des obligations d'État sur les 10 années à venir.

Historiquement, les actions américaines ont surperformé les obligations sur pratiquement toutes les périodes de 10 ans pour lesquelles des données sont disponibles. Par conséquent, on en déduit qu'une telle proposition n'engage pas beaucoup le gérant ; en réalité, cette assurance peut être très coûteuse. Supposons que l'indice vaille 1 000 aujourd'hui, que son taux de dividende soit de 1 %, sa volatilité de 15 % et que le taux sans risque à 10 ans soit de 5 % par an. Pour surperformer les obligations, les actions doivent dégager une rentabilité annuelle supérieure à 5 % sur la période considérée. Comme l'indice paie 1 % de dividendes, la valeur de l'indice doit progresser de 4 % par an en moyenne, ce qui amène dans 10 ans à une valeur de 1 492. Avec ces paramètres, la valeur d'un put à 10 ans sur cet indice avec un prix d'exercice de 1 492 est égale à 169,7. Cela montre que la valeur de la garantie proposée par le gérant représente presque 17 % de la valeur du fonds !

17.5 L'évaluation des options sur devise

Pour évaluer les options sur devises, on note S_0 le taux de change spot. Plus précisément, S_0 est la valeur d'une unité de la devise étrangère en devise domestique. Comme nous l'avons expliqué à la section 5.10, une devise étrangère est analogue à une action qui

verse un dividende. Le propriétaire de devises bénéficie d'un taux de rentabilité égal au taux d'intérêt sans risque, r_f, sur cette devise. On peut utiliser les équations (17.1) et (17.2) en remplaçant q par r_f. Elles fournissent ainsi des limites pour les valeurs d'un call européen, c, et d'un put européen p :

$$c \geq \max\left(S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T} - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,,\,0\right)$$
$$p \geq \max\left(K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,,\,0\right)$$

L'équation (17.3), dans laquelle r_f remplace q, présente la formule de parité call-put pour les options de change européennes :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T}$$

Enfin, les équations (17.4) et (17.5), dans lesquelles on remplace également q par r_f, permettent d'évaluer les options européennes sur devises :

$$c = S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,N(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2) \tag{17.11}$$
$$p = K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2) - S_0\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,N(-d_1) \tag{17.12}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r - r_f + \sigma^2/2\right)\,T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r - r_f - \sigma^2/2\right)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Le taux d'intérêt domestique, r, et le taux d'intérêt étranger, r_f, sont tous deux des taux continus pour la maturité T (exprimés en base annuelle). Le put et le call sur une devise sont symétriques. Ainsi, un put permettant de vendre la devise A au taux de change K équivaut à un call permettant d'acheter la devise B au prix $1/K$ (voir l'exercice 17.8).

■ **Exemple 17.2** Considérons un call européen à quatre mois sur la livre sterling ; le taux de change actuel est de 1,6000 €/£, le prix d'exercice de 1,6000, le taux d'intérêt sans risque français de 8 % par an, le taux sans risque britannique de 11 % par an et la valeur de l'option de 4,3 centimes d'euro. Dans ce cas, S_0 = 1,6, K = 1,6, r = 0,08, r_f = 0,11, T = 4/12 et c = 0,043. On peut calculer la volatilité implicite par itération. Une volatilité de 20 % produit une valeur d'option de 0,0639, une volatilité de 10 % produit une valeur d'option de 0,0285, etc. La volatilité implicite est en fait égale à 14,1 %.

L'utilisation des taux de change forward

Comme les banques et autres institutions financières échangent activement des forward sur taux de change, les taux de change forward sont souvent utilisés pour évaluer les options.

L'équation (5.9) donne le taux de change forward, F_0, pour une maturité T sous la forme :

$$F_0 = S_0\,\mathrm{e}^{\left(r - r_f\right)T}$$

On peut alors simplifier les équations (17.11) et (17.12) ainsi :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - K N(d_2)\right] \tag{17.13}$$

$$p = \mathrm{e}^{-rT}\left[K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)\right] \tag{17.14}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(F_0/K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = \frac{\ln\left(F_0/K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Les équations (17.13) et (17.14) sont identiques aux équations (17.8) et (17.9). Comme nous le verrons dans le chapitre 18, une option européenne sur le prix spot d'un actif peut être évaluée en termes de prix d'un contrat à terme sur l'actif en utilisant les équations (17.13) et (17.14). L'échéance du contrat à terme doit être la même que celle de l'option européenne.

17.6 Les options américaines

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 13, les arbres binomiaux peuvent être utilisés pour évaluer les options américaines sur indices et devises. Comme dans le cas des options américaines sur une action ne versant pas de dividende, le paramètre déterminant la taille des mouvements à la hausse, u, est égal à $\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, où σ est la volatilité et Δt la longueur de la période. Le paramètre déterminant l'importance des mouvements de baisse, d, est égal à $1/u$, soit $\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Pour une action ne versant pas de dividendes, la probabilité d'une hausse est :

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

où $a = \mathrm{e}^{r\Delta t}$. Pour les options sur indices et sur devises, p est défini de la même façon, mais a est défini différemment. Dans le cas des options sur indice :

$$a = \mathrm{e}^{(r-q)\Delta t} \tag{17.15}$$

où q est le taux de rendement en dividende de l'indice. Dans le cas des options de change :

$$a = \mathrm{e}^{\left(r-r_f\right)\Delta t} \tag{17.16}$$

où r_f est le taux sans risque en devise étrangère. L'exemple 13.1 de la section 13.11 montre comment un arbre à deux périodes peut être construit pour évaluer une option sur indice. L'exemple 13.2 montre comment un arbre en trois étapes peut être construit pour évaluer une option sur devise. D'autres exemples de l'utilisation d'arbres binomiaux pour évaluer les options sur indices et sur devises sont donnés dans le chapitre 21.

Parfois, il peut être optimal d'exercer une option de change américaine avant l'échéance. De ce fait, ces options ont une valeur supérieure à celle de leurs homologues européennes. En général, les calls sur devise à taux d'intérêt élevé et les puts sur devise à taux d'intérêt faible sont les options dont l'exercice anticipé est le plus probable. La

raison tient à ce qu'une devise dont le taux d'intérêt est très élevé est plus susceptible de se déprécier face à une devise au taux d'intérêt plus faible. En outre, un call sur indice avec un fort taux de rendement en dividende et un put sur indices avec un faible taux de rendement en dividende sont plus susceptibles d'être exercés par anticipation.

Résumé

Le dénouement des options sur indices s'effectue en cash. À l'exercice d'un call sur indice, l'investisseur reçoit le montant duquel l'indice dépasse le prix d'exercice à la clôture du jour d'exercice. De même, à l'exercice d'un put sur indice, l'investisseur reçoit le montant duquel le prix d'exercice dépasse la valeur de l'indice à la clôture du jour d'exercice. On peut aussi employer les options sur indices pour assurer un portefeuille. Si le portefeuille a un bêta égal à 1,0, il est pertinent d'acheter un put pour chaque montant de nS_0 euros dans le portefeuille si l'option porte sur n fois l'indice, avec S_0 désignant la valeur de l'indice. Lorsque β est différent de 1,0, ce sont β puts qui devront être achetés pour chaque montant de S_0 euros présents dans le portefeuille. Le bêta du portefeuille est calculé en utilisant le MEDAF. Le prix d'exercice des puts retenus dépend du niveau d'assurance requis pour la valeur du portefeuille.

On négocie la plupart des options de change sur les marchés organisés et sur les marchés de gré à gré. Les trésoriers d'entreprise peuvent les utiliser pour se couvrir contre le risque de change. Par exemple, le trésorier d'une firme européenne sachant qu'il va recevoir des dollars US à une certaine date future peut se couvrir en achetant des puts sur dollars US dont l'échéance correspond à cette date. Réciproquement, un trésorier européen qui doit payer des dollars US à une certaine date future peut se couvrir en achetant un call dont l'échéance est la date correspondante. Les options sur devises peuvent également être utilisées pour créer un contrat range-forward. Il s'agit, pour une entreprise dont l'exposition au risque de change est connue, d'un contrat à coût zéro qui permet de fournir une couverture contre la baisse en renonçant à une partie de la hausse.

La formule de Black-Scholes-Merton pour évaluer les options européennes sur une action ne versant pas de dividendes peut être étendue aux options européennes sur une action versant un dividende prédéterminé. Cette extension peut être utilisée pour évaluer les options européennes sur des indices boursiers et devises car :

1. Un indice boursier est analogue à une action payant un taux de dividende continu : le taux de dividende est égal à la moyenne des taux de dividende des différentes actions composant l'indice ;
2. Il en est de même pour une devise, mais l'équivalent du taux de dividende est ici le taux d'intérêt sans risque du pays étranger concerné.

Enfin, les arbres binomiaux peuvent être utilisés pour évaluer les options américaines sur les indices boursiers et de devises.

Références complémentaires

BIGER N. et J. HULL, "The Valuation of Currency Options", *Financial Management*, 12, printemps 1983, 24-28.

BODIE Z., "On the Risk of Stocks in the Long Run", *Financial Analysts Journal*, 51 (3), 1995, 18-22.

GARMAN M. B. et S. W. KOHIHAGEN, "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2, décembre 1983, 231-237.

GIDDY I. H. et J. DUFEY, "Uses and Abuses of Currency Options", *Journal of Applied Corporate Finance*, 8 (3), 1995, 49-57.

GRABBE J. O., "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and Finance*, 2, décembre 1983, 239-253.

MERTON R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, printemps 1973, 141-183.

Problèmes et exercices

17.1 Un portefeuille diversifié d'actions françaises vaut actuellement 10 millions d'euros et a un bêta de 1,0. Le CAC 40 est actuellement à 4 000 points. Expliquez comment utiliser un put sur cet indice avec un prix d'exercice de 3 800 pour pratiquer de l'assurance de portefeuille.

17.2 « Si l'on est en mesure d'évaluer une option portant sur une action versant un taux de dividende connu, on peut alors évaluer des options sur indices et devises. » Expliquez cette assertion.

17.3 Un indice boursier est actuellement à 300 points, son rendement en dividende est de 3 % par an et le taux sans risque est de 8 % par an. Quelle est la limite inférieure du prix d'un call européen à six mois sur cet indice si le prix d'exercice est de 290 ?

17.4 Une devise vaut actuellement 0,80 €. Dans chacun des deux prochains mois, sa valeur augmentera ou diminuera de 2 %. Le taux sans risque domestique est de 6 % et le taux sans risque étranger est de 8 %. Quelle est la valeur d'un call européen à deux mois sur cette devise si le prix d'exercice est de 0,80 € ?

17.5 Expliquez comment les entreprises peuvent utiliser des options pour se couvrir contre le risque de change.

17.6 Calculez la valeur d'un call européen à trois mois, à la monnaie, sur un indice valant aujourd'hui 250 points. Le taux sans risque est de 10 % par an, la volatilité de l'indice est de 18 % par an et le rendement en dividende de l'indice est de 3 % par an.

17.7 Calculez la valeur d'un put européen sur devise à huit mois, de prix d'exercice 0,50. Le taux de change est actuellement de 0,52, la volatilité de ce taux de change est de 12 %, le taux sans risque domestique est de 4 % par an et le taux sans risque étranger est de 8 % par an.

17.8 Montrez que la formule de l'équation (17.12) pour un put permettant de vendre une unité de la monnaie A contre la monnaie B au prix d'exercice K donne la même valeur que l'équation (17.11) pour un call permettant d'acheter K unités de la monnaie B contre la monnaie A au prix d'exercice de $1/K$.

17.9 Une devise vaut actuellement 1,50 €. Les taux d'intérêt sans risque domestique et étranger sont respectivement de 5 % et 9 %. Calculez une limite inférieure de la valeur d'un call sur cette devise, d'échéance six mois et de prix d'exercice 1,40 €, s'il s'agit d'un call de type (a) européen et (b) américain.

17.10 Un indice boursier vaut actuellement 250. Le rendement en dividende de cet indice est de 4 % par an et le taux sans risque est de 6 % par an. Un call européen à trois mois a un prix d'exercice de 245 ; il cote actuellement 10 €. Quelle est la valeur d'un put européen à trois mois de mêmes caractéristiques ?

17.11 L'indice S&P100 est actuellement à 696 points et présente une volatilité annuelle de 30 %. Le taux sans risque est de 7 % par an et l'indice procure un rendement en dividende de 4 % par an. Calculez la valeur d'un put européen à trois mois et de prix d'exercice 700 sur cet indice.

17.12 Démontrez que si C représente la valeur d'un call américain portant sur une action versant un taux de dividende q, de prix d'exercice K et de maturité T, et si P est la valeur d'un put américain de mêmes caractéristiques, alors :

$$S_0\,\mathrm{e}^{-qT} - K < C - P < S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

où S_0 est le cours actuel de l'action et r le taux sans risque ($r > 0$).

(Indication : pour obtenir une des inégalités, considérez les valeurs possibles des portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen plus un montant K investi au taux sans risque ;

Portefeuille B : un put américain plus e^{-qT} actions, les dividendes étant aussi réinvestis dans l'action.

Pour obtenir l'autre inégalité, considérez les valeurs possibles de :

Portefeuille C : un call américain plus un montant $K\,\mathrm{e}^{-rT}$ investi au taux sans risque ;

Portefeuille D : un put européen plus une action, les dividendes étant réinvestis dans l'action.)

17.13 Montrer qu'un call sur une devise a la même valeur que le put européen correspondant sur cette devise quand le taux de change forward est égal au prix d'exercice.

17.14 Attendriez-vous de la volatilité d'un indice d'actions qu'elle soit plus grande ou plus petite que celle d'une action individuelle ? Justifiez votre réponse.

17.15 Le coût de couverture d'un portefeuille augmente-t-il ou diminue-t-il lorsque le bêta du portefeuille augmente ? Justifiez votre réponse.

17.16 Considérons un portefeuille d'une valeur de 60 millions de dollars US alors que le S&P500 est à 1 200 points. Si le portefeuille réplique l'indice, quelles options faut-il acheter pour fournir une protection contre une chute de la valeur du portefeuille en dessous de 54 millions de dollars US dans un an ?

17.17 Considérons à nouveau la situation de l'exercice 17.16 en supposant que le portefeuille a un bêta de 2,0, que le taux sans risque est de 5 % par an et que le rendement en dividende du portefeuille est égal à celui de l'indice, soit 3 % par an. Quelles options faut-il acheter pour fournir une protection contre une chute de la valeur du portefeuille en dessous de 54 millions de dollars US dans un an ?

17.18 Un indice se situe actuellement à 1 500. Des calls et des puts européens avec un prix d'exercice de 1 400 et échéance à six mois ont respectivement un cours du marché de 154,00 et 34,25. Le taux sans risque à six mois est de 5 %. Quel est le taux de dividende implicite ?

17.19 On suppose que la rentabilité totale (incluant les dividendes) d'un indice réplique la rentabilité d'un certain portefeuille. Expliquez comment vous évalueriez (a) des contrats forward et (b) des options européennes sur cet indice.

17.20 Quelle est la relation de parité call-put pour les options de change européennes ?

17.21 Démontrez les résultats des équations (17.1), (17.2) et (17.3) à l'aide des portefeuilles indiqués.

17.22 Une option sur le taux de change yen/euro peut-elle être créée à partir de deux autres options : une portant sur le taux de change dollar US/euro et l'autre portant sur le taux de change dollar US/yen ? Justifiez votre réponse.

Questions complémentaires

17.23 Le 20 juillet 2016, l'indice Dow Jones Industrial Average cotait 18 580 et la valeur du « call septembre 185 » (européen) était de 3,35 $ (le prix d'exercice est donc de 185 ; sachant que les options sur le Dow Jones représentent un centième de l'indice, S_0 vaut ici 185,80). Utilisez DerivaGem pour calculer la volatilité implicite de cette option. Supposons que le taux sans risque était de 0,7 % et que le taux de dividende sur l'indice était de 2,75 %. L'échéance de l'option est le 16 septembre 2016. Estimez la valeur du « put septembre 185 ». Quelle volatilité implicite utilisez-vous pour évaluer cette option ?

17.24 Un indice d'actions est actuellement à 300 points et présente une volatilité de 20 %. Le taux d'intérêt sans risque est de 8 % par an et le rendement en dividende de l'indice est de 3 % par an. Utilisez un arbre binomial à trois périodes pour évaluer un put sur l'indice, d'échéance six mois et de prix d'exercice 300, s'il est (a) européen et (b) américain ?

17.25 Supposons que le cours au comptant du dollar US soit de 0,85 € et que le taux de change dollar US/euro ait une volatilité de 8 % par an. Les taux sans risque aux États-Unis et en Europe sont respectivement de 4 % et 5 %. Calculez la valeur d'un call européen permettant d'acheter un dollar US pour 0,85 € dans neuf mois. Utilisez la relation de parité call-put pour calculer la valeur d'un put européen permettant de vendre un dollar US pour 0,85 € dans neuf mois. Quelle est la valeur d'une option permettant d'acheter 0,85 € avec un dollar US dans neuf mois ?

17.26 Un indice est actuellement coté 1 000 et le taux sans risque est de 4 %. Les valeurs d'un call et d'un put européens à 3 mois sont respectivement de 78 et 26 pour un prix d'exercice de 950. Estimez (a) le taux de dividende et (b) la volatilité implicite.

17.27 Supposons que le prix de la devise A exprimé en unités de la devise B suive le processus $dS = (r_B - r_A)\, S\, dt + \sigma\, S\, dz$, où r_A est le taux d'intérêt sans risque de la devise A et r_B le taux d'intérêt sans risque de la devise B. Quel est le processus suivi par le prix de la devise B exprimé en unités de la devise A ?

17.28 La parité dollar US/euro est 1,3000. La volatilité du taux de change est de 15 %. Une société américaine recevra 1 million d'euros dans trois mois. Les taux sans

risque en euros et en dollars US sont respectivement de 5 % et 4 %. L'entreprise décide d'utiliser un range-forward avec un prix d'exercice plancher de 1,2500 $/€.

a. Quel devrait être le prix d'exercice plafond qui permette de créer un contrat à coût zéro ?

b. Quelle position en calls et puts la société devrait-elle prendre ?

c. Montrez que votre réponse à la question (a) ne dépend pas du niveau des deux taux d'intérêt tant que $r - r_f$ reste constant.

17.29 Dans l'encadré 17.1, quel est le coût d'une police d'assurance qui garantirait une rentabilité positive du fonds sur la période de 10 ans à venir ?

17.30 Le prix à un an du peso mexicain est de 0,0750 USD par MXN. Les taux sans risque américain et mexicain sont respectivement de 1,25 % et de 4,5 %. La volatilité du taux de change est de 13 %. Quelles sont les valeurs d'un put européen et d'un put américain à un an et de prix d'exercice 0,0800 ?

Chapitre 18

Les options sur contrats futures

Les options que nous avons étudiées jusqu'à présent fournissent à leur titulaire le droit d'acheter ou de vendre un actif à une certaine date. On les appelle parfois options spot car, lorsqu'on les exerce, la vente ou l'achat de l'actif au prix d'exercice a lieu immédiatement. Nous allons à présent envisager des options sur contrats à terme, également connues sous le nom d'options sur futures. Ces contrats stipulent que l'exercice de l'option donne à son détenteur une position sur un futures.

La Commodity Futures Trading Commission a autorisé la négociation d'options sur futures sur le marché américain, d'abord sur une base expérimentale en 1982, puis de façon permanente en 1987. Dès lors, la popularité de ces contrats a connu une croissance très rapide.

Dans ce chapitre, nous examinons le fonctionnement des options sur futures et les différences entre ces dernières et les options spot. Nous présentons les modèles d'évaluation des options sur futures, soit à l'aide des arbres binomiaux, soit en utilisant des équations analogues à celles de Black, Scholes et Merton pour les options sur actions. Nous comparons également la valeur des options sur futures et celle des options spot.

18.1 La nature des options sur futures

Une option sur futures confère le droit, mais pas l'obligation, de conclure un contrat à terme à un certain prix et à une certaine date. Concrètement, un call sur futures permet d'entrer en position longue sur un futures à un certain prix, un put sur futures permet d'obtenir une position courte sur un futures à un certain prix. La plupart des options sur futures sont américaines : on peut les exercer à tout moment pendant la durée du contrat.

Si un call sur futures est exercé, son détenteur obtient une position longue sur le contrat futures sous-jacent, ainsi qu'un montant égal à la différence entre le prix futures de compensation le plus récent et le prix d'exercice. Si c'est un put sur futures qui est exercé,

son détenteur obtient une position courte sur le contrat futures sous-jacent, ainsi qu'un montant égal à la différence entre le prix d'exercice et le prix futures de compensation le plus récent. Comme le montrent les exemples suivants, le payoff effectif d'un call sur futures est égal à $\max(F_T - K\,;0)$.

Symétriquement, le payoff effectif d'un put sur futures à la date d'exercice est :

$$\max(K - F_T\,;0)$$

F_T est le prix futures à la date d'échéance de l'option et K le prix d'exercice.

■ **Exemple 18.1** Le 15 août, un investisseur détient un call sur contrat futures de cuivre échéance septembre avec un prix d'exercice de 320 cents la livre (lb). Un contrat futures porte sur 25 000 lb de cuivre. Le prix futures du cuivre pour une échéance septembre est à cette date de 331 cents et le prix de compensation de la veille était de 330 cents. Si l'option est exercée, l'investisseur reçoit une somme de :

$$25\,000\,(330 - 320) = 2\,500\ \$$$

ainsi qu'une position longue dans un contrat futures pour acheter 25 000 lb de cuivre en septembre. S'il le désire, la position sur le contrat futures peut être dénouée immédiatement. Cela permet à l'investisseur d'encaisser un payoff de 2 500 $, plus une somme de :

$$25\,000\,(331 - 330) = 250\ \$$$

reflétant la variation du prix futures depuis le dernier cours de compensation (la veille en général). Le payoff total produit par l'exercice de l'option le 15 août est de 2 750 $, montant égal à $25\,000 \times (F - K)$, où F représente le prix futures à la date d'exercice et K le prix d'exercice.

■ **Exemple 18.2** Un investisseur dispose d'un put sur contrat futures de maïs échéance décembre avec un prix d'exercice de 600 cents le boisseau. Un contrat futures porte sur 5 000 boisseaux de maïs. Supposons que le prix futures du maïs pour l'échéance décembre soit actuellement de 580 cents et que son cours, à la dernière compensation, ait été de 579 cents. Si l'option est exercée, l'investisseur recevra une somme de :

$$5\,000\,(600 - 579) = 1\,050\ \$$$

ainsi qu'une position courte sur un contrat futures échéance décembre. S'il le désire, la position sur le contrat futures peut être dénouée immédiatement. Cela permet alors à l'investisseur d'encaisser un payoff de 1 050 $, moins une somme de :

$$5\,000\,(580 - 579) = 50\ \$$$

reflétant la variation du prix futures depuis la dernière compensation. Le payoff total produit par l'exercice de l'option est de 1 000 $. Il est égal à $5\,000 \times (K - F)$, où F est le prix futures à la date d'exercice et K le prix d'exercice.

Les mois d'échéance

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la plupart des options sur futures sont américaines. Elles sont référencées par le mois d'échéance du contrat futures sous-jacent et non par le mois d'échéance de l'option. La date d'échéance d'une option sur futures est généralement la date de livraison la plus proche du contrat futures sous-jacent ; il arrive qu'elle se situe quelques jours avant. L'option sur futures sur obligations du Trésor du CBOT expire le premier vendredi, précédant d'au moins cinq jours ouvrés la fin du mois avant le mois d'échéance du contrat futures. Une exception : le contrat Eurodollar CME moyen terme, pour lequel les contrats futures expirent entre un et deux ans après les options.

Les contrats les plus échangés portent, pour les matières premières, sur le maïs, le soja, le blé, le sucre, le pétrole et ses dérivés, le gaz, et, en ce qui concerne les futures financiers, sur les obligations d'État, les contrats Eurodollar, Euribor, Eurobund et S&P500.

Les options sur futures de taux

Une option sur futures d'obligations est une option portant sur un contrat futures d'obligations d'État. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 6, un contrat futures sur obligations d'État conduit à la livraison d'obligations d'État d'une valeur nominale de 100 000 $ (aux États-Unis) ou 100 000 € (en Europe). La valeur d'une option sur futures d'obligations est cotée en pourcentage de la valeur faciale de l'obligation sous-jacente ; ce pourcentage est arrondi au 1/64 le plus proche aux États-Unis et à deux chiffres après la virgule en Europe.

Une option sur futures Eurodollar ou Euribor, cotée au CME Group, est une option qui permet, en cas d'exercice, de prendre position sur un contrat futures Eurodollar ou Euribor. Lorsque le cours des futures Eurodollar ou Euribor varie d'un point de base, soit 0,01 %, il s'ensuit un gain ou une perte sur un contrat futures de 25 $ ou 25 € selon le marché (voir chapitre 6). De même, dans l'évaluation des options sur futures Eurodollar, un point de base représente 25 $ ou 25 €. Dans les contrats dont l'échéance est la plus proche, les cours sont présentés au quart de point de base le plus proche sur le CME Group. Les cours des contrats dont l'échéance est à 2 mois sont arrondis au demi-point de base le plus proche. De même, sur le contrat Euribor du Liffe, la variation minimale est de 0,5 point de base, soit 12,5 €.

Les contrats futures sur les taux d'intérêt fonctionnent de la même façon que les autres contrats futures. Par exemple, le payoff d'un call s'écrit $\max(F - K\,;0)$, avec F le prix futures à la date d'exercice et K le prix d'exercice. En plus du payoff en numéraire, le détenteur de l'option obtient, à l'exercice, une position longue sur un contrat futures, et le vendeur de cette option s'engage dans la position courte correspondante.

Les cours des futures de taux augmentent lorsque les valeurs des obligations augmentent (c'est-à-dire lorsque les taux chutent). Réciproquement, ils diminuent lorsque les cours des obligations diminuent (en raison d'une hausse des taux). Un investisseur anticipant une hausse des taux à court terme peut spéculer en achetant des puts sur futures Eurodollar. Un investisseur qui, à l'inverse, anticipe une baisse, peut spéculer en achetant des calls sur futures Eurodollar.

■ **Exemple 18.3** En février, le prix futures Eurodollar échéance juin est 93,82 (ce qui correspond à un taux Eurodollar à 3 mois de 6,18 % par an). Le premium d'un call sur ce contrat avec un prix d'exercice de 94,00 s'établit à 0,10. Cette option peut intéresser un investisseur qui anticipe une baisse des taux. Supposons que les taux d'intérêt à court terme diminuent de 100 points de base dans les trois prochains mois et que l'investisseur exerce le call lorsque le prix futures s'établit à 94,78 (ce qui correspond à un taux à 3 mois de 5,22 % par an). Le payoff est donc égal à $25 \times 78 = 1\,950$ \$. Comme le coût du contrat est de $10 \times 25 = 250$ \$, le gain de l'investisseur se monte à 1 700 \$.

■ **Exemple 18.4** Supposons qu'en août, le prix futures du contrat FGBL coté sur l'Eurex soit de 96,28. Un investisseur anticipant une baisse des taux d'ici à décembre peut choisir d'acheter des calls d'échéance décembre et de prix d'exercice 98. Supposons que le cours de ces calls soit de 1,06. Si le prix futures des obligations monte à 100,00, l'investisseur encaissera, pour 100 € d'obligations, un profit net de :

$$100{,}00 - 98{,}00 - 1{,}06 = 0{,}94$$

Puisqu'une option porte sur l'achat ou la vente d'instruments dont la valeur faciale est de 100 000 €, l'investisseur réalisera un profit de 940 € par option achetée.

18.2 Les raisons de la popularité des options sur futures

Il est logique de s'interroger sur l'attractivité des options sur futures par rapport à celle des options sur l'actif sous-jacent. La raison essentielle est qu'un contrat futures est, presque toujours, plus liquide et plus facile à vendre que l'actif sous-jacent. En outre, on connaît immédiatement le prix futures en raison de la liquidité des marchés de futures correspondants.

Le marché des futures d'obligations d'État est bien plus actif que celui de n'importe quelle obligation d'État particulière. Là aussi, on connaît les prix futures immédiatement grâce aux échanges sur le CME Group ou l'Eurex. Au contraire, on ne peut obtenir la valeur de marché d'une obligation qu'en contactant un ou plusieurs vendeurs. Il n'est donc pas surprenant que les investisseurs préfèrent prendre livraison d'un contrat futures d'obligations plutôt que des obligations elles-mêmes. De même, les futures sur matières premières sont souvent bien plus simples à échanger que lesdites matières premières. Il est évidemment plus commode de prendre livraison ou de livrer un contrat futures de porcs vivants que de procéder avec les porcs eux-mêmes !

Un point capital doit être mentionné : l'exercice d'options sur futures ne conduit généralement pas à la livraison de l'actif sous-jacent au contrat futures. En effet, dans la plupart des cas, le futures est liquidé avant la livraison. Dans la plupart des cas, on dénoue en cash les options sur futures. C'est ce qui rend ces produits attractifs pour de nombreux investisseurs, notamment ceux dont les capitaux sont limités et pour qui il est difficile de présenter les fonds nécessaires à l'achat de l'actif sous-jacent lorsque l'option est exercée. Ces options présentent un avantage supplémentaire : on négocie les futures et les options sur futures sur les mêmes marchés organisés, ce qui facilite les

couvertures, les arbitrages et les spéculations et tend également à rendre le marché plus efficient. Enfin, le dernier point a trait aux coûts de transaction : les options sur futures sont sujettes à des coûts généralement plus faibles que les options sur l'actif sous-jacent.

18.3 Options sur futures *versus* options sur le sous-jacent

Dans cette section, nous comparons les options sur futures avec les options portant directement sur le sous-jacent du contrat futures (nous dirons ***options spot***), lorsque les deux types d'options ont le même prix d'exercice et la même date d'échéance.

Le payoff d'un call européen spot avec un prix d'exercice K est égal à :

$$\max(S_T - K\,;0)$$

où S_T est le cours du sous-jacent à la date d'échéance. Le payoff du call européen sur futures correspondant est égal à :

$$\max(F_T - K\,;0)$$

où F_T est le prix futures à la date d'échéance de l'option. Si cette dernière est identique à celle du contrat futures, $F_T = S_T$ et les deux options sont, en théorie, équivalentes. De même, un put européen sur futures a la même valeur que son homologue spot lorsque l'échéance de l'option sur futures est la même que celle du contrat futures.

La plupart des options sur futures sur les marchés sont de type américain. Cependant, comme nous allons le voir, il convient de ne pas négliger les options de type européen car les résultats obtenus peuvent servir à évaluer les options spot européennes correspondantes.

18.4 La parité call-put

Au chapitre 11, nous avons présenté une relation de parité call-put pour les options européennes sur actions. Nous appliquons ci-après un raisonnement analogue pour montrer une relation de parité call-put pour les options européennes sur contrats futures, dans l'hypothèse où il n'existe pas de différence entre les payoffs des contrats futures et forward. Considérons un call et un put européens sur futures, de même prix d'exercice K et de même date d'échéance T. Notons A et B les deux portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen sur futures plus un montant $K\,\mathrm{e}^{-rT}$;

Portefeuille B : un put européen sur futures plus une position longue sur un contrat futures plus un montant $F_0\,\mathrm{e}^{-rT}$, avec F_0 le prix futures.

Dans le portefeuille A, on peut investir la trésorerie au taux sans risque, r, pour obtenir K à la date T. Notons F_T le prix futures à la date d'échéance de l'option ; si $F_T > K$, le call du portefeuille A est exercé et le portefeuille vaut F_T. Si $F_T \leq K$, le call n'est pas exercé et le portefeuille A vaut K. La valeur du portefeuille A à la date T est donc égale à :

$$\max(F_T\,;K)$$

Dans le portefeuille B, on peut investir la trésorerie au taux sans risque pour obtenir F_0 à la date T. Le put génère un payoff égal à $\max(K - F_T\,;0)$, et le contrat futures engendre un payoff de $F_T - F_0$ [1]. La valeur du portefeuille B à la date T est donc égale à :

$$F_0 + (F_T - F_0)\max(K - F_T\,;0) = \max(F_T\,;K)$$

Puisque les deux portefeuilles ont la même valeur à la date T et qu'il ne peut y avoir d'exercice prématuré, ils ont la même valeur aujourd'hui. La valeur initiale du portefeuille A est :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

où c est la valeur du call sur futures. Le processus d'appels de marge quotidiens assure que la valeur actuelle du contrat futures du portefeuille B est égale à 0. Par conséquent, le portefeuille B vaut :

$$p + F_0\,\mathrm{e}^{-rT}$$

où p désigne la valeur du put. Ainsi on a :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + F_0\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{18.1}$$

C'est le même type de relation que celle obtenue pour les options sur actions dans l'équation (11.6), excepté le prix de l'action S_0 qui est remplacé par le prix futures, actualisé au taux sans risque, $F_0\,\mathrm{e}^{-rT}$.

Lorsque l'échéance du contrat futures sous-jacent est la même que celle de l'option, les options européennes sur futures et spot sont identiques (voir section 18.3). L'équation (18.1) donne donc une relation entre la valeur d'un call spot, celle d'un put spot et celle d'un futures lorsque l'échéance des deux options correspond à celle du futures.

■ **Exemple 18.5** Le premium d'un call européen sur futures portant sur l'argent, de maturité six mois, est de 0,56 $ l'once, avec un prix d'exercice de 8,50 $. Le prix futures correspondant, pour une échéance à six mois, est actuellement de 8,00 $, et le taux d'intérêt sans risque à six mois est de 10 % par an. Si on utilise l'équation (18.1), la valeur du put européen de mêmes caractéristiques est alors de :

$$0{,}56 + 8{,}50\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 6/12} - 8{,}00\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 6/12} = 1{,}04$$

Nous pouvons utiliser l'équation (18.1) pour l'option spot car le futures en question a la même date d'échéance que l'option.

Pour les options américaines sur futures (voir problème 18.19), la relation de parité call-put est :

$$F_0\,\mathrm{e}^{-rT} - K < C - P < F_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT} \tag{18.2}$$

1. Cette analyse suppose qu'un contrat futures est comme un contrat forward et se règle globalement à l'échéance et non chaque jour de cotation.

18.5 Les bornes des options sur futures

À l'aide de la parité call-put exprimée par l'équation (18.1), on peut déterminer les bornes d'options européennes sur futures. La valeur d'un put, p, ne pouvant être négative, on peut déduire de l'équation que :

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} \geq F_0\,\mathrm{e}^{-rT}$$

soit :

$$c \geq \max\left((F_0 - K)\ \mathrm{e}^{-rT}; 0\right) \tag{18.3}$$

De façon similaire, la valeur d'un call ne pouvant être négative, on déduit de l'équation (18.1) que :

$$K\,\mathrm{e}^{-rT} \leq F_0\,\mathrm{e}^{-rT} + p$$

soit :

$$p \geq \max\left((K - F_0)\ \mathrm{e}^{-rT}; 0\right) \tag{18.4}$$

Ces limites sont comparables à celles que nous avons obtenues pour les options sur actions au chapitre 11. Les valeurs des options européennes sont très proches de leur borne inférieure quand les options sont fortement dans la monnaie. Afin d'en comprendre les raisons, reprenons la formule de parité de l'équation (18.1). Lorsqu'un call est fortement dans la monnaie, le put correspondant est fortement en dehors de la monnaie. Cela signifie que p, la valeur du put, tend vers 0. La différence entre c, la valeur du call, et sa borne inférieure est égale à p et, par conséquent, la valeur du call est très proche de sa borne inférieure. Le même raisonnement s'applique au put.

Comme il est possible d'exercer les options de type américain à n'importe quel moment, on doit avoir :

$$C \geq \max(F_0 - K; 0)$$

et :

$$P \geq \max(K - F_0; 0)$$

Ainsi, si les taux d'intérêt sont positifs, la borne inférieure de la valeur d'une option américaine est toujours supérieure à celle d'une option européenne. La raison tient à l'éventualité qu'une option sur futures de type américain soit exercée avant l'échéance.

18.6 Le taux de croissance des prix futures dans l'univers risque-neutre

Une règle générale permet d'analyser les options sur futures comme des options sur actions versant un dividende (voir section 17.3). Cette règle se déduit de la remarque selon laquelle un prix futures se comporte comme le prix d'une action versant un dividende dont le taux est égal au taux sans risque r (comparez l'équation (18.10) avec les équations (17.15) et (17.16)). Une autre justification réside dans la relation de parité call-put pour les options sur futures. En effet, elle est identique à celle qui est énoncée pour les options sur actions versant un taux de dividende q, lorsque le cours de l'action est remplacé par celui du futures et que le taux de dividende q est remplacé par r (comparez les équations (18.1) et (17.3)).

Pour prouver formellement ce résultat, nous calculons le taux de croissance (encore appelé *drift*) d'un prix futures dans un univers risque-neutre. Notons F_t le prix futures à l'instant t et supposons que les dates de règlement sont 0, Δt, $2\Delta t\ldots$ Si nous optons pour une position longue dans un contrat futures à la date 0, sa valeur est nulle. À la date Δt, il produit un payoff de $F_{\Delta t} - F_0$. Si r est le taux d'intérêt sans risque à très court terme (période Δt) à la date 0, l'évaluation risque-neutre donne la valeur du contrat à la date 0 telle que :

$$\mathrm{e}^{-r\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{E}}(F_{\Delta t} - F_0)$$

où $\hat{\boldsymbol{E}}$ représente l'opérateur d'espérance dans un univers risque-neutre. Nous devons donc avoir :

$$\mathrm{e}^{-r\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{E}}(F_{\Delta t} - F_0) = 0$$

montrant que :

$$\hat{\boldsymbol{E}}(F_{\Delta t}) = F_0$$

De même, $\hat{\boldsymbol{E}}(F_{2\Delta t}) = F_{\Delta t}$, $\hat{\boldsymbol{E}}(F_{3\Delta t}) = F_{2\Delta t}$, et ainsi de suite. En menant le raisonnement à son terme, on obtient :

$$\hat{\boldsymbol{E}}(F_T) = F_0$$

pour toute date T.

Le taux de croissance du prix futures dans un univers risque neutre est donc nul. L'équation (17.7) montre que le prix futures se comporte comme le prix d'une action versant un taux de dividende q égal à r. Ce résultat est très général. Il est vrai pour tous les prix futures et ne dépend pas d'hypothèses sur les taux d'intérêt ou sur les volatilités [2].

En conséquence, dans l'univers risque-neutre, la dynamique d'un prix futures F peut s'écrire :

$$dF = \sigma F\,dz \tag{18.5}$$

où σ est une constante.

L'EDP correspondante

Une autre façon de voir qu'un prix futures F se comporte, dans l'univers risque-neutre, comme le prix d'une action payant un taux de dividende égal au taux sans risque consiste à écrire l'EDP à laquelle obéit le prix d'un actif dérivé, noté f, dépendant de F. Elle s'écrit [3] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\,\sigma^2\,F^2 = rf \tag{18.6}$$

Cette équation est analogue à l'équation (17.6) en posant $q = r$. Cela confirme que, dans le cadre de l'évaluation des actifs dérivés, un prix futures peut bien être vu comme un prix d'action payant un taux de dividende r.

2. Nous verrons au chapitre 28 que la formulation précise de cette propriété s'écrit : « Un prix futures a un drift nul dans l'univers risque-neutre classique quand le numéraire est le compte d'épargne. Une martingale est notamment un processus stochastique dont le drift est nul. Un processus de prix forward est aussi une martingale, mais dans un univers risque-neutre où le numéraire est une obligation zéro-coupon d'échéance T. »

3. Voir la note technique 7 sur le site www.pearson.fr pour une démonstration.

18.7 Le modèle de Black pour évaluer les options sur futures

On peut évaluer les options européennes sur futures en étendant les résultats précédents. Fischer Black fut le premier à développer cette extension dans un article publié en 1976 [4]. L'hypothèse sous-jacente est que les prix futures sont régis par le processus (log-normal) de l'équation (18.5). Si on remplace S_0 par F_0 et q par r, les équations (17.4) et (17.5) donnent les valeurs d'un call européen, c, et d'un put européen, p, dont le sous-jacent est un contrat futures :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - K N(d_2)\right] \tag{18.7}$$

$$p = \mathrm{e}^{-rT}\left[K N(-d_1) - F_0 N(-d_2)\right] \tag{18.8}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(F_0/K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(F_0/K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

σ est la volatilité du prix futures et T le temps restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option (pas du futures). Quand le coût de portage et le coût d'opportunité (*convenience yield*) sont des fonctions du temps, on peut montrer que la volatilité du prix futures est la même que celle du sous-jacent.

■ **Exemple 18.6** Soit un put européen sur futures de pétrole brut ; l'échéance de l'option est à quatre mois, le prix futures actuel est de 60 $, le prix d'exercice est aussi de 60 $, le taux sans risque est de 9 % par an et la volatilité du prix futures est de 25 % par an. Dans ce cas, F_0 = 60, K = 60, r = 0,09, T = 4/12, σ = 0,25 et $\ln\left(F_0/K\right)$ = 0. Ainsi :

$$d_1 = \sigma\sqrt{T}\Big/2 = 0{,}07216, \quad d_2 = -\sigma\sqrt{T}\Big/2 = -0{,}07216$$

$$N(-d_1) = 0{,}4712, \quad N(-d_2) = 0{,}5288$$

et la valeur du put, p, est donnée par :

$$p = \mathrm{e}^{-0{,}09\times 4/12}\left(60 \times 0{,}5288 - 60 \times 0{,}4712\right) = 3{,}36$$

soit 3,36 $.

18.8 L'utilisation du modèle de Black au lieu de la formule de Black-Scholes-Merton

Les résultats de la section 18.3 montrent que les options sur futures et les options spot (portant directement sur le sous-jacent du futures) sont équivalentes lorsque l'option

4. Voir F. Black, "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of financial Economics*, 3, mars 1976, 167-179.

arrive à échéance en même temps que le contrat futures. Les équations (18.5) et (18.6) fournissent donc une façon de calculer la valeur d'options européennes portant sur le prix spot d'un actif.

Les opérateurs préfèrent généralement utiliser le modèle de Black plutôt que la formule de Black-Scholes-Merton pour évaluer des options européennes sur les sous-jacents qui peuvent être des actifs d'investissement ou de consommation et payer ou non des revenus intermédiaires à leurs détenteurs. On définit la variable F_0 dans les équations (18.7) et (18.8) comme étant le prix futures ou forward d'un contrat sur le sous-jacent considéré et dont l'échéance est la même que celle de l'option. Les équations (17.13) et (17.14) sont des exemples d'utilisation du modèle de Black pour évaluer des options européennes sur devise. Dans cet exemple, grâce au modèle de Black, il devient inutile d'estimer de façon explicite le taux d'intérêt sans risque de la devise. Un autre usage du modèle de Black concerne l'évaluation d'options européennes sur indice à l'aide du prix futures ou forward sur cet indice. Dans ce cas, on ne doit pas estimer explicitement non plus les dividendes payés par le portefeuille sous-jacent à l'indice.

■ **Exemple 18.7** Évaluation des options spot à l'aide de futures Considérons un call européen à six mois dont le sous-jacent est l'once d'or. Le prix d'exercice est de 1 200 $, le prix futures à six mois de l'once d'or est de 1 240 $, le taux d'intérêt sans risque annuel est de 5 % et la volatilité du prix futures est de 20 %.

L'option équivaut à une option à six mois dont le sous-jacent serait le contrat futures à six mois sur l'or. L'équation (18.7) permet de calculer la valeur de l'option :

$$\mathrm{e}^{-0,05\times 0,5}\left[1\,240N(d_1) - 1\,200N\left(d_2\right)\right]$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(1\,240/1\,200\right) + 0{,}2^2 \times 0{,}5/2}{0{,}2 \times \sqrt{0{,}5}} = 0{,}3026$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(1\,240/1\,200\right) - 0{,}2^2 \times 0{,}5/2}{0{,}2 \times \sqrt{0{,}5}} = 0{,}1611$$

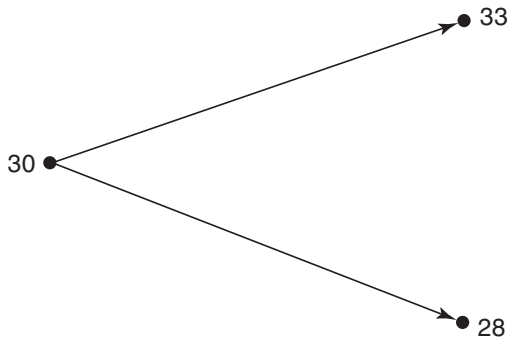
ce qui donne une valeur de 88,37 $.

18.9 L'évaluation des options sur futures par les arbres binomiaux

Cette section repose sur une approche par arbre binomial, identique à celle du chapitre 13, pour évaluer les options sur futures. La différence fondamentale entre les options sur futures et les options sur actions réside dans l'absence de décaissement liée à une prise de position sur un contrat futures.

Supposons que le prix futures soit de 30 aujourd'hui et qu'il puisse atteindre 33 ou 28 dans un mois. Considérons un call sur ce futures, d'échéance un mois avec un prix d'exercice de 29, et ignorons le marking to market quotidien. Le graphique 18.1 représente la situation. Si le prix futures monte à 33, le payoff de l'option sera égal à 4 et la

valeur du contrat futures sera de 3. Si le prix futures tombe à 28, le payoff de l'option sera nul et le contrat futures vaudra -2 [5].



Graphique 18.1 : Variations du cours du futures de l'exemple numérique

Pour établir une couverture contre le risque, considérons un portefeuille consistant en une position courte sur une option et une position longue sur Δ contrats futures. Si le prix futures atteint 33, la valeur du portefeuille sera égale à $3\,\Delta - 4$; s'il descend à 28, la valeur du portefeuille sera $-2\,\Delta$. Le portefeuille est sans risque lorsque ces deux valeurs sont identiques, c'est-à-dire lorsque :

$$3\,\Delta - 4 = -2\,\Delta$$

ce qui équivaut à Δ = 0,8.

Pour cette valeur de Δ, la valeur du portefeuille sera égale à $3 \times 0{,}8 - 4 = -1{,}6$ dans un mois. Avec un taux sans risque à 6 %, la valeur actuelle correspondante est alors :

$$-1{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 1/12} = -1{,}592$$

Le portefeuille consiste en une position courte sur une option et Δ contrats futures. Puisque la valeur du contrat futures est nulle, la valeur de l'option doit être, aujourd'hui, égale à 1,592.

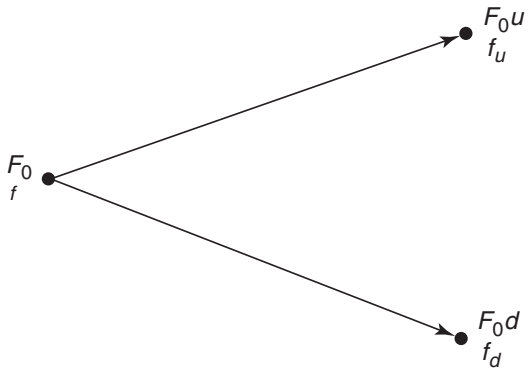
Généralisation

Cette analyse se généralise facilement en considérant un prix futures, égal à F_0 à la date 0 et susceptible de devenir $F_0 u$ ou $F_0 d$ à la date T. Considérons un produit dérivé engendrant un payoff égal à f_u si le prix futures augmente et à f_d s'il diminue. Le graphique 18.2 résume la situation.

Le portefeuille sans risque consiste en une position courte sur une option combinée avec une position longue sur Δ contrats futures avec :

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0\,u - F_0\,d}$$

5. Il s'agit ici d'une approximation puisque gains ou pertes ne sont pas réalisés à la date T. Ils sont en fait réalisés progressivement sur toute la période séparant 0 et T. Cependant, la qualité de l'approximation est d'autant meilleure que les sous-périodes sont courtes. À la limite, quand cette longueur tend vers 0, on obtient la valeur exacte.



Graphique 18.2 : Prix futures et cours de l'option dans le cas général

La valeur du portefeuille en T est toujours égale à :

$$(F_0 u - F_0)\,\Delta - f_u$$

Si on note r le taux sans risque, la valeur actuelle s'écrit :

$$[(F_0 u - F_0)\,\Delta - f_u]\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Cette valeur actuelle peut aussi s'écrire $-f$, où f est la valeur actuelle de l'option. Il s'ensuit que :

$$-f = [(F_0 u - F_0)\,\Delta - f_u]\,\mathrm{e}^{-rT}$$

En remplaçant Δ par sa valeur et en simplifiant l'expression obtenue, on aboutit à :

$$f = \mathrm{e}^{-rT}\,[p\,f_u + (1-p)\,f_d] \tag{18.9}$$

où :

$$p = \frac{1-d}{u-d} \tag{18.10}$$

Ces résultats concordent avec ceux de la section 13.9. L'équation (18.10) exprime la probabilité risque-neutre d'une hausse du prix futures.

Dans l'exemple numérique du graphique 18.1, u = 1,1, d = 0,9333, r = 0,06, T = 0,08333, f_u = 4 et f_d = 0. L'équation (18.10) permet d'écrire :

$$p = \frac{1 - 0{,}9333}{1{,}1 - 0{,}9333} = 0{,}4$$

et, grâce à l'équation (18.9), on obtient la valeur de l'actif dérivé :

$$f = \mathrm{e}^{-0{,}06\times 1/12}(0{,}4 \times 4 + 0{,}6 \times 0) = 1{,}592$$

qui concorde avec la réponse obtenue précédemment pour cet exemple.

Les arbres binomiaux multi-périodes

La méthode des arbres binomiaux multi-périodes est utilisée pour évaluer les options sur futures de type américain de la même façon que pour évaluer les options sur actions (voir section 13.9).

Le paramètre u qui définit les hausses du prix du futures est égal à $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, où σ est la volatilité du prix et Δt la durée d'une période sur l'arbre. La probabilité d'une hausse du prix futures est donnée par l'équation (18.10) :

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

L'exemple 13.3 illustre l'utilisation d'arbres binomiaux multi-périodes pour évaluer une option sur futures. L'exemple 21.3 du chapitre 21 en fournit une autre illustration.

18.10 Options américaines sur futures *versus* options américaines sur le sous-jacent

Le plus souvent, les options sur futures, cotées sur les marchés organisés, sont américaines. Si le taux sans risque, r, est positif, il existe toujours des circonstances dans lesquelles il sera optimal d'exercer prématurément une option américaine sur futures. Les options américaines sur futures valent donc davantage que leurs homologues européennes.

En général, une option américaine sur futures n'a pas la même valeur que l'option américaine spot correspondante, même lorsque le contrat futures et le contrat d'option ont la même échéance [6]. Supposons par exemple que le marché soit normal, c'est-à-dire que les prix futures sont régulièrement supérieurs aux cours au comptant avant l'échéance. C'est le cas pour la plupart des indices boursiers, pour l'or, l'argent, les devises aux taux d'intérêt bas et diverses matières premières. Un call américain sur futures doit valoir plus que le call américain spot correspondant. En effet, dans certaines situations, on exercera prématurément l'option sur futures et, dans ce cas, elle procurera un gain plus élevé à son détenteur. De même, un put américain sur futures doit valoir moins que l'option américaine spot correspondante.

En cas de marché inversé, avec des prix futures régulièrement inférieurs aux cours au comptant avant l'échéance, comme dans le cas des devises aux taux d'intérêt élevés et de certaines matières premières, l'inverse doit être vrai. Les calls américains sur futures doivent valoir moins que les calls américains spot correspondants, tandis que les puts américains sur futures doivent valoir plus que les puts américains spot correspondants.

Les différences entre options américaines sur futures et options américaines spot, telles qu'elles sont décrites ci-dessus, apparaissent aussi bien lorsque la date d'échéance du contrat futures est plus éloignée que celle du contrat d'option que lorsque les deux

6. On définit ici l'option spot « correspondante », par rapport à une option sur futures, comme celle qui aurait le même prix d'exercice et la même date d'échéance.

ont la même date d'expiration. En fait, plus la date d'échéance du contrat d'option est éloignée, plus la différence devient grande.

18.11 Les options de style futures

Les options de style futures sont des contrats à terme sur le payoff d'une option. Normalement, un trader qui achète (vend) une option, que ce soit sur le prix spot d'un actif ou sur son prix futures, paie (reçoit) l'argent d'avance. En revanche, le règlement des options de style futures duplique le système utilisé pour les contrats à terme (voir chapitre 2). Le contrat fait l'objet d'appels de marge quotidiens comme tout autre contrat à terme et le montant final qui sera réglé correspond au payoff de l'option. Tout comme un contrat à terme est un pari sur le prix futur d'un actif, une option de style futures est un pari sur le payoff de l'option [7]. Si les taux d'intérêt sont constants, le prix futures dans une option de style futures est le même que le prix forward d'un forward sur le payoff d'une option. Cela montre que le prix futures pour une option de style futures est le prix qui serait payé pour l'option si le règlement devait s'effectuer à terme échu. C'est donc la valeur d'une option standard capitalisée au taux sans risque.

Le modèle de Black dans les équations (18.7) et (18.8) donne le prix d'une option européenne standard portant sur un actif en termes de prix futures (ou forward) F_0 pour un contrat dont l'échéance correspond à celle de l'option. Le prix futures dans un call de style futures est donc :

$$F_0\, N(d_1) - K N(d_2)$$

et le prix futures dans un put de style futures est :

$$K N(-d_2) - F_0\, N(-d_1)$$

où d_1 et d_2 sont les variables définies dans les équations (18.7) et (18.8). Ces formules ne dépendent pas du niveau des taux d'intérêt. Elles sont exactes pour une option de style futures sur un contrat futures et pour une option de style futures sur la valeur spot d'un actif. Dans le premier cas, F_0 est le prix futures standard pour le contrat sous-jacent de l'option ; dans le second cas, c'est le prix futures standard pour un futures sur l'actif sous-jacent venant à échéance en même temps que l'option.

La relation de parité put-call pour une option de style futures est :

$$p + F_0 = c + K$$

Une option américaine de style futures peut être exercée par anticipation. Dans ce cas, le règlement du prix est immédiat et correspond alors à la valeur intrinsèque de l'option. Il s'avère qu'il n'est jamais optimal d'exercer une option américaine de style futures portant sur un contrat futures prématurément car le prix futures de l'option est toujours supérieur à sa valeur intrinsèque. Ce type d'option américaine de style futures peut donc être traité comme s'il s'agissait de l'option européenne de style futures lui correspondant.

7. Pour une présentation détaillée des options de style futures, voir D. Lieu, "Option Pricing with Futures-Style Margining", *Journal of Futures Markets*, 10 (4), 1990, 327-338. Pour une évaluation quand les taux sont stochastiques, voir R. R. Chen et L. Scott, "Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-Style Margining", *Journal of Futures Markets*, 13 (1), 1993, 15-22.

Résumé

On dénoue les options sur futures par la livraison du contrat futures sous-jacent en cas d'exercice. Lorsqu'on exerce un call, son détenteur prend une position longue sur le futures et reçoit un montant égal à la différence (forcément positive) entre le prix futures et le prix d'exercice. De même, lorsqu'on exerce un put, son détenteur prend une position courte sur le futures et reçoit un montant égal à la différence (forcément positive) entre le prix d'exercice et le prix futures. Le contrat futures qui est livré expire généralement peu de temps après l'option.

On peut assimiler la valeur d'un futures à celle d'une action qui verserait un taux de dividende égal au taux sans risque r. Par conséquent, les résultats obtenus au chapitre 17 pour les options sur actions payant un taux de dividende sont applicables aux options sur futures si l'on remplace le prix de l'action par le prix futures et le taux de dividende par le taux d'intérêt sans risque. Fischer Black a produit, en 1976, les premiers modèles d'évaluation d'options européennes sur futures. Ils supposent que le prix futures suit une loi log-normale à l'échéance de l'option.

Si les dates d'échéance de l'option et du futures coïncident, la valeur d'une option européenne sur futures est égale à celle de l'option européenne spot correspondante. Cependant, cela ne se vérifie pas pour les options américaines. Si le marché des futures est normal, un call américain sur futures vaudra plus que le call américain spot correspondant. Si le marché des futures est inversé, c'est le contraire.

Références complémentaires

Black F., "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, mars 1976, 167-179.

Problèmes et exercices

18.1 Expliquez les différences entre un call sur yen et un call sur futures dont le sous-jacent est le yen.

18.2 Pourquoi les options sur futures d'obligations sont-elles plus liquides que les options sur obligations ?

18.3 « On peut analyser un prix futures comme le prix d'une action versant un taux de dividende connu. » Que représente le taux de dividende dans le cas du contrat futures ?

18.4 Un prix futures est actuellement de 50. Dans six mois, il sera soit à 56, soit à 46. Le taux sans risque est de 6 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen à six mois et de prix d'exercice 50 ?

18.5 De quelle manière la formule de parité call-put d'une option sur futures diffère-t-elle de celle d'une option sur action sans dividende ?

18.6 Soit un call américain sur futures de même date d'échéance que le contrat futures sous-jacent. Dans quel cas l'option sur futures vaut-elle plus que l'option américaine spot correspondante ?

18.7 Calculez la valeur d'un put européen sur futures à cinq mois, de prix d'exercice 20 €, sachant que le prix futures vaut 19 €, que le taux sans risque est de 12 % par an et que la volatilité du prix futures est de 20 % par an.

18.8 Supposez que vous achetiez un put sur un futures sur l'or, échéance octobre, de prix d'exercice 1 200 $ l'once. Chaque contrat porte sur la livraison de 100 onces. Que se passe-t-il si vous exercez lorsque le prix futures est de 1 180 $?

18.9 Supposez que vous achetiez un call sur futures de bétail pour avril avec un prix d'exercice de 130 cents la livre. Chaque contrat porte sur la livraison de 40 000 livres. Que se passe-t-il si vous exercez lorsque le prix futures est de 135 cents ?

18.10 Considérons un call sur futures d'échéance deux mois et de prix d'exercice 40. Le taux sans risque est de 10 % par an. Le prix futures est de 47. Quelle est la limite inférieure de la valeur de l'option si elle est (a) européenne et (b) américaine ?

18.11 Considérons un put sur futures d'échéance quatre mois et de prix d'exercice égal à 50. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Le prix futures est de 47. Quelle est la limite inférieure de la valeur de l'option si elle est (a) européenne et (b) américaine ?

18.12 Un prix futures est actuellement de 60. On sait que, dans chacun des deux trimestres à venir, il peut augmenter ou baisser de 10 %. Le taux sans risque est de 8 % par an. Quelle est la valeur d'un call européen d'échéance six mois sur ce futures, si son prix d'exercice est de 60 ? Si le call est de type américain, peut-il être optimal de l'exercer prématurément ?

18.13 Dans l'exercice 18.12, quelle est la valeur d'un put européen d'échéance six mois sur le même futures si le prix d'exercice est de 60 également ? Si ce put est américain, pourra-t-on éventuellement l'exercer avant l'échéance ? Vérifiez que la valeur du call calculée dans l'exercice 18.12 et celle du put calculée ici satisfont bien à la relation de parité call-put.

18.14 Un prix futures est actuellement de 25, sa volatilité est de 30 % par an et le taux sans risque est de 10 % par an. Quelle est la valeur d'un call sur ce futures, d'échéance neuf mois et de prix d'exercice égal à 26 ?

18.15 Un prix futures est actuellement de 70, sa volatilité est de 20 % par an et le taux sans risque est de 6 % par an. Quelle est la valeur d'un put sur ce futures, d'échéance cinq mois et de prix d'exercice égal à 65 ?

18.16 Un prix futures est actuellement de 35. Un call et un put européens sur ce futures avec un prix d'exercice de 34 sont tous deux cotés 2 sur le marché. Le taux d'intérêt sans risque est de 10 % par an. Identifiez une opportunité d'arbitrage. Les options sont toutes deux d'échéance un an.

18.17 « La valeur d'un call européen à la monnaie portant sur un futures est toujours égale à celle d'un put européen de mêmes caractéristiques. » Expliquez pourquoi cette assertion est vraie.

18.18 Un prix futures est actuellement de 30. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an. Un call américain sur ce futures, d'échéance trois mois et de prix d'exercice 28, vaut 4. Calculez les limites de la valeur d'un put américain sur le même futures avec le même prix d'exercice et la même échéance.

18.19 Démontrez que si C représente la valeur d'un call américain portant sur un contrat futures de prix d'exercice K et de maturité T, et si P représente la valeur d'un put américain sur ce même contrat futures avec le même prix d'exercice et la même date d'échéance, alors :

$$F_0\,\mathrm{e}^{-rT} - K < C - P < F_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

où F_0 est le prix futures actuel et r le taux sans risque. On suppose que $r > 0$ et qu'il n'existe pas de différences entre les contrats forward et futures. (Indication : utilisez une approche analogue à celle du problème 17.12.)

18.20 Calculez le prix d'un call européen à trois mois sur la valeur spot de l'argent. Le prix futures à trois mois est de 12 €, le prix d'exercice de 13 €, le taux sans risque de 4 % et la volatilité du cours de l'argent de 25 %.

18.21 Une société sait que, dans trois mois, elle aura à investir 5 millions d'euros pour 90 jours au LIBOR, moins 50 points de base, et espère que le taux obtenu sera au moins égal à 6,5 %. Quelle position en options de taux devrait-elle prendre ?

Questions complémentaires

18.22 La valeur d'un futures est actuellement de 40. On sait que, dans trois mois, son cours sera de 35 ou de 45. Quelle est la valeur d'un call européen à 3 mois portant sur ce futures, si le prix d'exercice est égal à 42 et si le taux d'intérêt sans risque est de 7 % par an ?

18.23 Le prix futures d'un actif est actuellement de 78 et le taux sans risque de 3 %. Un put à 6 mois portant sur ces futures avec un prix d'exercice de 80 vaut actuellement 6,5. Quelle est la valeur d'un call sur ces mêmes futures avec un prix d'exercice et une échéance identique, si ces deux options sont de type européen ? Quelle est l'intervalle de valeurs possibles du call s'ils sont américains ?

18.24 Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer un put américain de futures lorsque le prix futures est de 50, l'échéance de l'option à 9 mois, son prix d'exercice de 50, le taux sans risque de 3 % et la volatilité de 25 %.

18.25 Nous sommes le 4 février. Les prix de call et de put sur futures de maïs échéance juillet sont donnés en fonction de leur prix d'exercice dans le tableau suivant :

Prix d'exercice	Prix du call	Prix du put
260	26,75	8,50
270	21,25	13,50
280	17,25	19,00
290	14,00	25,625
300	11,375	32,625

Les options sont à échéance le 19 juin. Le prix futures du maïs échéance juillet est de 278,25 et le taux d'intérêt sans risque est de 1,1 %. Calculez les volatilités implicites des options en utilisant DerivaGem. Commentez les résultats que vous obtenez.

18.26 Calculez la volatilité implicite des cours d'un futures de soja à partir des informations suivantes concernant un put européen sur futures de soja :

Prix futures aujourd'hui	525
Prix d'exercice	525
Taux sans risque	6 % par an
Durée avant l'échéance	5 mois
Valeur du put	20

18.27 Calculez le prix d'un put européen à six mois sur la valeur du S&P500. Le prix forward à six mois sur cet indice est de 1 400, le prix d'exercice de 1 450, le taux sans risque de 5 % et la volatilité de l'indice de 15 %.

18.28 Le prix d'exercice d'une option sur futures est de 550 cents, le taux d'intérêt sans risque est de 3 %, la volatilité du prix futures est de 20 %, et l'échéance de l'option est dans 9 mois. Le prix futures est de 500 cents.

a. Quel est le prix de l'option s'il s'agit d'un call européen ?

b. Quel est le prix de l'option s'il s'agit d'un put européen ?

c. Vérifiez la validité de la parité put-call.

d. Quel est le prix futures pour une option de style futures, si c'est un call ?

e. Quel est le prix futures pour une option de style futures, si c'est un put ?

Chapitre 19
Les lettres grecques

Une institution financière qui vend une option de gré à gré à un client est confrontée au problème de gestion de son risque. Si cette option se révèle identique à une autre option échangée sur un marché organisé, l'institution financière peut neutraliser son exposition au risque en achetant, sur le marché, la même option que celle qui est vendue au client. Mais lorsque l'option a été « taillée sur mesure » pour répondre à un besoin bien précis, elle ne correspond pas aux produits standard échangés en Bourse, et la couverture contre le risque devient bien plus compliquée.

Dans ce chapitre, nous examinons différentes approches de ce problème. Nous traitons ce qu'on appelle généralement « les grecques ». Chaque lettre grecque mesure une dimension différente du risque d'une position en options, et l'objectif du trader est de gérer les grecques de manière que les risques pris soient acceptables. L'analyse présentée dans ce chapitre est applicable par les market-makers sur les marchés organisés et par les traders des institutions financières.

Vers la fin de ce chapitre, à la section 19.13, nous présentons la création d'options synthétiques. Ce sujet recèle, en effet, une problématique proche de celle de la couverture. Créer une option synthétique équivaut à créer une position couvrant l'option symétrique. Par exemple, créer un call synthétique revient à construire une position permettant de couvrir la vente d'un call équivalent.

19.1 Exemple introductif

Dans les prochaines sections, nous utilisons comme exemple le cas d'une institution financière qui a vendu pour 300 000 € de calls européens sur 100 000 actions ne versant pas de dividendes. Le cours de l'action est de 49 €, le prix d'exercice de 50 €, le taux d'intérêt sans risque de 5 % par an, la volatilité de l'action de 20 % par an, l'échéance à 20 semaines (0,3846 année), et l'espérance de rentabilité de l'action de 13 % par an[1].

1. Comme nous l'avons expliqué aux chapitres 13 et 15, l'espérance de rentabilité n'est pas nécessaire à l'évaluation des options. Elle est donnée ici parce qu'elle peut influer sur l'efficacité du procédé de couverture.

Avec les notations habituelles, on a :

$$S_0 = 49 \; ; K = 50 \; ; r = 0{,}05 \; ; \sigma = 0{,}20 \; ; T = 0{,}3846 \; ; \mu = 0{,}13$$

L'option vaut, selon le modèle de Black-Scholes-Merton, 240 000 € (car la valeur d'une option permettant d'acquérir une action est de 2,40 €). L'institution financière a donc vendu l'option 60 000 € de plus que sa valeur théorique. Mais elle est confrontée au problème de gestion des risques [2].

19.2 Les positions nues et les positions couvertes

Une des stratégies possibles pour une institution financière est de ne rien faire. C'est ce qu'on appelle parfois adopter une position nue. C'est une stratégie qui fonctionne bien si le cours de l'action est en dessous de 50 € au bout des vingt semaines. L'option ne coûte finalement rien à l'institution financière et lui a rapporté 300 000 €. Mais une position nue est très risquée ; si l'option est exercée, l'institution financière devra acheter 100 000 actions au prix du marché dans vingt semaines, afin de respecter le contrat. Le coût est alors de 100 000 fois le montant duquel le cours de l'action dépasse le prix d'exercice. Par exemple, si au bout des vingt semaines, le cours de l'action s'établit à 60 €, le coût pour l'institution financière est de 1 000 000 €. C'est considérablement plus élevé que la prime de 300 000 € qu'elle a reçue à la vente du call [3].

Une stratégie alternative consiste à couvrir la position. Cela suppose d'acheter 100 000 actions au moment de la vente de l'option. Si l'option est exercée, cette stratégie fonctionne bien, mais dans le cas contraire, elle peut engendrer une perte significative. Par exemple, si le cours de l'action chute à 40 €, l'institution perd 900 000 € sur sa position en actions, somme bien plus élevée que les 300 000 € reçus en contrepartie de la vente du call.

Ni une position nue, ni une position couverte n'apportent une protection satisfaisante. Si les hypothèses sous-jacentes à la formule de Black-Scholes-Merton sont vérifiées, le coût pour l'institution financière sera toujours de 240 000 € en moyenne pour les deux approches [4]. Mais selon le cas, le coût peut se situer entre 0 et plus de 1 000 000 €. Une couverture parfaite devrait assurer un coût fixe toujours égal à 240 000 €. Pour une telle couverture, l'écart-type du coût de mise en place de l'option et de sa couverture est nul.

Une stratégie stop-loss

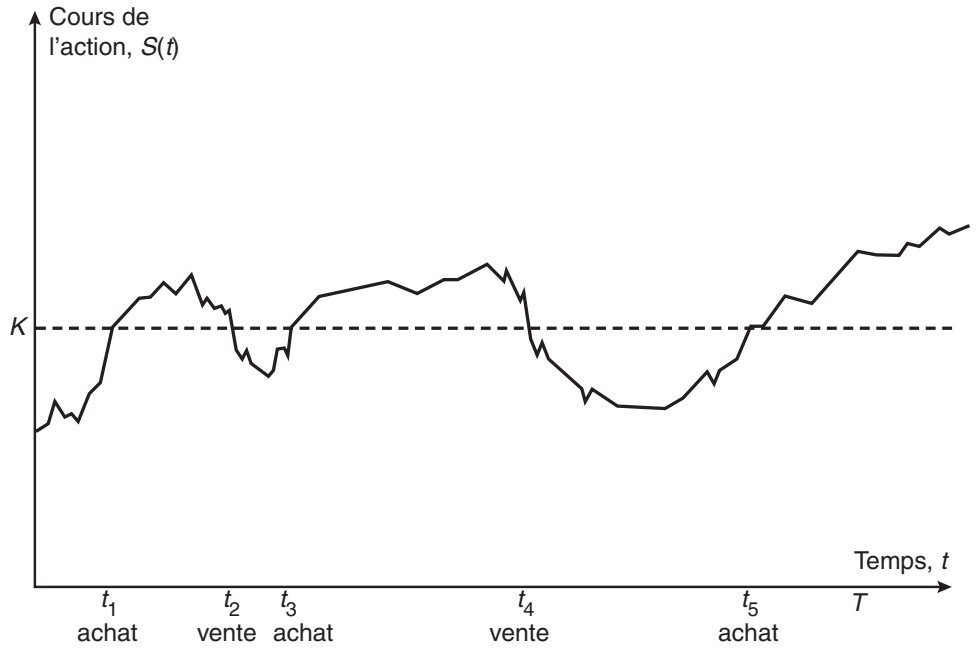
Un procédé de couverture intéressant parfois envisagé est appelé stratégie « stop-loss » (à seuil de déclenchement). Pour illustrer l'idée de base, considérons une institution qui

2. Une option sur une action ne payant pas de dividendes est un exemple simple pour exposer les idées principales, mais les méthodes s'appliquent à d'autres types d'options ou d'actifs dérivés.

3. La parité call-put montre que l'exposition provoquée par la vente d'un call couvert est la même que celle qui est due à la vente d'un put nu.

4. De manière plus précise, la valeur actuelle de l'espérance du coût sera de 240 000 € pour les deux approches, en supposant que le taux d'actualisation utilisé soit approprié et ajusté au risque.

a vendu un call de prix d'exercice K sur une action. La technique de couverture consiste à acheter l'action lorsque son cours dépasse le prix d'exercice K et à la vendre sitôt qu'il descend en dessous de K. L'idée est de détenir une position nue lorsque le cours de l'action est inférieur à K et d'être couvert lorsque le cours dépasse K. Le procédé est conçu de façon que, à la date T, l'institution financière possède bien l'action si l'option est dans la monnaie et qu'elle ne la possède pas si l'option est en dehors de la monnaie. La stratégie produit un revenu à l'échéance identique à celui que procure l'option à son détenteur. Dans le cas illustré par le graphique 19.1, cette stratégie implique d'acheter l'action en t_1, de la vendre en t_2, de l'acheter à nouveau en t_3, de la revendre en t_4, de la racheter en t_5, puis de la livrer en T.



Graphique 19.1 : Une stratégie à seuil de déclenchement

Le cours initial de l'action est noté S_0. Le coût initial de création de la couverture est S_0 si $S_0 > K$ et zéro sinon. Le coût total, Q, lié à la vente et à la couverture de l'option est égal à la valeur intrinsèque de l'option, soit :

$$Q = \max(S_0 - K; 0) \tag{19.1}$$

En fait, on suppose ici que tous les achats et ventes postérieurs à la date zéro sont réalisés au prix K. Si cette supposition était correcte, la couverture fonctionnerait parfaitement en l'absence de coûts de transaction. De plus, le coût de couverture de l'option serait toujours inférieur à la valeur de Black-Scholes-Merton. Ainsi, un investisseur pourrait générer des profits sans risque en vendant des options et en couvrant le risque.

L'équation (19.1) est incorrecte pour deux raisons essentielles. La première est que les flux de trésorerie engendrés par la couverture doivent être actualisés. La seconde est que les achats et les ventes ne se font pas exactement au prix K. Ce second point est crucial. Si nous supposons un univers risque-neutre avec des taux d'intérêt nuls, nous pouvons justifier d'ignorer la valeur temps de l'argent. Mais nous ne pouvons pas raisonnablement supposer qu'à la fois les achats et les ventes s'effectuent au même

cours. Si les marchés sont efficients, l'arbitragiste cherchant à couvrir le risque ne peut pas savoir si, au moment où le cours de l'action devient égal à K, il va évoluer au-dessus de K ou en dessous.

En pratique, les achats s'effectuent au prix $K+\varepsilon$ et les ventes au prix $K-\varepsilon$, pour de petites valeurs positives de ε. Ainsi, tout achat et toute vente ultérieurs impliquent un coût (en dehors des coûts de transaction) de 2ε. La réponse naturelle des arbitragistes est de surveiller plus attentivement les variations du cours de l'action, de manière à réduire la valeur de ε. En supposant que les cours des actions varient en continu, ε peut alors être arbitrairement réduit par une surveillance très minutieuse des cours. Mais, plus ε est réduit, plus les ordres d'achat et de vente vont se répéter fréquemment. Ainsi, bien que le coût par ordre soit réduit, il est compensé par l'augmentation de leur fréquence. Lorsque $\varepsilon \to 0$, l'espérance du nombre d'ordres tend vers l'infini [5].

Une stratégie à seuil de déclenchement, bien qu'attrayante au premier abord, n'est pas une technique de couverture efficace. Considérons son utilisation pour une option en dehors de la monnaie. Si le cours de l'action n'atteint jamais le prix d'exercice K, la couverture ne coûte rien. Si la trajectoire du cours passe plusieurs fois par le prix d'exercice, la technique devient bien plus onéreuse. Une simulation de Monte-Carlo peut être employée pour estimer la performance d'ensemble d'une stratégie de couverture à seuil de déclenchement. Elle nécessite des échantillons aléatoires de trajectoires de cours et une observation des résultats en utilisant la couverture en question. Le tableau 19.1 montre les résultats pour l'option considérée plus tôt.

Tableau 19.1 : Performance d'une stratégie à seuil de déclenchement (la mesure de performance est le ratio : écart-type du coût de vente et de protection de l'option sur valeur théorique de l'option)

Δt (semaines)	5	4	2	1	0,5	0,25
Performance de la couverture	0,98	0,93	0,83	0,79	0,77	0,76

On suppose que le cours de l'action est observé au bout d'un intervalle de temps de longueur Δt [6]. La mesure de performance de la couverture est le ratio : écart-type du coût de la protection de l'option sur valeur de l'option d'après la formule de Black-Scholes-Merton (le coût de la couverture a été calculé afin que les coûts cumulés excluent l'impact des intérêts et de l'actualisation). Chaque résultat est fondé sur un million de trajectoires de cours d'action. Un système de couverture efficace doit avoir une mesure de la performance de couverture proche de zéro. Dans le cas présent, elle reste au-dessus

5. Comme mentionné à la section 14.2, l'espérance du nombre de fois qu'un processus de Wiener passe par une valeur donnée, dans un intervalle de temps spécifié, est infinie.

6. Les règles précises de constitution de la couverture étaient les suivantes : si le cours de l'action passe d'inférieur à K à supérieur à K dans un intervalle de temps de longueur Δt, l'action est achetée à la fin de cet intervalle. S'il passe de supérieur à K à inférieur à K dans l'intervalle de temps, il est vendu à la fin de l'intervalle. Sinon, aucune action n'est réalisée.

de 0,7, indépendamment de la longueur de l'intervalle Δt. Cela souligne le fait que la stratégie de stop-loss n'est pas une bonne procédure de couverture.

19.3 Le calcul des lettres grecques

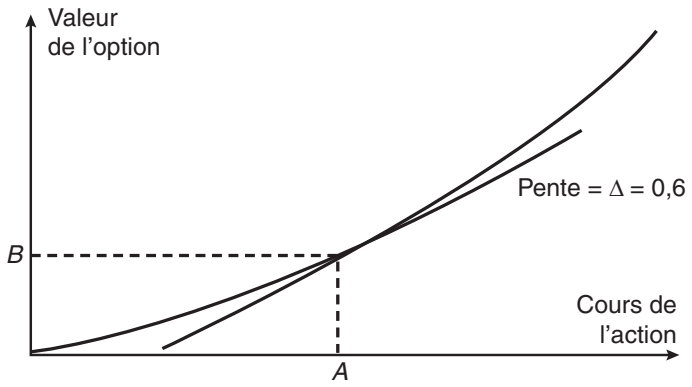
Une majorité de traders utilise des procédés de couverture bien plus sophistiqués que ceux mentionnés jusqu'ici. Ils nécessitent le calcul de mesures telles que le delta, le gamma et le vega. Ces mesures sont communément appelées lettres grecques. Elles quantifient différents aspects du risque dans une position en options. Ce chapitre examine les propriétés de certaines des lettres grecques les plus importantes. Pour calculer une lettre grecque, il faut utiliser un modèle de valorisation d'option. Les traders retiennent généralement le modèle de Black-Scholes-Merton (ou ses extensions présentées dans les chapitres 17 et 18) pour les options européennes et le modèle par arbre binomial (présenté au chapitre 13) pour les options américaines (ce dernier retient les mêmes hypothèses que le modèle de Black-Scholes-Merton). Lorsqu'ils calculent des lettres grecques, les traders emploient la volatilité implicite actuelle. Cette approche, qu'on appelle parfois « utilisation du modèle praticien de Black-Scholes », est intéressante. Lorsque la volatilité utilisée est la volatilité implicite, le modèle donne le prix de l'option à un moment particulier en tant que fonction exacte du prix de l'actif sous-jacent, de la volatilité implicite, des taux d'intérêt et (éventuellement) des dividendes. Le prix de l'option ne peut varier dans une courte période que si l'une de ces variables change. Un trader se sent naturellement confiant si les risques de variations de toutes ces variables ont été suffisamment couverts. Dans ce chapitre, nous considérons d'abord le calcul des lettres grecques pour une option européenne sur une action ne versant pas de dividendes. Nous présentons ensuite les résultats pour d'autres options européennes. Le chapitre 21 montrera comment les lettres grecques peuvent être calculées dans le cas d'options américaines.

19.4 La couverture par le delta

Le delta d'une option, noté Δ, a été introduit au chapitre 13. Il est défini comme le taux de variation de la valeur de l'option par rapport à celle du sous-jacent. C'est la pente de la courbe reliant la valeur de l'option à celle du sous-jacent. Supposons que le delta d'un call sur action soit 0,6. Cela signifie que, lorsque le cours de l'action varie d'un faible montant, la valeur de l'option varie de 0,6 fois ce montant. Le graphique 19.2 montre la relation entre la valeur du call et le cours de l'action sous-jacente. Lorsque le cours de l'action est au point A, la valeur de l'option est au point B, et Δ est la pente de la tangente indiquée dans le graphique. Plus généralement :

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

où c est la valeur du call et S le cours de l'action.



Graphique 19.2 : Calcul du delta

Supposons que, dans le graphique 19.2, le cours de l'action soit de 100 € et la valeur de l'option de 10 €. Imaginons un investisseur qui a vendu 20 calls portant sur 100 actions chacun ; il peut couvrir sa position en achetant $0{,}6 \times 2\,000 = 1\,200$ actions. Le gain (la perte) sur la position en options tend à être compensé(e) par la perte (le gain) sur la position en actions. Par exemple, si le cours de l'action augmente de 1 € (produisant un gain de 1 200 € grâce aux actions achetées), la valeur de l'option augmentera d'environ $0{,}6 \times 1$ € $= 0{,}60$ € (entraînant une perte de 1 200 € sur les options, puisque la valeur des 20 contrats d'options vendus pour 10 € $\times\, 100 \times 20 = 20\,000$ € passera à $10{,}60$ € $\times\, 100 \times 20 = 21\,200$ €). En revanche, si le cours de l'action baisse de 1 € (entraînant une perte de 1 200 € sur les actions détenues), la valeur de l'option diminuera de 0,60 € (produisant un gain de 1 200 € sur les options vendues).

Dans cet exemple, le delta de la position en options est $0{,}6 \times 2\,000 = -1\,200$. Autrement dit, l'investisseur perd 1 200 ΔS sur sa position de vendeur d'options lorsque le cours de l'action augmente de ΔS. Le delta de l'action est égal à 1,0 et la position longue sur 1 200 actions a un delta de $+1\,200$. Le delta global de l'investisseur est donc nul. Aussi, le delta de la position sur actions compense le delta de la position sur options. Une position dont le delta est nul est appelée position delta-neutre.

Il est important de comprendre que, puisque le delta varie, la position de l'investisseur demeure couverte en delta-neutre seulement dans un intervalle de temps relativement court. La couverture doit être réajustée périodiquement. Dans notre exemple, au bout de trois jours, le cours de l'action pourrait avoir augmenté jusqu'à 110 €. Comme on peut le voir sur le graphique 19.2, une augmentation du cours de l'action entraîne une augmentation de la pente de la droite tangente à la courbe en ce point, donc une augmentation du delta. Supposons que le delta passe d'une valeur de 0,60 à 0,65. Alors, $0{,}5 \times 2\,000 = 1\,000$ actions supplémentaires devront être achetées pour maintenir la couverture. La technique de couverture par le delta, décrite ci-dessus, est un exemple de *couverture dynamique*. Elle se différencie des techniques de *couverture statique*, dans lesquelles la couverture est définie dès le départ et n'est plus jamais ajustée. Ces méthodes sont parfois qualifiées de *hedge-and-forget* (couvrir et oublier).

Le delta est très étroitement lié à l'analyse de Black-Scholes-Merton. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 15, Black, Scholes et Merton ont montré qu'il était possible d'établir un portefeuille sans risque consistant en une position sur l'action et une

position sur l'option. Exprimé en termes de Δ, le portefeuille de Black-Scholes-Merton est constitué par :

- la vente d'une option ;
- l'achat de Δ actions.

Pour employer la terminologie établie précédemment : on peut évaluer les options en établissant une position delta-neutre et en montrant qu'une telle position doit être rémunérée au taux sans risque.

Le delta d'une option européenne sur action

Pour un call européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, on peut montrer (voir exercice 15.17) que :

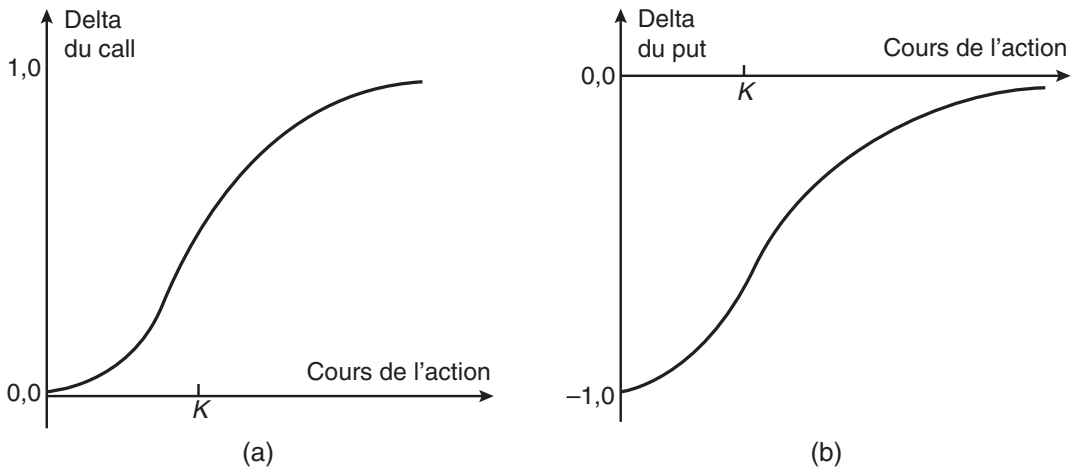
$$\Delta\,(\text{call}) = N(d_1)$$

où d est défini dans l'équation (15.20). Constituer une couverture delta-neutre pour une position courte sur un call européen implique de conserver une position longue sur $N(d_1)$ actions à tout instant. De façon analogue, la couverture en delta pour un achat de call européen implique de maintenir une position courte de $N(d_1)$ actions à tout instant.

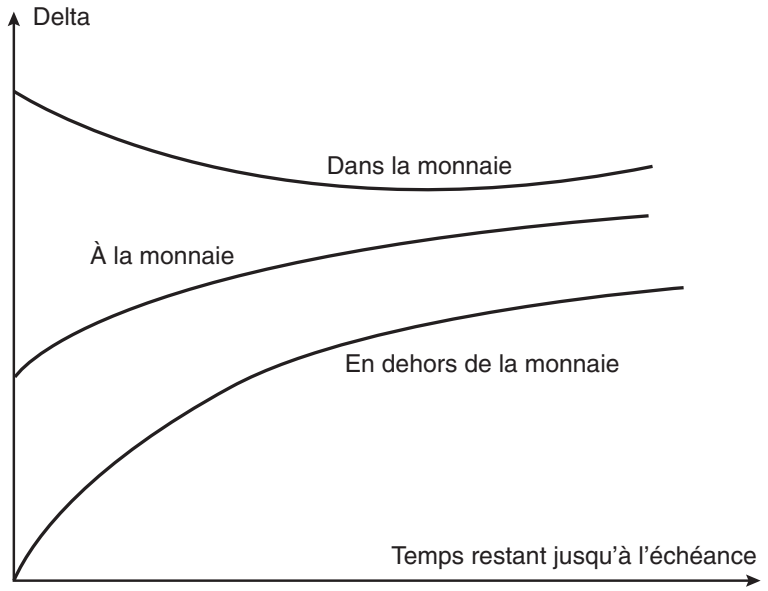
Pour un put européen portant sur une action ne versant pas de dividendes, le delta est égal à :

$$\Delta\,(put) = N(d_1) - 1$$

Le delta est négatif, une position longue sur un put doit donc être couverte par une position longue sur l'action sous-jacente. À l'inverse, une vente de put doit être couverte par une position courte sur $1 - N(d_1)$ actions. Le graphique 19.3 montre les variations du delta d'un call et d'un put en fonction du cours de l'action. Le graphique 19.4 montre les variations du delta en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance pour des calls dans la monnaie, à la monnaie et en dehors de la monnaie.



Graphique 19.3 : Variation du delta en fonction du cours de l'action : (a) option d'achat ; (b) option de vente, sur une action ne versant pas de dividendes



Graphique 19.4 : Variation du delta en fonction du temps restant à courir jusqu'à l'échéance pour un call

■ **Exemple 19.1** Considérons à nouveau le call sur une action ne versant pas de dividende de la section 19.1, avec un cours de l'action à 49 €, un prix d'exercice de 50 €, un taux sans risque de 5 %, une échéance à 20 semaines (0,3846 ans) et une volatilité de 20 %. Dans ce cas :

$$d_1 = \frac{\ln(49/50) + (0{,}05 + 0{,}2^2/2) \times 0{,}3846}{0{,}2 \times \sqrt{0{,}3846}} = 0{,}0542$$

Le delta est égal à $N(d_1)$, soit 0,522. Quand le cours de l'action varie de ΔS, le cours de l'option varie de $0{,}522\Delta S$.

Les aspects dynamiques de la couverture par le delta

Les tableaux 19.2. et 19.3 présentent deux exemples d'opérations de couverture par le delta pour le cas traité à la section 19.1, dans le cas où 100 000 calls sont vendus. La couverture est censée être ajustée chaque semaine. La valeur initiale du delta peut être calculée à partir des données de la section 19.1 et est égale à 0,522. Dès que l'option est vendue, 2 557 800 € doivent être empruntés pour acheter les 52 200 actions au cours de 49 € l'unité. Le taux d'intérêt est de 5 %. Un coût de 2 500 € est donc encouru la première semaine au titre des intérêts de l'emprunt.

Dans le tableau 19.2, le cours de l'action tombe à la fin de la première semaine à 48,12 €. Le delta baisse alors à 0,458, et 6 400 actions sont vendues pour maintenir la couverture. Cette stratégie engendre 308 000 € de liquidités, et l'emprunt (en intégrant les intérêts à la fin de la première semaine) est réduit d'autant pour atteindre un niveau de 2 252 300 €. Au cours de la deuxième semaine, le cours de l'action descend à 47,37 €, le delta baisse de nouveau, et ainsi de suite. Vers la fin de la vie de l'option, à la semaine 20, il devient évident que l'option sera exercée et le delta approche de la valeur 1,0. À la semaine 20, la position est donc entièrement couverte. Le vendeur de l'option recevra 5 000 000 €

en échange de la livraison de ses actions, conformément au contrat d'option, et le coût total de couverture de ses vingt contrats d'options d'achat se montera à 263 300 €.

Tableau 19.2 : Simulation de couverture par le delta (l'option est souvent dans la monnaie ; le coût de la couverture se monte à 263 300 €)

Sem.	Cours de l'action	Delta de l'action	Actions achetées	Coûts des actions achetées (en K€)	Coûts cumulés dont les int. (en K€)	Coûts des intérêts (en K€)
0	49,00	0,522	52 200	2 557,8	2 557,8	2,5
1	48,12	0,458	−6 400	−308,0	2 252,3	2,2
2	47,37	0,400	−5 800	−274,7	1 979,8	1,9
3	50,25	0,596	19 600	984,9	2 966,6	2,9
4	51,75	0,693	9 700	502,0	3 471,5	3,3
5	53,12	0,774	8 100	430,3	3 905,1	3,8
6	53,00	0,771	−300	−15,9	3 893,0	3,7
7	51,87	0,706	−6 500	−337,2	3 559,5	3,4
8	51,38	0,674	−3 200	−164,4	3 398,5	3,3
9	53,00	0,787	11 300	598,9	4 000,7	3,8
10	49,88	0,550	−23 700	−1 182,2	2 822,3	2,7
11	48,50	0,413	−13 700	−664,4	2 160,6	2,1
12	49,88	0,542	12 900	643,5	2 806,2	2,7
13	50,37	0,591	4 900	246,8	3 055,7	2,9
14	52,13	0,768	17 700	922,7	3 981,3	3,8
15	51,88	0,759	−900	−46,7	3 938,4	3,8
16	52,87	0,865	10 600	560,4	4 502,6	4,3
17	54,87	0,978	11 300	620,0	5 126,9	4,9
18	54,62	0,990	1 200	65,5	5 197,3	5,0
19	55,87	1,000	1 000	55,9	5 258,2	5,1
20	57,25	1,000	0	0,0	5 263,3	

Le tableau 19.3 illustre une séquence alternative d'événements tels que l'option arrive à maturité en dehors de la monnaie. Comme il devient évident que l'option ne sera pas exercée, la valeur du delta approche de zéro. À la semaine 20, l'émetteur a une position nue et le coût cumulé est alors de 256 600 €.

Dans les tableaux 19.2 et 19.3, les coûts de couverture de l'option, lorsqu'on les actualise en début de période, sont proches, mais pas exactement identiques à l'évaluation de Black-Scholes-Merton de 240 000 €. Si le procédé de couverture fonctionnait parfaitement, le coût de cette protection serait, après actualisation, exactement égal à celui de Black-Scholes-Merton, quelle que soit la trajectoire du cours de l'action. La raison de l'écart dans le coût de couverture par le delta est liée au rythme hebdomadaire d'ajustement de la protection. Si l'ajustement est plus fréquent, l'écart s'en trouve réduit. Bien évidemment, les exemples des tableaux 19.2 et 19.3 sont idéalisés, dans la mesure où la volatilité est supposée constante et qu'il n'y a pas de coûts de transaction.

Tableau 19.3 : Simulation de couverture par le delta (l'option est souvent en dehors de la monnaie ; le coût de la couverture se monte à 256 600 €)

Sem.	Cours de l'action	Delta de l'action	Actions achetées	Coûts des actions achetées (en K€)	Coûts cumulés dont les int. (en K€)	Coûts des intérêts (en K€)
0	49,00	0,522	52 200	2 557,8	2 557,8	2,5
1	49,75	0,568	4 600	228,9	2 789,2	2,7
2	52,00	0,705	13 700	712,4	3 504,3	3,4
3	50,00	0,579	−12 600	−630,0	2 877,7	2,8
4	48,38	0,459	−12 000	−580,6	2 299,9	2,2
5	48,25	0,443	−1 600	−77,2	2 224,9	2,1
6	48,75	0,475	3 200	156,0	2 383,0	2,3
7	49,63	0,540	6 500	322,6	2 707,9	2,6
8	48,25	0,420	−12 000	−579,0	2 131,5	2,1
9	48,25	0,410	−1 000	−48,2	2 085,4	2,0
10	51,12	0,658	24 800	1 267,8	3 355,2	3,2
11	51,50	0,692	3 400	175,1	3 533,5	3,4
12	49,88	0,542	−15 000	−748,2	2 788,7	2,7
13	49,88	0,538	−400	−20,0	2 771,4	2,7
14	48,75	0,400	−13 800	−672,7	2 101,4	2,0
15	47,50	0,236	−16 400	−779,0	1 324,4	1,3
16	48,00	0,261	2 500	120,0	1 445,7	1,4
17	46,25	0,062	−19 900	−920,4	526,7	0,5
18	48,13	0,183	12 100	582,4	1 109,6	1,1
19	46,63	0,007	−17 600	−820,7	290,0	0,3
20	48,12	0,000	−700	−33,7	256,6	

Le tableau 19.4 donne quelques statistiques sur la performance de la couverture delta-neutre obtenue à partir d'un million de simulations de trajectoires de cours.

Tableau 19.4 : Performance de la couverture delta-neutre (la performance est mesurée par le ratio : écart-type du coût de création et de couverture de l'option sur valeur théorique de l'option)

Durée entre deux rééquilibrages de couverture (en semaines)	5	4	2	1	0,5	0,25
Performance mesurée	0,42	0,38	0,28	0,21	0,16	0,13

Comme dans le tableau 19.1, la mesure de performance est le ratio de l'écart-type du coût de la couverture de l'option sur le prix théorique de l'option. La couverture delta-neutre est nettement plus performante qu'une stratégie à seuils de déclenchement. À la différence de cette dernière, la performance de la stratégie de couverture par le delta s'améliore avec la fréquence des réajustements.

Le but de la couverture en delta est de maintenir une valeur de position pour l'institution financière aussi proche que possible de la valeur initiale. Au départ, la valeur de l'option vendue est de 240 000 €. Dans la situation dépeinte dans le tableau 19.2, la valeur de l'option peut être estimée à 414 500 € à la semaine 9. Ainsi, l'institution financière a perdu 174 500 € sur sa position en options. Sa position monétaire en semaine 9, mesurée par le coût cumulé des actions et des intérêts, est supérieure de 1 442 900 € à celle de la semaine 0. La valeur des actions détenues est passée de 2 557 800 € à 4 171 100 € (= 78 700 × 53 €). Le résultat net est une variation de seulement 4 100 € durant la période de neuf semaines.

D'où proviennent les coûts ?

Le procédé de couverture en delta des tableaux 19.2 et 19.3 crée en fait une position longue synthétique en option. Celle-ci neutralise la position courte résultant de l'option vendue. Cette technique suppose généralement de vendre les actions juste après que leur cours a baissé et de les acheter juste après une hausse. Le coût de 240 000 € provient de la moyenne des différences entre le prix payé pour les actions et le montant obtenu lors de leur vente.

Le delta d'un portefeuille

Le delta d'un portefeuille d'options ou d'autres produits dérivés qui dépendent d'un seul actif de valeur S est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

où Π représente la valeur du portefeuille.

Le delta du portefeuille peut être calculé à partir des deltas de chacune des options du portefeuille prises individuellement, du fait de la linéarité du passage aux dérivées partielles. Si un portefeuille est constitué d'une quantité ω_i d'une option i ($1 \leq i \leq n$), le delta du portefeuille est obtenu par :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i$$

où Δ_i représente le delta de l'option i. La formule peut être utilisée pour calculer la position dans l'actif sous-jacent ou dans un contrat futures sur l'actif sous-jacent nécessaire à la constitution d'une couverture par le delta. Lorsque cette position a été établie, le delta du portefeuille est nul (position delta-neutre).

Supposons qu'une institution financière française ait les trois positions suivantes dans des options sur le dollar australien :

1. Une position longue dans 100 000 calls de prix d'exercice 0,55 (euro par dollar australien) et d'échéance à 3 mois. Le delta de chaque option est de 0,533 ;
2. Une position courte dans 200 000 calls de prix d'exercice 0,56 et d'échéance à 5 mois. Le delta de chaque option est de 0,468 ;
3. Une position courte dans 50 000 puts de prix d'exercice 0,56 et d'échéance à 2 mois. Le delta de chaque option est de $-0{,}508$.

Le delta de l'ensemble du portefeuille est égal à :

$$100\,000 \times 0{,}533 - 200\,000 \times 0{,}468 - 50\,000 \times (-0{,}508) = -14\,900$$

Cela signifie que le portefeuille peut être rendu delta-neutre avec une position longue de 14 900 dollars australiens.

Un contrat forward à 6 mois pourrait également être utilisé pour établir une position delta-neutre dans cet exemple. Supposons que le taux d'intérêt sans risque soit de 8 % par an en Australie et de 5 % en France ($r = 0{,}05$ et $r_f = 0{,}08$). Le delta d'un contrat forward d'échéance T portant sur un dollar australien est $\mathrm{e}^{-r_f T}$, soit $\mathrm{e}^{-0{,}08\times 0{,}5}$= 0,9608. La position longue dans des contrats forward sur un dollar australien pour établir un portefeuille delta-neutre est donc de $14\,900/0{,}9608 = 15\,508$.

Une autre solution consiste à utiliser un contrat futures à 6 mois. Grâce à l'équation (17.4), on peut calculer que la position longue dans des contrats futures, sur un dollar australien, pour établir une position delta-neutre, porte sur :

$$14\,900\,\mathrm{e}^{-(0{,}05-0{,}08)\times 0{,}5} = 15\,125$$

Les coûts de transaction

Maintenir une position delta-neutre dans une seule option et un actif sous-jacent de la façon qui vient d'être décrite est susceptible de devenir prohibitif en raison des coûts engendrés par les transactions (la différence entre les prix bid et ask). Constituer une position de couverture en delta-neutre est plus facile si le portefeuille d'options est important. Un seul échange de titres est nécessaire pour remettre à zéro la position delta de l'ensemble du portefeuille. Les coûts de transaction liés à la couverture sont alors compensés par les résultats obtenus sur les différents échanges.

19.5 Le thêta

Le thêta d'un portefeuille d'options, Θ, se définit comme le taux de variation de la valeur du portefeuille par rapport à la durée de vie de l'option, toutes choses égales par ailleurs. Pour un call européen sur une action ne versant pas de dividendes, on le déduit de la formule de Black-Scholes-Merton (voir exercice 15.17) en considérant la dérivée du prix de l'option par rapport au temps. On obtient :

$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0\, N'(d_1)\,\sigma}{2\sqrt{T}} - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$$

où d_1 et d_2 sont définis par l'équation (15.20) et :

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \tag{19.2}$$

Pour un put européen sur action, on obtient :

$$\Theta(\text{put}) = -\frac{S_0\, N'(d_1)\,\sigma}{2\sqrt{T}} + rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2)$$

Comme $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$, le thêta d'un put dépasse celui du call de mêmes caractéristiques de $rK\,\mathrm{e}^{-rT}$.

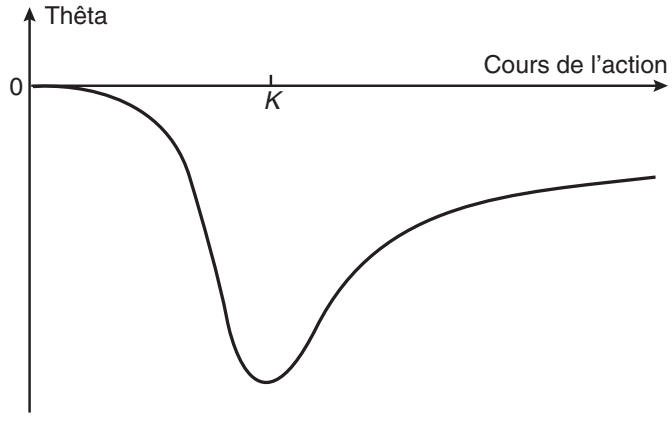
Dans ces formules, le temps est mesuré en années. Généralement, le thêta est présenté avec le jour comme unité de temps, de sorte qu'il soit égal à la variation de valeur du portefeuille quand une journée s'est écoulée et qu'aucun autre paramètre n'a été modifié. Nous pouvons alors mesurer le thêta en « jours calendaires » ou en « jours de cotation ». Pour obtenir le thêta en jours calendaires, les formules doivent être divisées par 365. Pour obtenir le thêta en jours de cotation, elles doivent être divisées par 252. (Le logiciel DerivaGem mesure le thêta en jours calendaires.)

■ **Exemple 19.2** Considérons, comme dans l'exemple 19.1, un call sur une action sans versement de dividendes de prix d'exercice 49 et d'échéance 20 semaines. L'action cote 49 €, le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an et la volatilité de l'action de 20 % par an. Dans ce cas, S_0 = 49 ; K = 50 ; r = 0,05 ; $\sigma = 0{,}20$ et $T = 0{,}3846$. Le thêta de l'option est donc :

$$-\frac{S_0\,N'(d_1)\,\sigma}{2\sqrt{T}} - r\,K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2) = -4{,}31$$

Le thêta est de $-4{,}31/365 = -0{,}0118$ par jour calendaire ou $-4{,}31/252 = -0{,}0171$ par jour de cotation.

Le thêta d'une option est généralement négatif[7] car la valeur de l'option diminue lorsqu'on se rapproche de l'échéance. La variation du thêta en fonction du cours de l'action, pour un call, est illustrée dans le graphique 19.5.

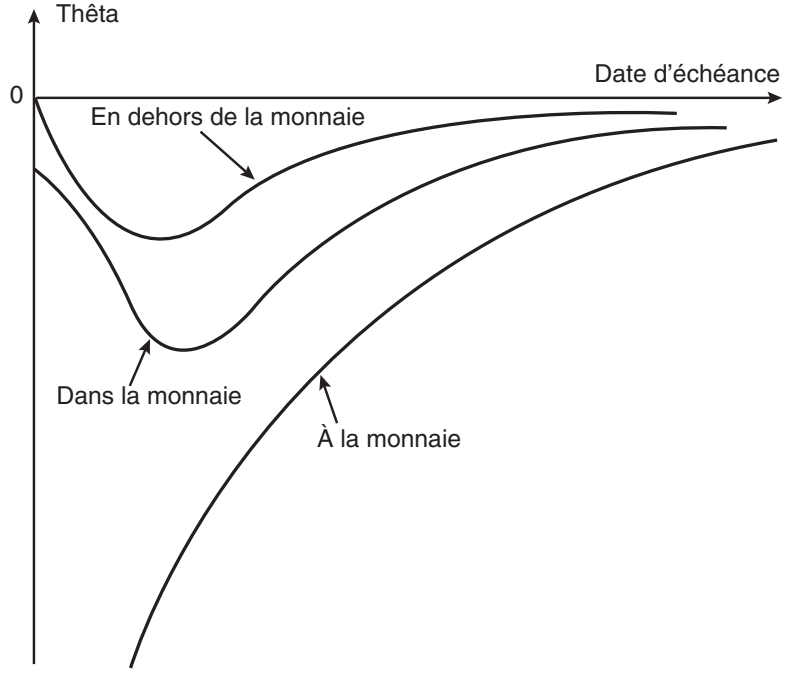


Graphique 19.5 : Variation du thêta d'un call européen en fonction du cours de l'action

Lorsque le cours de l'action est très bas, le thêta est presque nul. Si l'option est à la monnaie, le thêta est important et négatif. Plus le cours de l'action augmente, plus le thêta tend vers $-rK\,\mathrm{e}^{-rT}$ Le graphique 19.6 montre les variations de thêta en fonction

7. Il peut y avoir une exception pour un put européen dans la monnaie sur une action ne versant pas de dividendes ou pour un call européen dans la monnaie et portant sur une devise au taux d'intérêt très élevé.

du temps restant jusqu'à la maturité de l'option, pour des calls dans la monnaie, à la monnaie ou en dehors de la monnaie.



Graphique 19.6 : Schémas classiques de la variation du thêta d'un call européen en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance

La nature de thêta, en tant que paramètre de couverture, est différente de celle du delta. En effet, s'il y a une incertitude quant à la valeur future de l'action, il n'y en a pas sur le fait que le temps passe. Il est normal de vouloir se couvrir contre les variations imprévues du cours de l'actif sous-jacent, mais cela n'a aucun sens de vouloir se couvrir contre l'effet du temps qui passe dans un portefeuille d'options. Malgré cela, de nombreux traders considèrent le thêta comme une statistique descriptive très pratique pour un portefeuille. Cela s'explique par le fait que, comme nous le verrons ultérieurement, dans un portefeuille en delta-neutre, le thêta peut être considéré comme un substitut du gamma.

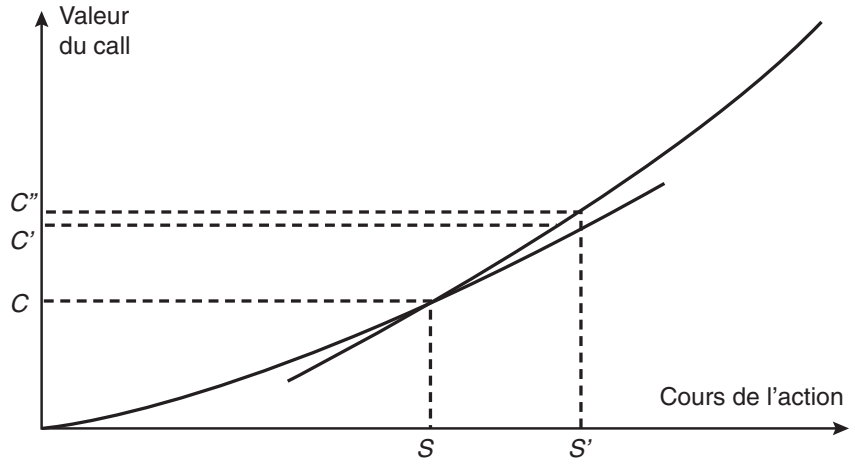
19.6 Le gamma

Le gamma d'un portefeuille d'options, noté Γ, est le taux de variation du delta du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent. C'est la dérivée seconde de la valeur du portefeuille par rapport au cours de l'actif :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

Si le gamma est faible, le delta varie lentement, et il n'est pas nécessaire d'ajuster fréquemment le portefeuille pour maintenir la position delta-neutre. En revanche, si le gamma est important en valeur absolue, le delta est très sensible aux variations du cours de l'actif sous-jacent. Il est alors risqué de laisser un portefeuille delta-neutre inchangé trop longtemps. Le graphique 19.7 illustre ce point. Lorsque le cours de l'action

varie de S à S', la couverture par le delta suppose que la valeur de l'option varie de C à C'. La différence entre C' et C'' constitue l'écart de couverture. Cet écart dépend de la courbure de la relation liant la valeur de l'option au cours de l'action. Le gamma mesure cette courbure.



Graphique 19.7 : Écart de couverture dû au gamma

Supposons que S représente la variation du cours de l'actif sous-jacent durant un petit intervalle de temps de longueur Δt, et que $\Delta\Pi$ soit la variation de valeur du portefeuille considéré. Si les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, l'annexe de ce chapitre montre que, pour un portefeuille delta-neutre, nous avons :

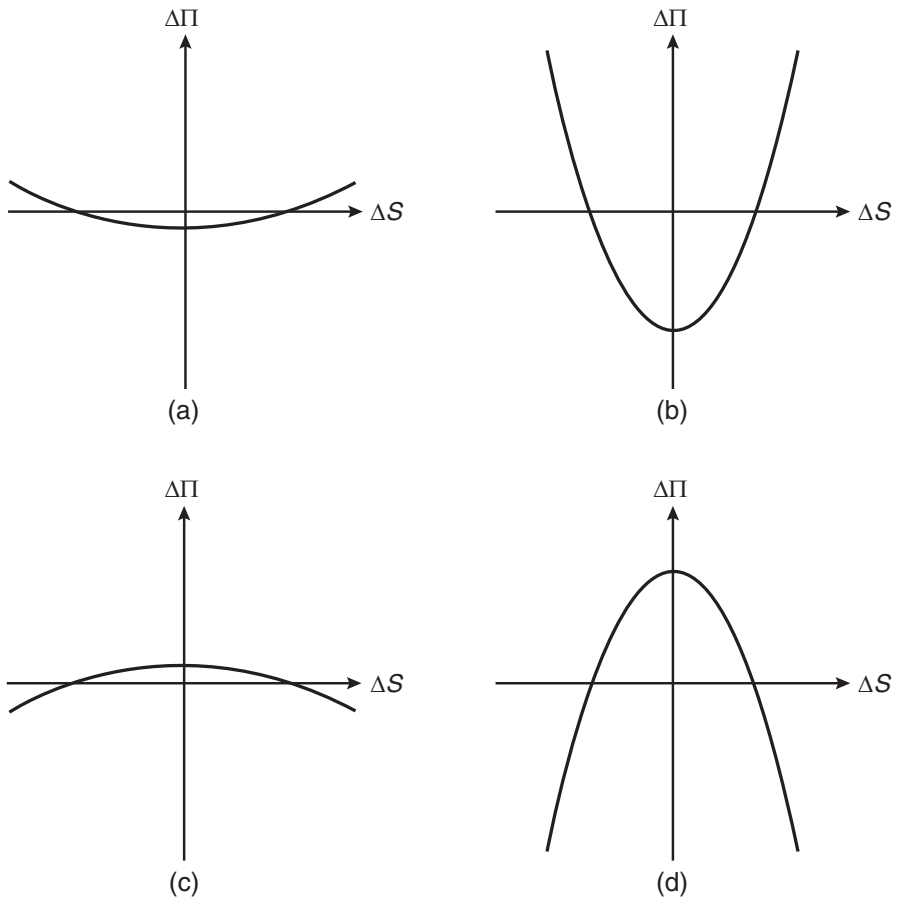
$$\Delta\Pi = \Theta\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\Gamma\,\Delta S^2 \tag{19.3}$$

où Θ représente le thêta du portefeuille. Le graphique 19.8 montre la nature des relations entre $\Delta\Pi$ et ΔS. Lorsque le gamma est positif, le thêta tend à être négatif. La valeur du portefeuille baisse s'il n'y a aucune variation de S, mais augmente s'il y a une importante variation, positive ou négative, de S. Lorsque le gamma est négatif, le thêta tend à être positif. La valeur du portefeuille augmente alors s'il n'y a aucune variation de S, mais baisse si S subit une variation importante, en positif ou en négatif. Plus la valeur absolue du gamma augmente, plus la sensibilité de la valeur du portefeuille augmente.

■ **Exemple 19.3** Supposons que le gamma d'un portefeuille d'options delta-neutre soit de $-10\,000$. L'équation (19.3) montre que si le cours de l'actif sous-jacent subit une variation de $+2$ ou -2 sur une courte période de temps, la valeur du portefeuille varie d'environ $0{,}5 \times 10\,000 \times 2^2 = 20\,000$ €.

Établir un portefeuille gamma-neutre

Une position dans l'actif sous-jacent même ou une position dans un contrat forward sur cet actif ont toutes deux un gamma nul et ne peuvent pas être utilisées pour modifier le gamma d'un portefeuille. Il est nécessaire de prendre une position dans un instrument tel qu'une option qui n'est pas liée linéairement à l'actif sous-jacent.



Graphique 19.8 : Relations entre et pour un portefeuille delta-neutre avec : (a) un gamma faiblement positif, (b) un gamma fortement positif, (c) un gamma faiblement négatif et (d) un gamma fortement négatif

Supposons qu'un portefeuille delta-neutre ait un gamma égal à Γ et qu'une option négociable ait un gamma égal à Γ_T. Si le nombre d'options ajoutées au portefeuille est ω_T, le gamma du portefeuille est alors égal à :

$$\omega_T \Gamma_T + \Gamma$$

Ainsi, la position en options, nécessaire pour établir un portefeuille gamma-neutre, est $-\Gamma/\Gamma_T$. Ajouter une option négociable risque également de modifier le delta du portefeuille et nécessite donc de changer la position dans l'actif sous-jacent pour maintenir la neutralité du delta. Notez que le portefeuille est en gamma-neutre seulement sur une courte période de temps. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la neutralité du gamma ne peut être maintenue que si la position dans l'option négociable est ajustée de manière à être toujours égale à $-\Gamma/\Gamma_T$.

Rendre gamma-neutre un portefeuille déjà delta-neutre peut être considéré comme une première correction du fait que la position dans l'actif sous-jacent ne peut pas être modifiée continuellement. La neutralité du delta permet une protection contre une modeste variation du cours de l'actif, entre deux ajustements. La neutralité du gamma permet une protection contre des variations du cours de l'actif d'amplitude plus importante, entre deux dates d'ajustement de la couverture. Supposons qu'un portefeuille soit delta-neutre et qu'il ait un gamma de $-3\,000$. Le delta et le gamma d'une option d'achat

donnée sont respectivement de 0,62 et 1,50. Le portefeuille peut être établi en gamma-neutre en lui ajoutant une position longue de $\frac{3\,000}{1,5} = 2\,000$.

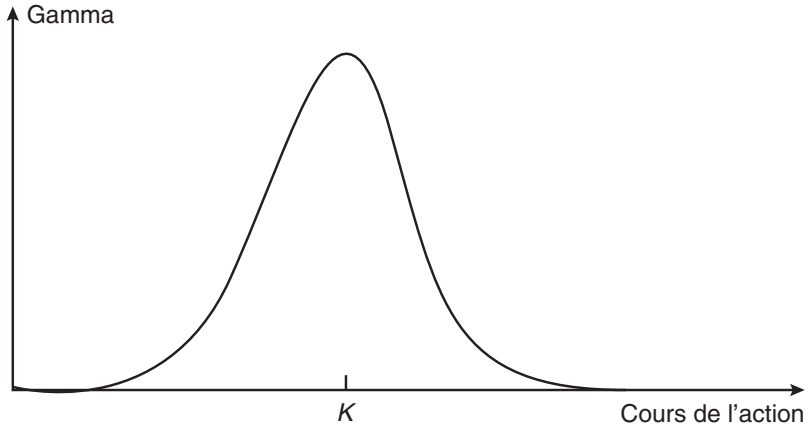
Néanmoins, le delta du portefeuille sera modifié de zéro à $2\,000 \times 0{,}62 = 1\,240$. Une quantité de l'actif sous-jacent représentant 1 240 doit alors être vendue pour conserver au portefeuille son caractère delta-neutre.

Le calcul du gamma

Pour un call ou un put européens portant sur une action ne versant aucun dividende, le gamma s'écrit :

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\,\sigma\,\sqrt{T}}$$

où d est défini par l'équation (15.20) et $N'(x)$ par l'équation (19.2). Le gamma est toujours positif et varie avec S de la façon illustrée dans le graphique 19.9. La variation du gamma en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance pour des options en dehors de la monnaie, à la monnaie et dans la monnaie est indiquée dans le graphique 19.10. Pour une option à la monnaie, le gamma augmente quand la durée de vie de l'option diminue. Ainsi, les options à la monnaie ayant une durée de vie très courte ont des gamma très élevés, elles sont donc très sensibles aux variations brutales du cours de l'action.

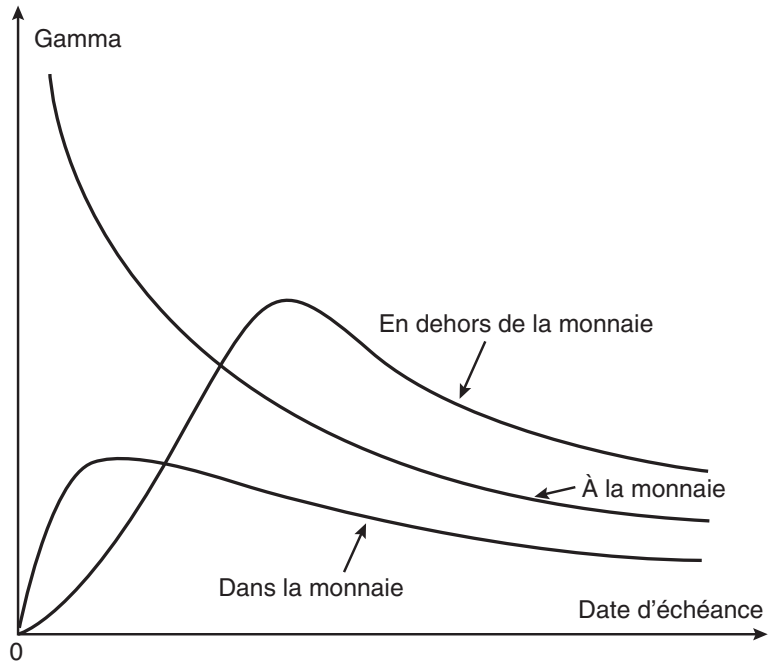


Graphique 19.9 : Variation du gamma d'une option en fonction du cours de l'action

■ **Exemple 19.4** Considérons, comme dans l'exemple 19.1, un call sur une action sans versement de dividendes de prix d'exercice 50 € et d'échéance 20 semaines. L'action cote 49 €, le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an et la volatilité de 20 % par an. Dans ce cas, S_0 = 49 ; K = 50 ; r = 0,05 ; σ = 0,20 et T = 0,3846. Le gamma est donc égal à :

$$\frac{N'(d_1)}{S_0\,\sigma\,\sqrt{T}} = 0{,}066$$

Pour une variation du prix de l'action ΔS, la valeur du delta change de $0{,}066 \times \Delta S$.



Graphique 19.10 : Variation du gamma d'une option sur action en fonction du temps restant jusqu'à l'échéance

19.7 Les relations entre le delta, le thêta et le gamma

La valeur d'un produit dérivé sur une action ne versant aucun dividende doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles (15.16). Il s'ensuit que la valeur d'un portefeuille de tels produits dérivés satisfait également l'équation :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + r\,S\,\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\,\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\,\Pi$$

Puisque :

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\Theta + r\,S\,\Delta + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\Gamma = r\,\Pi \tag{19.4}$$

Des résultats semblables peuvent être établis pour d'autres actifs sous-jacents (voir l'exercice 19.19).

Pour un portefeuille delta-neutre, $\Delta = 0$ et :

$$\Theta + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\,\Gamma = r\,\Pi$$

Cela montre bien que, quand Θ est important et positif, le gamma tend à être important et négatif, et *vice versa*. Cela correspond bien à ce que montre le graphique 19.8 et explique pourquoi le thêta peut être considéré comme un substitut du gamma pour un portefeuille delta-neutre.

19.8 Le vega

Jusqu'à présent, nous avons implicitement supposé que la volatilité de l'actif sous-jacent d'un produit dérivé était constante. En pratique, les volatilités varient au fil du temps. Cela signifie que la valeur d'un produit dérivé est susceptible de changer simplement à cause des variations de la volatilité, au même titre que lorsque le cours de l'actif varie ou que le temps s'écoule.

Le vega d'un portefeuille de produits dérivés, ν, représente le taux de variation de la valeur du portefeuille en fonction de la volatilité de l'actif sous-jacent [8] :

$$\nu = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

Si la valeur absolue du vega est importante, la valeur du portefeuille est très sensible au moindre changement de volatilité. Si le vega est faible, en valeur absolue, un changement de la volatilité n'aura qu'un léger impact sur la valeur du portefeuille.

Une position dans un actif sous-jacent présente un vega nul. Cependant, le vega d'un portefeuille peut être modifié en ajoutant une position en options. Si ν est le vega du portefeuille et ν_T le vega d'une option donnée, une position de $-\nu/\nu_T$ dans cette option rend le portefeuille vega-neutre. Malheureusement, un portefeuille qui est gamma-neutre ne sera généralement pas vega-neutre, et *vice versa*. Si un arbitragiste a besoin d'un portefeuille qui soit à la fois gamma-neutre et vega-neutre, au moins deux produits dérivés sur le même sous-jacent sont nécessaires.

■ **Exemple 19.5** Soit un portefeuille delta-neutre, avec un gamma de $-5\,000$ et un vega de $-8\,000$. Une option négociable a un gamma de 0,5, un vega de 2,0 et un delta de 0,6. Le portefeuille peut être établi en vega-neutre en incluant une position longue dans $4\,000$ options négociables. Cela augmenterait le delta de $2\,400$ et nécessiterait la vente de $2\,400$ unités d'actif sous-jacent pour maintenir la neutralité du delta. Le gamma du portefeuille passerait de $-5\,000$ à $-3\,000$.

	Delta	Gamma	Vega
Portefeuille	0	–5 000	–8 000
Option 1	0,6	0,5	2,0
Option 2	0,5	0,8	1,2

Pour que le portefeuille soit gamma-neutre et vega-neutre à la fois, nous supposons qu'il y a une seconde option négociable, avec un gamma de 0,8, un vega de 1,2 et un delta de 0,5. Si ω_1 et ω_2 sont les quantités respectives des deux options négociables incluses dans le portefeuille, il est nécessaire que :

$$-5\,000 + 0{,}5\,\omega_1 + 0{,}8\,\omega_2 = 0 \quad \text{et} \quad -8\,000 + 2{,}0\,\omega_1 + 1{,}2\,\omega_2 = 0$$

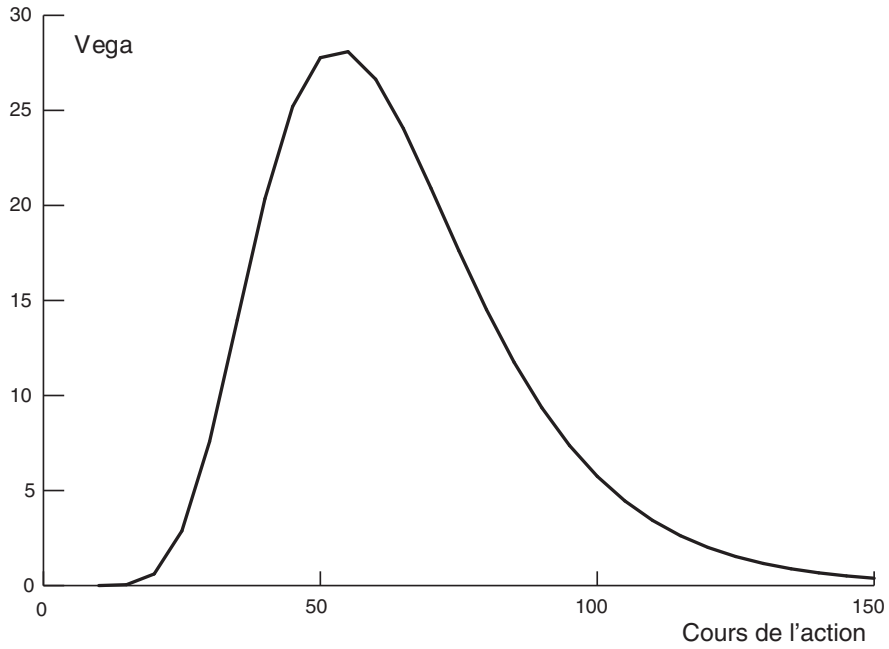
8. Vega est le nom donné à l'une des « grecques » de l'évaluation des options, bien que ce ne soit pas une lettre de l'alphabet grec.

La solution de ces équations est $\omega_1 = 400$ et $\omega_2 = 6\,000$. Le portefeuille peut donc être établi en gamma-neutre et en vega-neutre en ajoutant 400 des premières options négociables et 6 000 des secondes. Le delta du portefeuille, après cet ajout de positions dans ces deux options, est alors de $400 \times 0{,}6 + 6\,000 \times 0{,}5 = 3\,240$, c'est-à-dire 3 240 unités d'actif sous-jacent qui devront être vendues pour maintenir la neutralité du delta.

Pour un call ou un put européens portant sur une action ne versant aucun dividende, le vega est obtenu par :

$$\nu = S_0\sqrt{T}N'(d_1)$$

où d est défini dans l'équation (15.20) et dans l'équation (19.2). Le vega d'une option classique, qu'elle soit européenne ou américaine, est toujours positif. La variation du vega en fonction de S est illustrée dans le graphique 19.11.



Graphique 19.11 : Variation du vega d'une option en fonction du cours de l'action

■ **Exemple 19.6** Considérons, comme dans l'exemple 19.1, un call sur une action sans versement de dividendes de prix d'exercice 50 € et d'échéance 20 semaines. L'action cote 49 €, le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an et la volatilité 20 % par an. Dans ce cas, $S_0 = 49$; $K = 50$; $r = 0{,}05$; $\sigma = 0{,}20$ et $T = 0{,}3846$. Le vega de l'option est donc égal à :

$$S_0\sqrt{T}N'(d_1) = 12{,}1$$

Ainsi, 1 % (0,01) d'augmentation de volatilité (qui passe de 20 % à 21 %) induit une augmentation de valeur de l'option d'environ $0{,}01 \times 12{,}1 = 0{,}121$.

Calculer le vega à partir du modèle de Black-Scholes-Merton et de ses extensions peut paraître étrange car l'une des hypothèses de ce modèle est une volatilité constante. Il serait théoriquement plus juste de calculer le vega à partir d'un modèle dans lequel la volatilité est supposée stochastique. Cependant, il apparaît que le vega calculé à partir d'un modèle à volatilité stochastique est très proche de celui calculé d'après Black-Scholes-Merton. Ainsi, la pratique consistant à calculer le vega à partir d'un modèle dans lequel la volatilité est constante est moins dommageable que ce qui est attendu d'un point de vue théorique [9].

Une position gamma-neutre protège contre d'importantes variations du cours de l'actif sous-jacent entre deux réajustements de couverture. Une position vega-neutre protège contre les variations de la volatilité. Comme on aurait pu s'y attendre, le choix de la meilleure option pour établir une couverture en delta ou en gamma dépend du délai entre deux ajustements de la position et de la variabilité de la volatilité [10].

Quand les volatilités changent, les volatilités implicites des options courtes ont tendance à réagir plus que celles des options longues. Le vega d'un portefeuille est alors calculé en modifiant dans une moindre mesure les volatilités des options longues. Une façon de traiter ce problème est exposée à la section 23.6.

19.9 Le rhô

Le rhô d'un portefeuille d'options est le taux de variation de la valeur du portefeuille en fonction du taux d'intérêt :

$$\text{rhô} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

Il mesure la sensibilité de la valeur du portefeuille d'options à une variation du taux d'intérêt, toutes choses égales par ailleurs. Pour un call européen sur une action ne versant pas de dividendes, on a :

$$\text{rhô (call)} = K\,T\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$$

où d_2 est défini dans l'équation (15.20). Pour un put européen sur le même type d'actif :

$$\text{rhô (put)} = -K\,T\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2)$$

■ **Exemple 19.7** Considérons, comme dans l'exemple 19.1, un call sur une action sans versement de dividendes de prix d'exercice 50 € et d'échéance 20 semaines. L'action cote 49 €, le taux d'intérêt sans risque est de 5 % par an et la volatilité de 20 % par an. Dans ce cas, S_0 = 49 ; K = 50 ; r = 0,05 ; σ = 0,20 et T = 0,3846. Le rhô de l'option est égal à :

$$K\,T\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2) = 8{,}91$$

9. Voir J. C. Hull et A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, juin 1987, 281-300 ; J. C. Hull et A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility", *Advances in Futures and Options Research*, 3, 1988, 27-61.

10. Pour approfondir ce sujet, voir J. C. Hull et A. White, "Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options", *Journal of International Money and Finance*, 6, juin 1987, 131-152.

Autrement dit, pour une variation de 1 % (0,01) du taux d'intérêt sans risque (qui passe donc de 5 % à 6 %), la valeur de l'option augmente de 0,01 × 8,91 = 0,0891.

Encadré 19.1 La couverture dynamique en pratique

La configuration typique utilisée par les institutions financières consiste à donner à un trader ou à un groupe de traders la responsabilité du portefeuille d'actifs dérivés portant sur un sous-jacent donné. Par exemple, un trader de Goldman Sachs peut s'occuper de tous les actifs dérivés dont le support est une devise particulière. Un système informatique calcule les valeurs de positions et les coefficients de gestion (les grecques) du portefeuille. Les limites sont définies pour chaque coefficient et un trader qui veut les dépasser doit en obtenir l'autorisation. La limite en delta est souvent définie comme la valeur maximale équivalente exprimée en unités de sous-jacent. Par exemple, la limite en delta chez Goldman Sachs sur les dérivés de Microsoft est de 1 million de dollars US. Si Microsoft cote 50 $, la valeur absolue de delta ne peut excéder 20 000.

Les traders vont souvent chercher une position delta-neutre, ou dont le delta est proche de 0, à la fin de chaque journée. Les gamma et vega sont aussi gérés, mais pas sur une base journalière. Sur de nombreux marchés, les institutions financières réalisent la majorité de leurs transactions en vendant des calls ou des puts à leurs clients. Les calls et les puts vendus ont des gamma et des vega négatifs. Il s'ensuit que, au fur et à mesure que le temps s'écoule, le gamma et le vega du portefeuille détenu par ces institutions tendent à devenir de plus en plus négatifs.

Les traders employés par ces institutions sont donc toujours à la recherche de moyens pour acheter des options (pour acquérir un gamma et un vega positifs) à des prix compétitifs. Ce problème est cependant atténué par le fait que les options sont souvent proches de la monnaie lorsqu'elles sont initialement vendues sur le marché. Elles ont donc des gamma et des vega relativement élevés. Mais, lorsque le temps passe, elles peuvent devenir en dehors de la monnaie ou dans la monnaie. Dans de tels cas, leurs gamma et leurs vega deviennent petits et portent peu à conséquence.

19.10 Les réalités de la couverture

Dans un monde idéal, les traders travaillant pour les institutions financières seraient capables de réajuster leurs portefeuilles très fréquemment, dans le but de maintenir un delta-neutre, un gamma-neutre, un vega-neutre, et ainsi de suite. En pratique, cela n'est pas réalisable. Lorsqu'ils gèrent un important portefeuille dépendant d'un seul actif sous-jacent, les traders maintiennent le delta-neutre au moins une fois par jour en échangeant l'actif sous-jacent. Malheureusement, un gamma-neutre et un vega-neutre

sont moins faciles à maintenir, en raison de la difficulté à trouver des options ou autres produits dérivés non linéaires, dans les volumes requis et ce, à des prix compétitifs (voir l'encadré 19.1 pour une discussion sur la pratique de la couverture dynamique).

Il y a d'importantes économies d'échelle à réaliser en traitant des options. Comme nous le notions précédemment, maintenir une position delta-neutre quotidiennement pour une option individuelle sur le CAC 40, par exemple, aurait un coût prohibitif car les coûts de transaction par option couverte sont élevés [11]. Mais quand un opérateur en dérivés maintient la neutralité delta pour un large portefeuille d'options sur un actif, les coûts de transaction par option couverte sont beaucoup plus raisonnables.

19.11 L'analyse de scénario

Au-delà de la surveillance des risques tels que les delta, gamma et vega, les traders d'options procèdent souvent à une analyse de scénario. Celle-ci suppose de calculer le gain ou la perte des portefeuilles sur une période spécifiée avec une variété de scénarios. La période d'étude choisie dépend en général de la liquidité des instruments. Les scénarios peuvent être soit sélectionnés par la direction de la société, soit engendrés par un modèle.

Considérons une banque avec un portefeuille d'options sur une devise étrangère. La valeur du portefeuille dépend essentiellement de deux variables, le taux de change et la volatilité de celui-ci. Supposons que le taux de change soit actuellement de 1,0000 et que sa volatilité soit de 10 % par an. La banque peut constituer un tableau tel que le tableau 19.5, qui montre les gains et les pertes susceptibles de survenir durant une période de deux semaines sous différents scénarios. Ce tableau comporte sept taux de change différents et trois niveaux de volatilité. Puisque la variation d'un écart-type du taux de change durant la période de deux semaines est de 0,02, les variations du taux de change considérées ici sont d'environ un, deux et trois écarts-types.

Tableau 19.5 : Gains ou pertes réalisés en deux semaines dans différents scénarios(en millions d'euros)

	Taux de change						
Volatilité	**0,94**	**0,96**	**0,98**	**1,00**	**1,02**	**1,04**	**1,06**
8 %	+102	+55	+25	+6	−10	−34	−80
10 %	+80	+40	+17	+2	−14	−38	−85
12 %	+60	+25	+9	−2	−18	−42	−90

11. Les coûts de transaction résultent du fait que, chaque jour, l'opérateur achète une partie des actifs sous-jacents au prix ask ou vend une partie de l'actif sous-jacent au prix bid.

Dans le tableau 19.5, la perte la plus importante se situe dans le coin en bas à droite. Cette perte correspond à une hausse de la volatilité à 12 %, mais aussi du taux de change jusqu'à 1,06. Généralement, les plus grandes pertes, dans un tableau comme celui-là, se situent dans les coins, mais ce n'est pas toujours le cas. Considérons, par exemple, la situation du portefeuille d'une banque qui consiste en un ***butterfly*** (voir section 12.3). La perte la plus importante sera subie si le taux de change reste au même niveau.

19.12 L'extension des formules

Les formules que nous avons présentées jusqu'ici pour les grecques s'appliquent aux options portant sur une action ne versant pas de dividendes. Le tableau 19.6 récapitule les modifications quand l'action sous-jacente verse des dividendes au taux q. Les équations (17.4) et (17.5) donnent les expressions pour d_1 et d_2. Avec q égal au taux de versement de dividendes de l'indice, ces formules donnent la valeur des grecques pour des options européennes sur indices. Avec q égal au taux sans risque étranger, ces formules donnent la valeur des grecques pour des options européennes sur devises. Avec $q = r$, ces formules donnent la valeur des grecques pour des options européennes sur contrats futures. Les rhô des calls et puts sur futures sont respectivement égaux à $-cT$ et $-pT$.

Tableau 19.6 : Grecques pour des options sur un actif versant des revenus au taux q

Lettre grecque	Call	Put
Delta	$\mathrm{e}^{-qT}\,N(d_1)$	$\mathrm{e}^{-qT}\,[N(d_1)-1]$
Gamma	$\dfrac{N'(d_1)\,\mathrm{e}^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$	$\dfrac{N'(d_1)\,\mathrm{e}^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$
Thêta	$-S_0\,N'(d_1)\,\sigma\,\mathrm{e}^{-qT}\,/(2\sqrt{T})$ $+qS_0\,N(d_1)\,\mathrm{e}^{-qT}$ $-rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$	$-S_0\,N'(d_1)\,\sigma\,\mathrm{e}^{-qT}\,/(2\sqrt{T})$ $-qS_0\,N(-d_1)\,\mathrm{e}^{-qT}$ $+rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2)$
Vega	$S_0\sqrt{T}N'(d_1)\,\mathrm{e}^{-qT}$	$S_0\sqrt{T}N'(d_1)\,\mathrm{e}^{-qT}$
Rhô	$KT\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$	$-KT\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2)$

Dans le cas d'options sur devises, deux rhô correspondent aux deux taux d'intérêt. Les formules présentées dans le tableau 19.6 (avec d_2 tiré de l'équation (17.11)) donnent le rhô correspondant au taux d'intérêt domestique.

Le rhô correspondant au taux étranger pour un call européen sur une devise est :

$$\text{rhô (call, taux étranger)} = -T\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,S_0\,N(d_1)$$

et pour un put européen :

$$\text{rhô (put, taux étranger)} = T\,\mathrm{e}^{-r_f T}\,S_0 N(-d_1)$$

où d_1 est donné par l'équation (17.11).

Le calcul des grecques pour les options de type américain est présenté au chapitre 21.

Le delta des contrats forward

On peut appliquer le concept de delta à des instruments financiers autres que les options. Considérons un contrat forward portant sur une action ne versant pas de dividendes. L'équation (5.5) montre que la valeur d'un contrat forward est $S_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}$, où K est le prix de livraison et T la durée jusqu'à maturité du contrat forward. Lorsque le cours de l'action change de ΔS, toutes choses égales par ailleurs, la valeur du contrat forward varie également de ΔS. Le delta d'un contrat forward portant sur une seule action est donc toujours égal à 1,0. Autrement dit, une position courte sur un contrat forward peut être couverte par l'achat d'une action. À l'inverse, une position longue sur un contrat forward peut être couverte par la vente à découvert d'une action [12].

Pour un actif versant un revenu ou un dividende de taux q, l'équation (5.7) montre que le delta du contrat forward est égal à e^{-qT}. Pour le delta d'un forward sur indice, q est égal au taux de dividende de l'indice dans cette expression. Pour le delta d'un forward de change, il est égal au taux sans risque étranger, r_f.

Le delta des contrats futures

L'équation (5.1) indique que le prix futures d'un contrat portant sur des actions ne versant pas de dividendes est égal à $S_0\,\mathrm{e}^{rT}$, où T est le temps restant à courir jusqu'à la maturité du contrat. On voit ainsi que, lorsque le cours de l'action varie de ΔS, toutes choses égales par ailleurs, le prix futures varie de $\Delta S e^{rT}$. Puisque les contrats futures sont cotés sur le marché quotidiennement, le détenteur d'une position longue sur un contrat futures réalise immédiatement un gain égal à ce montant. Le delta d'un futures est donc égal à e^{rT}. Pour un contrat futures portant sur un actif qui verse un dividende de taux q, l'équation (5.3) montre, de manière semblable, que le delta est égal à $\mathrm{e}^{(r-q)\,T}$.

Notez que les delta des futures et des forward sont légèrement différents du simple fait que les uns sont cotés sur un marché organisé et les autres sur un marché OTC. Cela se vérifie même quand les taux d'intérêt sont constants et que les prix forward et futures sont identiques (cet aspect a été présenté dans l'encadré 5.2).

Parfois, on utilise un contrat futures pour obtenir une position delta-neutre.

12. Ce sont des procédés de couverture dits *hedge-and-forget*. Puisque le delta est toujours égal à 1,0, aucun changement de position dans l'action n'est nécessaire durant la vie du contrat.

Notons :

T : la maturité des contrats futures ;

H_A : la position sur l'actif sous-jacent nécessaire pour une couverture delta-neutre ;

H_F : la position alternative à prendre sur un contrat futures sur le même sous-jacent pour une couverture delta-neutre.

Si l'actif sous-jacent est une action qui ne verse pas de dividendes, l'analyse que nous venons de mener montre que :

$$H_F = \mathrm{e}^{-rT} H_A \tag{19.5}$$

Quand l'actif sous-jacent verse un dividende de taux q, nous obtenons :

$$H_F = \mathrm{e}^{-(r-q)\,T} H_A \tag{19.6}$$

Pour un indice, q est le rendement en dividende de l'indice. Pour une devise, c'est le taux sans risque étranger, r_f, et nous obtenons donc :

$$H_F = \mathrm{e}^{-(r-r_f)\,T} H_A \tag{19.7}$$

L'exemple 19.8 présente une application de cette formule.

■ **Exemple 19.8** Une banque française détient un portefeuille d'options qui serait delta-neutre si l'on y ajoutait une position courte sur la livre sterling d'un montant de 458 000 £. Les taux sans risque en France et au Royaume-Uni étant respectivement de 4 % et de 7 %, l'équation (19.7) montre qu'une couverture utilisant des futures sur devise à neuf mois impliquerait une position courte sur futures de :

$$\mathrm{e}^{-(0{,}04-0{,}07)\times 9/12} \times 458\,000$$

soit 468 442 £. Puisque chaque contrat futures permet d'acheter ou de vendre 62 500 £, on pourrait réaliser une position courte sur sept contrats (7 étant l'entier le plus proche de 468 442/62 500).

19.13 L'assurance de portefeuille

Un gestionnaire de portefeuille qui achète un put sur son portefeuille acquiert une protection contre une baisse du marché, en même temps qu'il préserve son profit en cas de hausse. L'une des solutions possibles (examinée à la section 17.1) est d'acheter un put sur un indice de marché tel que le CAC 40. Mais il existe une solution alternative qui consiste à créer une option synthétique.

Créer une option synthétique consiste à maintenir une position dans l'actif sous-jacent (ou dans un futures sur l'actif sous-jacent) de telle manière que le delta de la position soit égal au delta souhaité de l'option. La position essentielle pour créer une telle option est symétrique de celle qui est nécessaire à sa couverture. Cela s'explique par le fait que la procédure pour couvrir une option implique la création d'une option synthétique équivalente, mais opposée à la première.

Les deux principales raisons pour lesquelles il peut être plus intéressant pour un gestionnaire de portefeuille de créer un put synthétique plutôt que de l'acheter sur le marché sont les suivantes :

1. Les marchés d'options ne disposent pas toujours de la liquidité suffisante pour absorber les volumes que traitent les gestionnaires de fonds importants ;
2. Ces gestionnaires ont souvent besoin de prix d'exercice et de dates d'échéance qui diffèrent de ceux qui sont disponibles sur les marchés organisés.

L'option synthétique peut être créée en échangeant une partie du portefeuille ou en utilisant un contrat futures sur indice. Nous examinons tout d'abord la création d'une option par la vente d'une partie du portefeuille. Rappelons que le delta d'un put européen portant sur le portefeuille est :

$$\Delta = \mathrm{e}^{-qT}\left[N(d_1) - 1\right] \tag{19.8}$$

où, avec les notations habituelles :

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r - q + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S est la valeur actuelle du portefeuille, K le prix d'exercice, r le taux sans risque, q le rendement en dividende du portefeuille, la volatilité et T la durée de vie restante de l'option.

Pour créer le put synthétique, le gestionnaire de fonds doit s'assurer que, à tout instant, une proportion :

$$\mathrm{e}^{-qT}\left[1 - N(d_1)\right]$$

des actions du portefeuille d'origine est vendue et que le montant de la vente est investi au taux sans risque. Au fur et à mesure que la valeur du portefeuille d'origine baisse, le delta du put donné par l'équation (19.8) diminue et la proportion du portefeuille d'origine qui doit être vendue augmente.

Utiliser cette stratégie pour créer un portefeuille de couverture signifie qu'à tout moment, les fonds se divisent entre le portefeuille d'actions d'origine pour lequel une couverture est nécessaire et l'actif sans risque. Si la valeur du portefeuille d'actions augmente, un montant d'actif sans risque est vendu et la position en actions est renforcée. Si la valeur du portefeuille baisse, la position en actions est allégée pour renforcer celle en actif sans risque. Le coût de la couverture provient des ventes après une baisse du marché et des achats après une hausse.

■ **Exemple 19.9** Un portefeuille vaut 90 millions d'euros. Pour se couvrir contre une baisse du marché, le gestionnaire prend une position longue sur un put européen à 6 mois sur ce portefeuille avec un prix d'exercice de 87 millions d'euros. Le taux sans risque est de 9 % par an, le rendement en dividende du portefeuille de 3 % par an et la volatilité de 25 % par an. Le portefeuille est censé répliquer l'indice Next150 qui est actuellement à 900. Aussi, l'une des solutions serait d'acheter 1 000 options de vente sur le Next150 avec un prix d'exercice de 870. Une autre solution consisterait à créer une option synthétique. Dans ce cas, S = 90 millions, K = 87 millions, r = 0,09, q = 0,03, σ = 0,25 et T = 0,5.

Ainsi :

$$d_1 = \frac{\ln(90/87) + (0{,}09 - 0{,}03 + 0{,}25^2/2)\,0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}} = 0{,}4499$$

et le delta de l'option est à l'origine égal à :

$$\mathrm{e}^{-qT}\,[N(d_1) - 1] = -0{,}3215$$

Cela montre que 32,15 % du portefeuille devrait être vendu pour obtenir le delta souhaité. Le portefeuille doit être surveillé régulièrement. Par exemple, si sa valeur baisse à 88 millions au bout d'une journée, le delta devient égal à $-0{,}3679$ et 4,64 % du portefeuille d'origine doit être vendu en plus. Si la valeur du portefeuille monte à 92 millions au bout d'une journée, le delta devient $-0{,}2787$ et 4,28 % du portefeuille d'origine doit être racheté.

L'utilisation des futures sur indices

L'utilisation de futures sur indices pour créer des options synthétiques peut être préférable à l'utilisation d'actions composant l'indice sous-jacent, car les coûts de transaction associés aux échanges de futures sont généralement plus bas que ceux liés à l'échange d'actions. Le montant en euros des contrats futures vendus en proportion de la valeur du portefeuille devrait, d'après les équations (19.6) et (19.8), être égal à :

$$\mathrm{e}^{-qT}\,\mathrm{e}^{-(r-q)\,T^*}\,[1 - N(d_1)] = \mathrm{e}^{q\left(T^*-T\right)}\,\mathrm{e}^{-rT^*}\,[1 - N(d_1)]$$

où T représente la date d'échéance du contrat futures. Si le portefeuille vaut plus que A_1 fois l'indice et que chaque contrat futures sur indice porte sur A_2 fois l'indice, le nombre de contrats futures vendus à n'importe quelle date donnée devrait être égal à :

$$\mathrm{e}^{q\left(T^*-T\right)}\,\mathrm{e}^{-rT^*}\,[1 - N(d_1)]\,\frac{A_1}{A_2}$$

■ **Exemple 19.10** Supposons que dans l'exemple précédent des contrats futures sur l'indice Next150 et d'échéance 9 mois soient utilisés pour créer l'option synthétique. Dans ce cas, à l'origine, T = 0,5, T^* = 0,75, A_1 = 100 000 et d = 0,4499. Chaque contrat futures sur indice porte sur 250 fois l'indice, de sorte que A_2 = 250. Ainsi, le nombre de contrats futures à vendre doit être de :

$$\mathrm{e}^{q\left(T^*-T\right)}\,\mathrm{e}^{-rT^*}\,[1 - N(d_1)]\,\frac{A_1}{A_2} = 122{,}96$$

soit 123 en arrondissant à l'entier le plus proche. Au fur et à mesure que l'indice évolue, la position en contrat futures doit être ajustée.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le portefeuille répliquait l'indice. Comme nous l'avons expliqué à la section 17.1, le procédé de couverture peut être ajusté pour atteindre d'autres objectifs. Le prix d'exercice retenu devrait être égal au niveau attendu de l'indice de marché quand la valeur du portefeuille atteint sa valeur couverte. Lorsque le bêta du portefeuille est différent de 1, il faut, pour couvrir ce portefeuille, multiplier par bêta le nombre d'options obtenu lorsque le bêta est égal à 1 (cas de la réplication de l'indice). La volatilité du portefeuille peut être supposée égale à son bêta multiplié par la volatilité d'un indice approprié et bien diversifié.

Encadré 19.2 L'assurance de portefeuille est-elle en cause dans le krach du 19 octobre 1987 ?

Le lundi 19 octobre 1987, le « Dow Jones Industrial Average » chuta brutalement de plus de 20 %. Pour replacer cela dans le contexte de l'époque, tous les records précédents furent dépassés lorsque 604 millions d'actions, représentant plus de 21 milliards de dollars US, furent échangées à la Bourse de New York. Un montant d'environ 20 milliards de contrats futures sur le S&P500 fut également échangé ce jour-là.

Les gestionnaires de portefeuilles qui s'étaient couverts en achetant des options de vente sur les marchés organisés ou OTC ont très bien survécu au krach. En revanche, tous ceux qui avaient choisi de créer des options synthétiques réalisèrent qu'ils étaient incapables de vendre leurs actions ou leurs futures sur indices assez vite pour protéger leur position.

Le rapport de la Commission Brady sur le krach du 19 octobre 1987 fournit des éléments intéressants sur l'impact de l'assurance de portefeuille sur le marché à cette époque. La Commission Brady estima que 60 à 90 milliards de dollars US d'actions étaient gérés par l'assurance de portefeuille en octobre 1987. Durant la période s'étendant du mercredi 14 octobre 1987 au vendredi 16 octobre 1987, le marché baissa d'environ 10 % ; une grande partie de cette baisse se déroula notamment le vendredi après-midi. La baisse aurait dû engendrer au moins 12 milliards de dollars US de ventes d'actifs ou de futures sur indices, conformément aux techniques d'assurance de portefeuille. En réalité, ce sont moins de 4 milliards de dollars US qui ont été vendus ; les assureurs de portefeuille débutaient donc la semaine suivante avec d'énormes montants à vendre, selon ce que dictaient les modèles théoriques. La Commission Brady estima que, le lundi 19 octobre 1987, les ordres de vente de trois assureurs de portefeuilles représentaient plus de 10 % des ventes de la Bourse de New York, et que les ventes des couvertures de portefeuilles s'élevaient à 21,3 % de l'ensemble des ventes des marchés de futures sur indices. Il paraît vraisemblable que l'assurance de portefeuille ait été la source d'une forte pression baissière sur le marché.

Puisque le marché baissait trop rapidement et que le système informatique de la Bourse était surchargé, de nombreux assureurs de portefeuilles furent incapables d'exécuter les ordres de vente générés par leurs modèles et ne purent obtenir la couverture souhaitée. Inutile de dire que la popularité de l'assurance de portefeuille fondée sur la gestion dynamique des actions et des futures s'est effondrée depuis le mois d'octobre 1987. La morale de l'histoire est qu'il est dangereux de suivre une stratégie donnée (même quand il s'agit d'une couverture), lorsque de nombreux opérateurs de marché suivent la même.

19.14 La volatilité du marché d'actions

Nous nous sommes déjà demandé au chapitre 15 si la volatilité était causée soit uniquement par l'arrivée de nouvelles informations sur le marché, soit par l'activité d'échange elle-même. Or, l'assurance de portefeuille, telle qu'elle a été décrite précédemment, peut augmenter la volatilité. En effet, quand le marché baisse, elle incite les gérants à vendre des actions ou des futures sur indices. Ces réactions contribuent à accentuer le déclin (voir encadré 19.2). La vente d'actions est susceptible d'accélérer la baisse. La vente de contrats futures sur indices a le même effet sur les prix futures. Il s'ensuit une pression à la vente d'actions à travers les mécanismes d'arbitrage sur indices (voir chapitre 5), et l'indice est entraîné à la baisse. De même, lorsque le marché est en hausse, l'assurance de portefeuille conduit les gérants à acheter des actions ou des contrats futures, ce qui accentue la hausse.

En plus de ces procédés formels d'assurance de portefeuille, il semble que de nombreux investisseurs, consciemment ou non, s'appuient sur des techniques analogues. Par exemple, un investisseur peut être enclin à entrer sur le marché en cas de hausse, mais vend à la baisse pour limiter ses pertes.

La façon dont les techniques d'assurance (formelles ou non) affectent la volatilité dépend de la facilité avec laquelle le marché peut absorber les volumes engendrés par ces stratégies. Si ces dernières ne représentent qu'une faible partie des échanges, il n'y aura vraisemblablement aucun effet. Mais plus l'assurance de portefeuille est populaire, plus l'effet sur le marché est déstabilisant, comme il le fut en 1987.

Résumé

Les institutions financières offrent une variété de produits optionnels à leurs clients. Souvent, ces options ne correspondent pas à des produits standard échangés sur les marchés organisés. Les institutions financières sont alors confrontées au problème de couverture contre l'exposition au risque. Les positions nues et couvertes les laissent face à un niveau de risque inacceptable. Une réaction possible consiste à développer une stratégie stop-loss. Ceci suppose de détenir une position nue lorsque l'option est en dehors de la monnaie et de la convertir en position couverte dès que l'option passe dans la monnaie. Bien qu'elle semble intéressante à première vue, cette stratégie se révèle en pratique peu performante.

Le delta d'une option, noté Δ, est le taux de variation de sa valeur en fonction du cours de l'actif sous-jacent. La couverture implique la création d'une position delta-neutre, c'est-à-dire avec un delta égal à zéro. Puisque le delta de l'actif sous-jacent est égal à 1,0, une des façons de se couvrir consiste à prendre une position dans $-\Delta$ unités de l'actif sous-jacent pour chaque option à couvrir. Le delta d'une option change au fil du temps, et la position dans l'actif sous-jacent doit être ajustée fréquemment.

Quand une position delta-neutre est établie, la prochaine étape consiste à définir son gamma. Le gamma d'une option représente le taux de variation du delta en fonction du cours de l'actif sous-jacent. C'est une mesure de la courbure de la fonction liant la valeur de l'option et le cours du sous-jacent. L'impact de cette courbure sur les performances de la couverture peut être réduit en adoptant une position gamma-neutre.

Les couvertures en delta et gamma sont basées sur l'hypothèse d'une volatilité constante de l'actif sous-jacent. Or, dans la pratique, les volatilités varient au fil du temps. Le vega d'une option ou d'un portefeuille d'options mesure le taux de variation de sa valeur en fonction de la volatilité. Un trader qui souhaite assurer une position en options contre la variation de la volatilité peut établir une position vega-neutre. De même que pour créer une position gamma-neutre, il faut prendre une position sur une option qui compense le vega de la position d'origine. Si le trader souhaite obtenir une position à la fois gamma et vega neutre, il doit opérer sur deux options différentes.

Il existe deux autres mesures du risque d'une position en options : thêta et rhô. Le thêta mesure le taux de variation de la valeur de la position en fonction du temps, toutes choses égales d'ailleurs. Le rhô mesure le taux de variation de la valeur de la position en fonction du taux sans risque.

En pratique, les traders d'options ajustent leurs portefeuilles au moins une fois par jour pour maintenir un delta-neutre. Il n'est généralement pas possible de maintenir un gamma et un vega-neutre sur une base régulière. La plupart du temps, quand les traders constatent que les valeurs de ces paramètres deviennent inacceptables, ils ajustent leur position ou réduisent le volume de celle-ci.

Les gestionnaires de portefeuilles peuvent créer des puts synthétiques pour assurer leur portefeuille. Ils peuvent le faire en vendant une partie du portefeuille ou des futures sur indices. Dans le premier cas, la partie vendue est investie en actifs sans risque. Si le marché baisse, la part investie dans les titres sans risque augmente, et réciproquement. Lorsque des futures sur indices sont vendus, le portefeuille d'actions reste intact. Si le marché baisse, davantage de futures sont vendus, et réciproquement. Cette stratégie fonctionne bien dans des conditions de marché normales. Mais le lundi 19 octobre 1987, lorsque le « Dow Jones Industrial Average » baissa de plus de 500 points, cette stratégie se révéla désastreuse. Les assureurs de portefeuilles furent incapables de vendre leurs actions, ou leurs futures, assez rapidement pour protéger leurs positions. Le résultat fut une très nette baisse de popularité de ces techniques de couverture.

Références complémentaires

Passarelli D. "Trading Option Greeks : How Time, volatility, and Other Factors Drive Profits", 2nd ed., Wiley, Hoboken, NJ, 2012.

Taleb N., "Dynamic Hedging : Managing Vanilla and Exotic Options", Wiley, New York, 1996.

Problèmes et exercices

19.1 Expliquez comment une stratégie stop-loss peut être mise en place par le vendeur d'un call en dehors de la monnaie. Pourquoi cette couverture est-elle relativement insatisfaisante ?

19.2 Que signifie l'affirmation selon laquelle le delta d'un call est égal à 0,7 ? Comment une position courte sur 1 000 options peut-elle être établie en delta-neutre si le delta de chaque option est de 0,7 ?

19.3 Calculez le delta d'un call européen à 6 mois, à la monnaie, portant sur une action ne versant pas de dividendes si le taux sans risque est de 10 % par an et que la volatilité du cours de l'action est de 25 % par an.

19.4 Que signifie l'affirmation selon laquelle le thêta d'une position en options est de $-0{,}1$ (le temps étant mesuré en années) ? Si un trader pense que ni le cours de l'action ni sa volatilité ne changeront, quel type de position en options est appropriée ?

19.5 Qu'entend-on par gamma d'une option ? Quels sont les risques d'une position à gamma négatif et delta nul ?

19.6 « La procédure pour créer une option synthétique est l'inverse de celle pour couvrir la position sur l'option. » Expliquez cette affirmation.

19.7 Pourquoi l'assurance de portefeuille connut-elle des déboires le 19 octobre 1987 ?

19.8 La valeur, selon le modèle de Black-Scholes-Merton, d'un call européen en dehors de la monnaie avec un prix d'exercice de 40 € est de 4 €. Un trader qui a vendu cette option prévoit d'utiliser une stratégie à seuil de déclenchement. Ainsi, il prévoit d'acheter à 40,10 € et de vendre à 39,90 €. Estimez l'espérance du nombre de fois où l'action sera achetée ou vendue.

19.9 Supposons que le cours d'une action soit actuellement de 20 € et qu'un call synthétique de prix d'exercice 25 € soit créé par une position sur l'action ajustée dynamiquement. Considérez les deux scénarios suivants :

a. le cours de l'action augmente de façon constante de 20 € à 35 € durant la vie de l'option ;

b. le cours de l'action oscille de façon aléatoire et termine à 35 €.

Quel scénario rend l'option synthétique la plus coûteuse ? Justifiez votre réponse.

19.10 Quel est le delta d'une position courte de 1 000 calls européens portant sur des futures sur l'argent ? L'échéance des options est à 8 mois et les contrats futures sous-jacents arrivent à maturité dans 9 mois. Le cours actuel des futures à 9 mois est de 8 € l'once (28,35 g), le prix d'exercice de l'option est de 8 € , le taux d'intérêt sans risque de 12 % par an et la volatilité de l'argent de 18 % par an.

19.11 Dans l'exercice précédent (19.10), quelle position initiale dans les futures à 9 mois sur l'argent est nécessaire pour obtenir une couverture delta-neutre ? Si l'argent lui-même est utilisé, quelle doit être la position initiale ? Si des futures à 1 an sur l'argent sont utilisés, quelle doit être la position initiale ? Vous supposerez qu'il n'y a pas de coût de stockage de l'argent.

19.12 Une société utilise une couverture delta-neutre pour assurer un portefeuille consistant en une position longue en options de vente et d'achat sur une devise. Laquelle des propositions suivantes permettra d'obtenir le résultat le plus favorable ?

a. Un taux spot virtuellement constant.

b. Des variations violentes du taux spot.

Justifiez votre réponse.

19.13 Renouvelez l'exercice précédent (19.12) pour une institution financière avec un portefeuille consistant en une position courte sur des options de vente et d'achat sur une devise.

19.14 Une institution financière vient de vendre 1 000 calls européens à 7 mois sur le yen japonais. Supposons que le taux de change au comptant soit de 0,80 cents par yen, le prix d'exercice de 0,81 cents par yen, le taux d'intérêt sans risque en France de 8 % par an, le taux d'intérêt sans risque au Japon de 5 % par an, et la volatilité du yen de 15 % par an. Calculez le delta, le gamma, le vega, le thêta et le rhô de la position de l'institution financière. Interprétez chacune de ces valeurs.

19.15 Dans quelles circonstances est-il possible de créer une option européenne sur un indice d'actions qui soit à la fois gamma-neutre et vega-neutre grâce à l'ajout d'une position sur une autre option européenne ?

19.16 Un gestionnaire de fonds possède un portefeuille bien diversifié qui reproduit les performances de l'indice Next150, et dont la valeur est de 360 millions d'euros. La valeur du Next150 est de 1 200 et le gestionnaire de portefeuille souhaiterait se couvrir contre une réduction de plus de 5 % de la valeur du portefeuille sur les six prochains mois. Le taux d'intérêt sans risque est de 6 % par an. Les rendements en dividende de l'indice et du portefeuille sont de 3 % et la volatilité de l'indice est de 30 % par an.

a. Si le gestionnaire de fonds achète des puts européens, combien son assurance lui coûtera-t-elle ?

b. Expliquez avec précision les stratégies alternatives qui s'offrent au gestionnaire de fonds en impliquant des calls européens, et montrez qu'elles conduisent au même résultat.

c. Si le gestionnaire de fonds décide de se couvrir en gardant une part de son portefeuille investie dans un actif sans risque, quelle devra être la position initiale ?

d. Si le gestionnaire de fonds décide de se couvrir en utilisant un futures sur indice à 9 mois, quelle devra être la position initiale ?

19.17 Renouvelez l'exercice 19.16 en supposant que le portefeuille a un bêta de 1,5. Supposez que le rendement en dividende du portefeuille est de 4 % par an.

19.18 Montrez par substitution d'un des termes de l'équation (19.4) que cette dernière est vérifiée pour :

a. une seule option d'achat européenne sur une action ne versant pas de dividendes ;

b. une seule option de vente européenne sur une action ne versant pas de dividendes ;

c. n'importe quel portefeuille de puts et calls européens sur une action ne versant pas de dividendes.

19.19 Quelle est l'équation correspondant à l'équation (19.4) pour (a) un portefeuille de produits dérivés portant sur une devise, et (b) un portefeuille de produits dérivés portant sur un contrat futures ?

19.20 Supposons que 70 milliards d'euros d'actions soient gérés en utilisant l'assurance de portefeuille. Le but est de fournir une couverture contre une baisse de plus de 5 % au cours de l'année à venir.

En procédant aux estimations que vous jugerez nécessaires, utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer la valeur des actions ou des contrats futures que les gérants doivent vendre si le marché chute de 23 % en une journée.

19.21 Est-ce qu'un contrat forward sur indice a le même delta que le contrat futures équivalent ? Justifiez votre réponse.

19.22 La position d'une banque dans des options sur le taux de change dollar US/euro a un delta de 30 000 et un gamma de −80 000. Expliquez de quelle manière ces nombres peuvent être interprétés. Le taux de change (dollars US par euro) est de 0,90. Quelle position devriez-vous adopter pour établir une position delta-neutre ? Après une courte période, le taux de change devient 0,93. Estimez le nouveau delta. Quel ordre d'achat ou de vente est-il nécessaire de passer pour revenir à une position delta-neutre ? Supposons que la banque ait déjà établi une position delta-neutre à l'origine ; a-t-elle gagné ou perdu de l'argent après cette variation du taux de change ?

19.23 Utilisez la relation de parité call-put pour démontrer, pour une action ne versant pas de dividendes, les relations entre :

a. le delta d'un call européen et le delta d'un put européen ;

b. le gamma d'un call européen et le gamma d'un put européen ;

c. le vega d'un call européen et le vega d'un put européen ;

d. le thêta d'un call européen et le thêta d'un put européen.

Questions complémentaires

19.24 Une institution financière dispose du portefeuille suivant, composé d'options OTC sur la livre sterling :

Type	Position	Delta de l'option	Gamma de l'option	Vega de l'option
Call	–1 000	0,50	2,2	1,8
Call	–500	0,80	0,6	0,2
Put	–2 000	–0,40	1,3	0,7
Call	–500	0,70	1,8	1,4

Une option est disponible avec un delta de 0,6, un gamma de 1,5 et un vega de 0,8.

a. Quelle position sur l'option et sur la livre sterling permettrait d'obtenir un portefeuille delta et gamma-neutre ?

b. Quelle position sur l'option et sur la livre sterling permettrait d'obtenir un portefeuille delta et vega-neutre ?

19.25 Reprenons la situation de l'exercice précédent (19.24) et supposons qu'une seconde option présentant un delta de 0,1, un gamma de 0,5 et un vega de 0,6 soit disponible. Comment pourrait-on obtenir que le portefeuille soit à la fois delta, gamma et vega-neutre ?

19.26 Soit un call européen à 1 an portant sur une action cotée actuellement 30 €, le prix d'exercice est 30 €, le taux sans risque 5 % et la volatilité 25 % par an. Utilisez le logiciel DerivaGem pour calculer la valeur de l'option, ainsi que son delta, son gamma, son vega, son thêta et son rhô. Vérifiez que son delta est exact en recalculant la valeur de l'option lorsque vous modifiez le cours de l'action à 30,1 €. Vérifiez également que le gamma est exact en recalculant le delta alors que le cours de l'action est de 30,1 €. Procédez de même et vérifiez que le vega, le thêta et le rhô sont exacts. Utilisez les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem pour tracer la valeur de l'option, du delta, du gamma, du vega, du thêta et du rhô en fonction du cours de l'action sous-jacente.

19.27 Un produit de placement offert par une banque garantit à l'investisseur une rentabilité, pour une période de six mois, supérieure à (a) zéro et (b) 40 % de la rentabilité d'un indice de marché. Un investisseur a prévu de placer 100 000 € dans ce produit. Décrivez le schéma de gain à l'échéance en assimilant ce produit à une option sur indice. Si l'on suppose que le taux sans risque est 8 % par an, que le rendement en dividende de l'indice est 3 % et que sa volatilité est 25 %, le produit est-il un bon investissement ?

19.28 La formule de la valeur d'un call européen sur futures, c, en fonction du prix du contrat futures, noté F_0, est, d'après le chapitre 18 :

$$c = \mathrm{e}^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - K N(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(F_0/K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où K, r, T et σ et représentent respectivement le prix d'exercice, le taux sans risque, le temps restant à courir jusqu'à l'échéance et la volatilité.

a. Démontrez que $F_0 N'(d_1) = K N'(d_2)$.

b. Démontrez que le delta du call est égal à : $\mathrm{e}^{-rT} N(d_1)$.

c. Démontrez que le vega du call est égal à : $F_0\sqrt{T}N'(d_1)\,\mathrm{e}^{-rT}$.

d. Démontrez la formule donnant le rhô d'un call sur futures, présentée à la fin de la section 19.12.

Le delta, le gamma, le thêta et le vega d'un call sur futures sont les mêmes que ceux d'un call sur une action versant un dividende de taux q, avec q remplacé par r, et S_0 remplacé par F_0. Expliquez pourquoi il n'en est pas de même avec le rhô d'un call sur futures.

19.29 Utilisez DerivaGem pour vérifier que l'équation (19.4) est satisfaite pour l'option considérée à la section 19.1. (Note : DerivaGem produit une valeur de thêta par « jour calendaire ». Le thêta de l'équation (19.4) est « par an ».)

19.30 Utilisez les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem pour reproduire le tableau 19.2 (notez que, dans le tableau 19.2, la position dans l'action est arrondie à la centaine d'actions la plus proche). Calculez le gamma et le thêta de la position chaque semaine. Calculez la variation de la valeur du portefeuille chaque semaine, et contrôlez si l'équation (19.3) est approximativement vérifiée. (Note : DerivaGem produit une valeur de thêta par « jour calendaire ». Le thêta de l'équation (19.3) est « par an ».)

Annexe

Développements limités en série de Taylor et paramètres de couverture

Un développement limité en série de Taylor de la valeur du portefeuille dans une courte période de temps montre le rôle joué par les différentes lettres grecques. Si la volatilité de l'actif sous-jacent est supposée constante, la valeur du portefeuille, Π, est une fonction du cours de l'actif S et du temps t. Le développement limité en série de Taylor donne :

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\Delta S\,\Delta t + \cdots \qquad (19A.1)$$

où $\Delta\Pi$ et ΔS sont les variations de Π et S au cours d'un intervalle de temps de longueur Δt. La couverture delta-neutre élimine le premier terme du membre de droite. Le deuxième terme n'est pas stochastique. Le troisième terme (qui est d'ordre 1 en Δt) peut être annulé en s'assurant que le portefeuille est gamma-neutre tout en restant delta-neutre. Les autres termes sont d'un ordre supérieur à Δt. Pour un portefeuille delta-neutre, le premier terme du membre de droite de l'équation (19A.1) est nul, de telle sorte que :

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

où les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont négligés. C'est l'équation (19.3). Lorsque la volatilité de l'actif sous-jacent est incertaine, est une fonction de σ, S et t. L'équation (19A.1) devient alors égale à :

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma^2}\Delta\sigma^2 + \cdots$$

où $\Delta\sigma$ représente la variation de σ dans l'intervalle Δt. Dans ce cas, la couverture delta élimine le premier terme du membre de droite. Le deuxième terme est éliminé en établissant le portefeuille en vega-neutre. Le troisième terme n'est pas stochastique. Le quatrième terme est éliminé en établissant le portefeuille en gamma-neutre. Les autres lettres grecques peuvent être définies (et le sont en pratique) pour correspondre aux autres termes d'ordre supérieur.

Chapitre 20

Les courbes de volatilité

Sur les marchés, les cours des options sont-ils proches de ceux qui sont prévus par le modèle de Black et Scholes ? Les traders utilisent-ils vraiment ce modèle lorsqu'ils déterminent la valeur d'une option ? Les distributions de probabilité de la valeur d'un actif sont-elles réellement log-normales ? Quelles recherches ont été menées pour tester la validité des formules de Black et Scholes ? Nous répondons à toutes ces questions dans ce chapitre. Nous expliquons ainsi que les traders utilisent effectivement le modèle de Black et Scholes, mais pas exactement de la façon dont Black et Scholes l'entendaient initialement. En fait, les traders font dépendre la volatilité, paramètre essentiel du modèle, à la fois du prix d'exercice et de la durée de vie.

On appelle courbe de volatilité ou *smile de volatilité* la fonction qui lie la volatilité implicite des options au prix d'exercice. Dans ce chapitre, nous décrivons les courbes de volatilité utilisées par les opérateurs des marchés d'options sur actions et sur devises. Nous expliquons la relation entre le smile de volatilité et la distribution de probabilité risque-neutre de la valeur future d'un actif. Nous examinons également de quelle manière ces opérateurs adaptent la volatilité en fonction de la maturité de l'option, et comment ils utilisent des matrices de volatilités comme outils d'évaluation. La partie finale de ce chapitre résume certains des tests empiriques du modèle de Black et Scholes.

20.1 Pourquoi le smile de volatilité est le même pour calls et puts

Cette section montre que la volatilité implicite d'un call est la même que celle d'un put. Ce résultat est important, car il signifie que pour étudier le smile de volatilité, il est indifférent de le faire avec des calls ou avec des puts.

La relation de parité call-put, telle que nous l'avons décrite aux chapitres précédents, constitue un bon point de départ pour comprendre les smiles de volatilité. Cette relation lie la valeur d'un call européen, c, à celle d'un put européen, p :

$$p + S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} = c + K \, \mathrm{e}^{-rT} \tag{20.1}$$

Le call et le put ont même prix d'exercice, K et même date d'échéance, T. S_0 est la valeur de l'actif sous-jacent, r est le taux d'intérêt sans risque pour la maturité T, et q désigne le taux de payoff intermédiaire (dividende ou coupon) de l'actif sous-jacent.

La relation de parité call-put est fondée sur l'absence d'opportunités d'arbitrage. Elle ne nécessite aucune hypothèse particulière quant à la distribution de probabilité du prix futur du sous-jacent. Elle doit être vérifiée, que la loi suivie par le prix du sous-jacent soit log-normale ou non.

Pour une valeur donnée de la volatilité, notons p_{BS} et c_{BS} les valeurs respectives d'un put et d'un call données par le modèle de Black et Scholes. Notons par ailleurs p_{mkt} et c_{mkt} les prix cotés de ces options ; puisque la relation de parité call-put est vérifiée pour le modèle de Black et Scholes, on doit avoir :

$$p_{BS} + S_0\,\mathrm{e}^{-qT} = c_{BS} + K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

Puisqu'elle est aussi vérifiée pour les valeurs de marché, on peut écrire :

$$p_{mkt} + S_0\,\mathrm{e}^{-qT} = c_{mkt} + K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

La soustraction de ces deux équations donne :

$$p_{BS} - p_{mkt} = c_{BS} - c_{mkt} \tag{20.2}$$

Cette égalité montre que l'erreur d'évaluation sur un put européen, due à l'utilisation du modèle de Black et Scholes, est exactement la même que l'erreur d'évaluation sur le call européen, à prix d'exercice et dates d'échéance identiques.

Supposons que la volatilité implicite du put soit de 22 % ; on a $p_{BS} = p_{mkt}$ lorsqu'une volatilité de 22 % est utilisée dans le modèle de Black et Scholes. D'après l'équation (20.2), il s'ensuit que $c_{BS} = c_{mkt}$ lorsque cette volatilité est employée. La volatilité implicite du call est donc aussi de 22 %. Ce raisonnement montre bien que la volatilité implicite d'un call européen est toujours égale à celle d'un put européen lorsque les deux options ont le même prix d'exercice et la même date d'échéance. Autrement dit, pour un prix d'exercice et une date d'échéance donnés, la volatilité correcte à utiliser dans le modèle de Black et Scholes pour évaluer un call européen doit être la même que celle qui est employée pour un put européen.

À peu de choses près, ce raisonnement s'applique également aux options américaines. Ainsi, lorsque les traders se réfèrent à la relation entre volatilité implicite et prix d'exercice, ou à la relation entre volatilité implicite et date d'échéance, ils n'ont pas besoin de préciser qu'ils parlent de calls ou de puts. La relation est la même pour les deux.

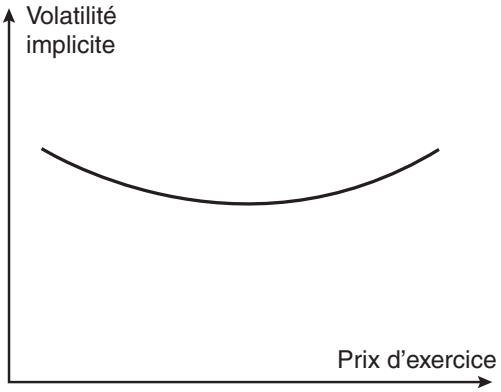
■ **Exemple 20.1** La valeur du dollar australien est de 0,60 €. Le taux sans risque est de 5 % par an en France et de 10 % par an en Australie. La valeur de marché d'un call européen sur le dollar australien, dont l'échéance est à 1 an et le prix d'exercice de 0,59 €, s'établit à 0,0236. DerivaGem montre que la volatilité implicite d'un tel call est de 14,5 %. Pour qu'il n'y ait pas d'arbitrage, la relation de parité call-put de l'équation (20.1) doit s'appliquer avec q égal au taux sans risque étranger. La valeur du put européen, p, de prix d'exercice 0,59 € et d'échéance 1 an satisfait donc :

$$p + 0{,}60\,\mathrm{e}^{-0{,}10\times 1} = 0{,}0236 + 0{,}59\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 1}$$

Soit p = 0,0419. DerivaGem montre que, lorsque le put est à ce prix, sa volatilité implicite est également de 14,5 %. C'est bien ce à quoi l'on pouvait s'attendre suite à l'analyse précédente.

20.2 Les options de change

La courbe de volatilité utilisée par les traders pour évaluer les options de change a généralement la forme d'un sourire, représenté dans le graphique 20.1 (d'où le nom *smile*). La volatilité est relativement faible pour des options à la monnaie, et elle s'élève progressivement au fur et à mesure que l'option devient davantage dans la monnaie ou en dehors de la monnaie.



Graphique 20.1 : Le smile de volatilité des options de change

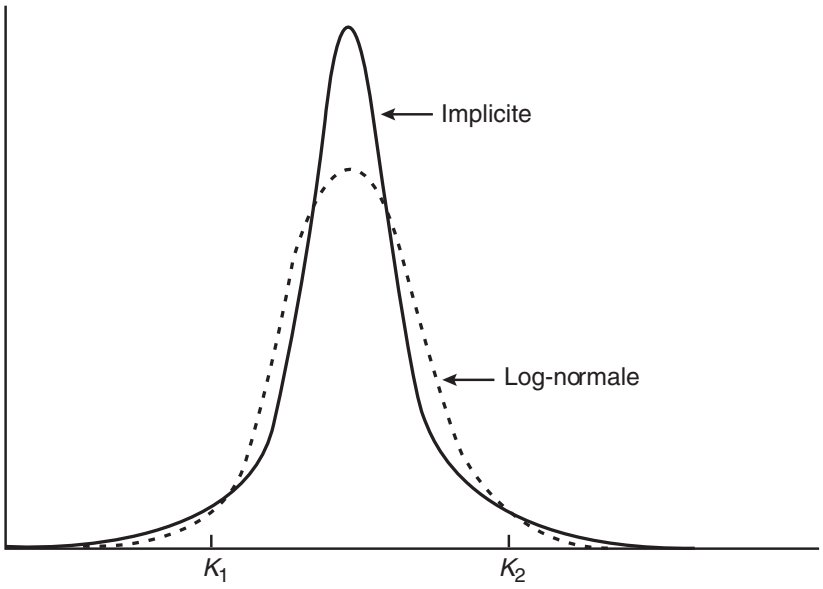
Dans l'annexe de ce chapitre, nous montrons comment déterminer la distribution de probabilité risque-neutre du prix d'un actif à une date future T à partir du smile de volatilité déduit des prix d'options d'échéance T. Cette loi est appelée distribution implicite. Le smile de volatilité du graphique 20.1 correspond à la distribution de probabilité indiquée en gras dans le graphique 20.2. Une distribution log-normale avec la même moyenne et le même écart-type est reportée en pointillé dans le graphique 20.2.

On peut voir que la distribution implicite a des extrémités plus épaisses que celles de la loi log-normale [1].

Pour vérifier que les graphiques 20.1 et 20.2 sont bien cohérents entre eux, considérons en premier lieu un call très en dehors de la monnaie, de prix d'exercice K_2. Cette option procure un payoff positif uniquement si le taux de change parvient à dépasser K_2. Le graphique 20.2 montre que la probabilité d'une telle hausse est plus élevée pour la distribution implicite que pour la distribution log-normale. On peut donc s'attendre à ce que la distribution implicite donne un prix plus élevé pour l'option. Or une valeur de l'option plus élevée est associée à une volatilité implicite plus importante – et c'est

1. C'est la *kurtosis* qui mesure l'aplatissement d'une distribution. Il faut noter que, en plus d'avoir des queues plus importantes, la distribution implicite est plus « pointue » De faibles et amples variations du taux de change sont donc plus probables que dans une distribution log-normale. Les variations intermédiaires sont, en revanche, moins fréquentes.

exactement ce qui est observé pour l'option dans le graphique 20.1. Les deux graphiques sont donc cohérents entre eux pour des prix d'exercice élevés. Considérons à présent un put très en dehors de prix d'exercice K_1. Cette option ne procurera un payoff positif que si le taux de change descend en dessous de K_1. Le graphique 20.2 montre que la probabilité d'une telle baisse est également plus forte pour la distribution implicite que pour une distribution log-normale. La distribution implicite devrait donc conduire à un prix relativement plus élevé pour l'option et à une volatilité implicite plus importante. Là encore, c'est bien ce qui est observé dans le graphique 20.1.



Graphique 20.2 : La distribution implicite et la distribution log-normale des taux de change

Les résultats empiriques

Le smile utilisé par les traders d'options de change tient compte de la sous-évaluation, par la distribution log-normale, de la probabilité de variations extrêmes des taux de change. Pour vérifier s'ils ont raison d'agir ainsi, nous avons examiné les variations quotidiennes de douze taux de change différents sur une période de 10 ans. Après avoir calculé l'écart-type du pourcentage de variation quotidienne de chaque taux de change, nous avons déterminé la fréquence des variations excédant un écart-type, deux écarts-types, etc., et comparé ces résultats à ceux obtenus dans le cadre d'une loi normale pour ces variations (mesurées en pourcentage). En effet, le modèle log-normal pour les taux de change implique que les pourcentages de variation journalière suivent approximativement une loi normale. Les résultats sont présentés dans le tableau 20.1 [2].

Les variations quotidiennes excèdent trois écarts-types pour 1,30 % du nombre total de jours étudiés. Le modèle log-normal prévoit un pourcentage de 0,27 %. Les variations excèdent quatre, cinq et six écarts-types pour, respectivement, 0,49 %, 0,24 % et 0,13 % de l'ensemble des jours. Le modèle log-normal prévoit que de tels écarts sont extrêmement

2. Ce tableau est repris de l'article de J. C. Hull et A. White, "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed", *Journal of Derivatives*, 5 (3), printemps 1998, 9-19.

rares. Le tableau conduit donc bien à étayer l'existence de queues de distribution plus épaisses et justifie, d'un point de vue pratique, l'utilisation du smile de volatilité par les traders (voir encadré 20.1).

Tableau 20.1 : Pourcentage du nombre de jours durant lesquels la variation du taux de change a été plus importante qu'un, deux… six écarts-types (EC = écart-type des variations quotidiennes)

	Univers réel (données constatées)	Modèle log-normal
>1 EC	23,32	31,73
>2 EC	4,67	4,55
>3 EC	1,30	0,27
>4 EC	0,49	0,01
>5 EC	0,24	0,00
>6 EC	0,13	0,00

Encadré 20.1 Faire de l'argent avec les options de change

Supposez que la plupart des traders pensent que les taux de change suivent une loi log-normale. Ils utiliseront alors la même volatilité pour évaluer toutes les options sur une même devise. Or, le tableau 20.1 montre que cette hypothèse n'est pas correcte. Que devez-vous faire alors ? Acheter des options (calls et puts) très en dehors sur toutes les devises et attendre. Ces options sont relativement bon marché et la proportion qui finira dans la monnaie est plus importante que ce qui est conforme à l'hypothèse de log-normalité. La valeur actuelle de vos flux futurs devrait être plus importante que le coût d'acquisition de ces options.

Au milieu des années 1980, quelques traders savaient que la distribution de probabilité des taux de change présentait des queues de distribution épaisses, alors que les autres s'appuyaient sur l'hypothèse de log-normalité. Les premiers ont adopté la stratégie décrite précédemment jusqu'à ce que, à la fin des années 1980, tout le monde utilise les smiles de volatilité pour évaluer les options, et ces opportunités disparurent.

Les raisons du smile de volatilité dans les options de change

Pourquoi les taux de change ne suivent-ils pas un mouvement brownien géométrique ? Il y a deux conditions pour que le prix d'un actif suive un tel processus :

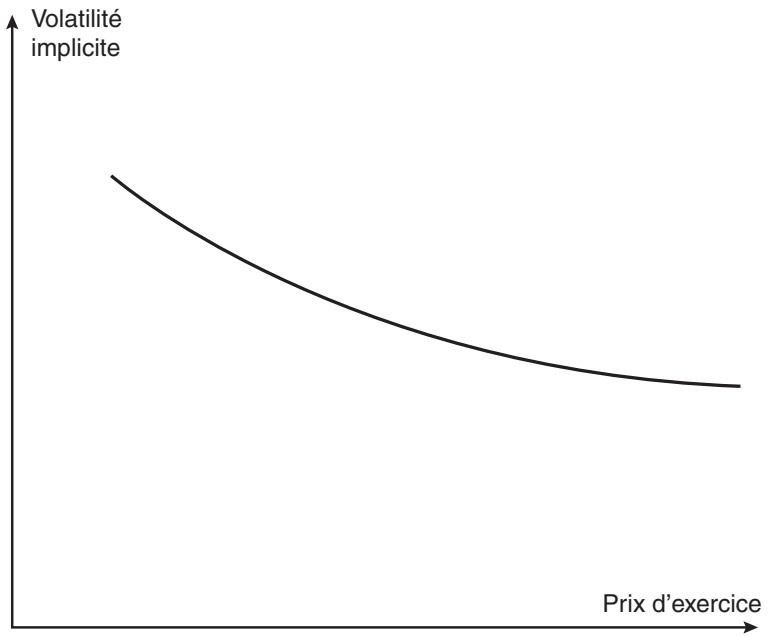
1. La volatilité doit être constante ;
2. Le cours doit varier régulièrement, sans sauts.

En pratique, aucune de ces deux conditions n'est satisfaite pour les taux de change. La volatilité d'un taux de change est loin d'être constante et les taux de change sont fréquemment l'objet de sauts [3]. L'instabilité de la volatilité, ajoutée à ces sauts dans le processus des taux de change, conduit à une augmentation de la probabilité de mouvements extrêmes.

L'impact, sur les options, des variations extrêmes et de l'instabilité de la volatilité du sous-jacent dépend de l'échéance des options. L'impact relatif de l'instabilité de la volatilité sur les cours des options croît avec la durée de vie de l'option, mais le smile de volatilité créé par l'instabilité de la volatilité devient généralement moins prononcé. En revanche, l'impact des variations extrêmes sur les cours et sur le smile de volatilité décroît quand la durée de vie de l'option augmente [4].

20.3 Les options sur actions

Le smile de volatilité n'était pas significatif avant le krach de 1987. Depuis lors, les courbes de volatilité utilisées par les traders pour évaluer les options sur actions ou sur indices ont généralement la forme présentée dans le graphique 20.3. On parle alors d'asymétrie de volatilité (*volatility skew*). La volatilité implicite est alors une fonction décroissante du prix d'exercice. Quand le prix du sous-jacent est très supérieur au prix d'exercice (un put très en dehors ou un call très en dedans), la volatilité utilisée est plus élevée que celle qui sert à évaluer un put très en dedans ou un call très en dehors.

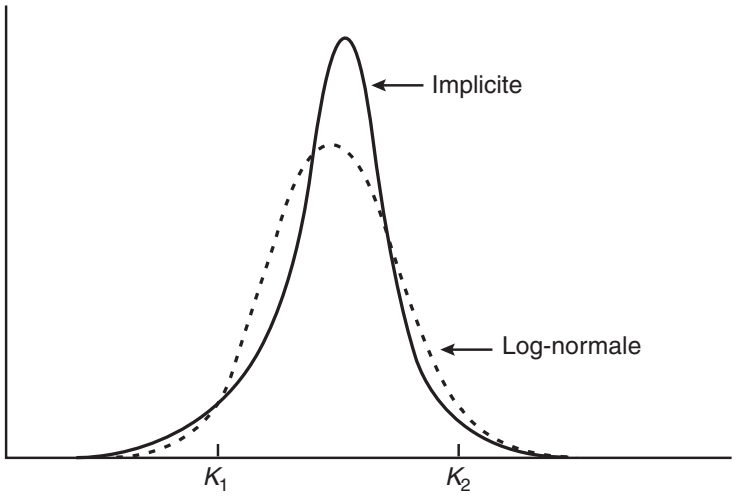


Graphique 20.3 : Le smile de volatilité des options sur actions

3. Ces variations sont souvent des réponses aux actions des banques centrales.

4. Pour des options longues, les sauts à la hausse et à la baisse tendent à se compenser, si bien que la différence entre la distribution des taux de change lorsqu'il y a de fortes variations et celle qui est obtenue avec des variations régulières est quasi imperceptible.

Le smile de volatilité des options sur actions induit une distribution de probabilité du cours du sous-jacent représentée par la courbe en gras du graphique 20.4. À titre de comparaison, une distribution log-normale de mêmes caractéristiques est représentée en pointillé. La queue de la distribution implicite située à gauche est plus épaisse que celle de la distribution log-normale. Le phénomène inverse est observé à l'extrémité droite de la distribution.



Graphique 20.4 : La distribution implicite et la distribution log-normale des options sur actions

Pour vérifier que les graphiques 20.3 et 20.4 sont bien cohérents entre eux, on peut adopter la même démarche que précédemment. Considérons des options très en dehors ; selon le graphique 20.4, un call très en dehors, de prix d'exercice K_2, a une valeur plus faible lorsque la distribution implicite est utilisée en lieu et place de la distribution log-normale. Ceci s'explique simplement ; l'option verse un payoff positif uniquement si le cours de l'action vient à dépasser K_2. Or la probabilité d'occurrence de cet événement est inférieure avec la distribution implicite. On peut donc attendre un prix plus faible pour l'option et une volatilité implicite moins importante – et c'est ce que l'on peut observer dans le graphique 20.3. Considérons à présent un put très en dehors, de prix d'exercice K_1 ; cette option procure un payoff positif si le cours de l'action descend en dessous de K_1. Le graphique 20.4 montre que la probabilité d'une telle baisse est plus forte avec la distribution implicite. On peut donc s'attendre à ce que la distribution implicite donne un prix plus élevé pour l'option et une volatilité implicite plus importante. C'est aussi ce que montre le graphique 20.3.

Les raisons du smile de volatilité des options sur actions

L'une des explications possibles du smile de volatilité des options sur actions réside dans l'effet de levier. Lorsque la valeur des fonds propres d'une société diminue, l'effet de levier de cette société augmente. Par conséquent, la volatilité de ses actions fait de même, rendant encore plus probable une baisse de la valeur des actions. Au contraire, lorsque la valeur des fonds propres augmente, l'effet de levier diminue et la volatilité des actions fait de même, rendant d'autant moins probable une hausse de la valeur des actions. Ce raisonnement montre que la volatilité des actions tend à être une fonction décroissante

du cours ; cela est conforme aux observations faites dans les graphiques 20.3 et 20.4. Une autre explication de ce phénomène est la « krachophobie » (voir encadré 20.2).

Quelles que soient les raisons de cette corrélation négative, elle signifie que la volatilité augmente quand les prix baissent, et cette augmentation de volatilité peut à son tour entraîner une baisse des prix supplémentaire. Un phénomène symétrique est observé en cas de hausse. Cela explique la queue de distribution épaisse à gauche et fine à droite sur la distribution implicite du graphique 20.4.

Encadré 20.2 Krachophobie

Il est intéressant de noter que la forme observée dans le graphique 20.3 n'existe en fait que depuis le krach d'octobre 1987. Avant cette date, les volatilités implicites étaient beaucoup moins dépendantes du prix d'exercice. Cela a conduit Mark Rubinstein à suggérer qu'une des raisons expliquant la forme du graphique 20.3 pouvait être une *krachophobie*. Les traders tiennent compte de la possibilité d'un autre krach, semblable à celui d'octobre 1987 ; ils évaluent donc les options en conséquence. Il y a plusieurs validations empiriques de la théorie de la krachophobie. Lorsque le marché baisse, le biais du graphique 20.3 tend à être plus prononcé et inversement.

20.4 Approches alternatives pour caractériser le smile de volatilité

Jusqu'à présent, nous avons défini le smile de volatilité comme la relation entre la volatilité implicite et le prix d'exercice de l'option. Cette relation dépend du prix du sous-jacent, c'est-à-dire du caractère plus ou moins en dehors (en dedans) de l'option. Par exemple, le point le plus bas sur le graphique 20.1 correspond le plus souvent à un prix d'exercice égal au taux de change courant (option à la monnaie). De même, sur le graphique 20.3, l'asymétrie de volatilité tend à se déplacer vers la droite quand le prix de l'action augmente et vers la gauche quand il diminue [5]. Pour ces raisons, le smile de volatilité est souvent représenté comme la relation entre la volatilité implicite et le ratio K/S_0 ; il est dans ce cas bien plus stable. Un raffinement supplémentaire consiste à utiliser au dénominateur le prix forward du sous-jacent (pour une échéance identique à celle de l'option), plutôt que le prix spot. En fait, il est d'ailleurs plus logique de définir une option à parité comme une option pour laquelle le prix d'exercice est égal au prix forward du sous-jacent. Cela se justifie car le prix forward est le prix futur espéré du sous-jacent à la date d'échéance de l'option (dans l'univers risque-neutre), date à laquelle le prix d'exercice sera payé ou reçu en cas d'exercice de l'option.

5. Les travaux de Derman tendent à montrer que cet ajustement s'opère avec une certaine inertie sur le marché des changes. Voir E. Derman, "Regimes and Volatility", *Risk*, avril 1999, 55-59.

On peut aussi représenter le smile de volatilité par la relation entre la volatilité implicite et le delta de l'option (défini au chapitre 19). Cela permet d'appliquer ce concept de smile à toutes sortes d'options autres qu'européennes ou américaines. Dans ce cas, un call (put) à la monnaie est un call (put) dont le delta est égal à 0,5 ($-0{,}5$). Ces options sont parfois appelées options « 50-delta ».

20.5 Structure par termes des volatilités et surface de volatilité

En plus du smile de volatilité, les traders tiennent compte de la structure par termes des volatilités lorsqu'ils évaluent des options. Concrètement, la volatilité utilisée pour évaluer une option à la monnaie dépend de la durée de vie de cette option. Elle tend à être une fonction croissante de la maturité lorsque les volatilités historiques à court terme sont faibles. Cela traduit le fait que les opérateurs anticipent une hausse de la volatilité. Symétriquement, la volatilité tend à être une fonction décroissante de la maturité lorsque les volatilités historiques à court terme sont élevées. Cela traduit également l'anticipation d'une baisse future de la volatilité.

Une surface de volatilité combine les smiles de volatilité et la structure par termes des volatilités ; elle est souvent présentée sous la forme d'un tableau donnant les volatilités implicites en fonction du prix d'exercice et de la durée de vie. Un exemple de surface de volatilité pour des options de change est donné dans le tableau 20.2.

Tableau 20.2 : Exemple de surface de volatilité

	Prix d'exercice				
	0,90	**0,95**	**1,00**	**1,05**	**1,10**
1 mois	14,2	13,0	12,0	13,1	14,5
3 mois	14,0	13,0	12,0	13,1	14,2
6 mois	14,1	13,3	12,5	13,4	14,3
1 an	14,7	14,0	13,5	14,0	14,8
2 ans	15,0	14,4	14,0	14,5	15,1
5 ans	14,8	14,6	14,4	14,7	15,0

Une des dimensions de ce tableau est le ratio K/S_0, l'autre la durée de vie résiduelle de l'option. Les éléments du tableau donnent les différentes valeurs de volatilité implicite calculées par le modèle de Black et Scholes. Pour chaque maturité, certaines données correspondent à des options liquides pour lesquelles les prix de marché sont fiables. Les autres éléments du tableau sont calculés par interpolation linéaire.

Lorsqu'une nouvelle option doit être évaluée, la volatilité appropriée est sélectionnée dans le tableau. Par exemple, pour évaluer une option d'échéance 9 mois et de ratio K/S_0 égal à 1,05, on procède à une interpolation entre 13,4 % et 14 % pour obtenir une volatilité à 13,7 %. C'est la volatilité utilisée dans la formule de Black et Scholes (ou dans le modèle d'arbre binomial).

La forme du smile de volatilité dépend de la durée de vie de l'option. Comme l'illustre le tableau 20.2, le smile tend à devenir moins prononcé quand la durée de vie augmente. Notons T le temps restant jusqu'à l'échéance et F_0 le prix forward d'un actif. Il est possible de définir le smile de volatilité comme une relation entre la volatilité implicite et la quantité :

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \ln\left(\frac{K}{F_0}\right)$$

plutôt que comme une relation liant directement la volatilité implicite et K. Le smile est alors beaucoup moins dépendant de la durée de vie de l'option.

20.6 Les grecques

Les formules du delta et des autres grecques données au chapitre 19 supposent que les volatilités implicites restent les mêmes quand les prix du sous-jacent évoluent [6]. Ce n'est pas ce qui se passe en général sur le marché. Considérons par exemple une option sur action ou sur indice. Le smile de volatilité a la forme illustrée au graphique 20.3. On observe deux phénomènes.

1. Quand le prix de l'action augmente (baisse), le ratio K/S diminue (augmente) et la volatilité s'accroît (baisse). En d'autres termes, la courbe de volatilité du graphique 20.3 se déplace vers le haut quand le prix de l'action augmente et vers le bas quand il baisse.
2. Il y a une corrélation négative entre le prix des actifs sous-jacents et leur volatilité implicite. Quand le prix du sous-jacent augmente (baisse), la courbe du graphique 20.3 se déplace vers le bas (haut).

C'est en général le second effet qui domine. Le delta qui permet de prendre en compte cette asymétrie est appelé *delta minimum variance*.

$$\Delta_{\text{MV}} = \frac{\partial f_{\text{BSM}}}{\partial S} + \frac{\partial f_{\text{BSM}}}{\partial \sigma_{\text{imp}}} \frac{\partial E(\sigma_{\text{imp}})}{\partial S}$$

où f_{BSM} représente la valeur du call du modèle de Black-Scholes-Merton, exprimé comme une fonction du cours du sous-jacent S et de la volatilité implicite σ_{imp}. On a donc :

$$\Delta_{\text{MV}} = \Delta_{\text{BSM}} + \nu_{\text{BSM}} \frac{\partial E(\sigma_{\text{imp}})}{\partial S}$$

où Δ_{BSM} et ν_{BSM} sont le delta et le vega du modèle de Black-Scholes-Merton (à volatilité constante). Comme le vega est positif et que la volatilité augmente quand S diminue, il s'ensuit que le delta minimum variance est inférieur à celui du modèle de Black-Scholes-Merton [7].

6. Il est intéressant de noter que ce modèle intuitif n'a de cohérence interne que si le smile de volatilité est plat pour toutes les maturités. Voir par exemple T. Daglish, J. C. Hull et W. Suo, "Volatility Surfaces : Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence", *Quantitative Finance*, 7 (5), octobre 2007, 507-524.

7. Pour une discussion détaillée, voir par exemple J. C. Hull et A. White, "Optimal Delta Hedging of Options", *Working Paper*, Université de Toronto, 2016.

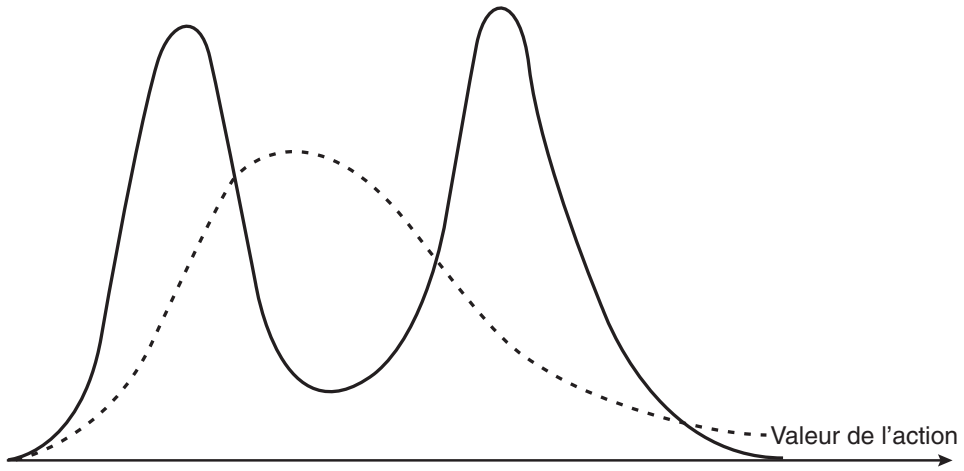
Le rôle du modèle

Si les traders sont prêts à utiliser une volatilité différente pour chacune des options, il est permis de s'interroger sur le rôle du modèle d'évaluation qui suppose une volatilité constante. On pourrait arguer que le modèle de Black et Scholes n'est rien de plus qu'un outil sophistiqué d'interpolation permettant de s'assurer que la valeur d'une option est conforme au prix de marché d'autres options liquides. Si les traders cessaient d'utiliser Black et Scholes et optaient pour un autre modèle plausible, la surface de volatilité changerait et la forme du smile également. Mais les cours sur les marchés ne varieraient sans doute pas sensiblement. Même les deltas resteraient relativement insensibles au changement de modèle.

Le choix du modèle a un impact plus important sur l'évaluation d'actifs dérivés exotiques quand il n'existe pas de marché liquide pour des dérivés analogues. Ce point sera exploré dans les chapitres suivants.

20.7 Cas de l'anticipation d'une seule variation extrême

Supposons qu'une action cote aujourd'hui 50 € et qu'une annonce importante attendue dans quelques jours soit susceptible de faire augmenter ou baisser le cours de 8 €. (Cette annonce peut concerner le résultat d'une tentative d'OPA ou le verdict d'un procès important.) La distribution de probabilité du cours de l'action dans, disons, trois mois peut alors être un mélange de deux distributions log-normales, la première correspondant à une annonce favorable, la seconde à une annonce défavorable. Cette situation est représentée dans le graphique 20.5. La ligne en gras montre le mélange des deux distributions log-normales pour le cours de l'action dans trois mois. La ligne en pointillé illustre une distribution log-normale de même moyenne et même écart-type que la distribution précédente.



Graphique 20.5 : Effet d'une seule variation importante : la courbe en gras représente la distribution réelle, la courbe en pointillé la distribution log-normale correspondante

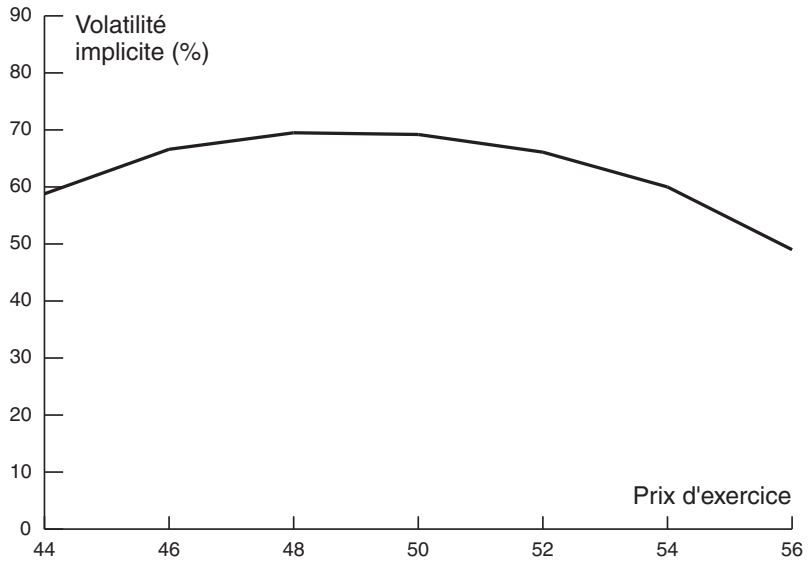
La vraie distribution de probabilité est en fait bimodale et certainement pas log-normale. Une façon aisée d'envisager ce cas est de considérer la situation extrême où la distribution est binomiale. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Supposons que le cours soit à 50 € et qu'il puisse augmenter ou baisser de 8 € dans un mois, et supposons de plus que le taux sans risque soit de 12 % par an. Les options peuvent alors être évaluées à l'aide du modèle binomial du chapitre 13. Les paramètres sont ici u = 1,16 ; d = 0,84 ; a = 1,0101 et p = 0,5314. Les résultats de l'évaluation de différentes séries d'options sont récapitulés dans le tableau 20.3.

Tableau 20.3 : Volatilités implicites quand la vraie loi est binomiale

Prix d'exercice	Prix du call (€)	Prix du put (€)	Volatilité implicite (%)
42	8,42	0,00	0,0
44	7,37	0,93	58,8
46	6,31	1,86	66,6
48	5,26	2,78	69,5
50	4,21	3,71	69,2
52	3,16	4,64	66,1
54	2,10	5,57	60,0
56	1,05	6,50	49,0
58	0,00	7,42	0,0

La première colonne indique les différents prix d'exercice, la deuxième donne le prix d'un call à un mois, la troisième le prix du put correspondant et la dernière la volatilité implicite calculée comme si le modèle de Black et Scholes avait été utilisé pour calculer les prix (comme nous l'avons montré à la section 20.1, la volatilité implicite est identique pour les deux types d'options dès que le prix d'exercice et l'échéance sont identiques). Le graphique 20.6 montre la courbe de volatilités obtenue.



Graphique 20.6 : Le smile de volatilité correspondant au tableau 20.3

Ce n'est pas ici un « sourire » mais plutôt une moue de tristesse ! En conséquence, la volatilité implicite calculée pour une option de prix d'exercice 50 € conduirait à surévaluer une option de prix d'exercice 44 € ou 56 €.

Résumé

Le modèle de Black et Scholes et ses extensions supposent que la distribution de probabilité de l'actif sous-jacent est log-normale à toute date. Cette hypothèse n'est pas celle envisagée par les traders. Ceux-ci supposent en général que les queues de cette distribution de probabilité sont asymétriques, plus épaisse à gauche et plus fine à droite, par rapport à la loi log-normale.

Les traders utilisent les courbes de volatilité pour tenir compte des écarts par rapport à la log-normalité. Le smile de volatilité définit la relation entre la volatilité implicite d'une option et son prix d'exercice. Pour les options sur actions, le smile est légèrement décroissant. Cela signifie que les puts en dehors de la monnaie et les calls dans la monnaie présentent des volatilités implicites élevées, alors que les calls en dehors de la monnaie et les puts dans la monnaie ont des volatilités implicites plus faibles. Pour les options de change, le smile de volatilité est en forme de U. Les options très en dehors de la monnaie ou fortement dans la monnaie ont donc des volatilités implicites plus élevées que les options à la monnaie.

Le plus souvent, les professionnels utilisent aussi une structure par termes des volatilités. La volatilité implicite d'une option dépend alors de sa durée de vie. Lorsque courbe de volatilité et structure par termes sont combinées, elles produisent une surface de volatilité. Celle-ci définit la volatilité implicite comme une fonction à la fois du prix d'exercice et de la durée de vie de l'option.

Références complémentaires

Bakshi G., C. Cao et Z. Chen, "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", *Journal of Finance*, 52 (5), décembre 1997, 2004-2049.

Bates D. S., "Post-87 Crash Fearsin the S&P Futures Market", *Journal of Econometrics*, 94, janvier/février 2000, 181-238.

Daglish, T., J. C. Hull et W. Suo, "Volatility Surfaces : Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence", *Quantitative Finance*, 7 (5), 2007, 507-524.

Derman E., "Regimes of Volatility", *RISK*, avril 1999, 55-59.

Ederington L. H. et W. Guan, "Why are Those Options Smiling", *Journal of Derivatives*, 10 (2), 2002, 9-34.

Jackwerth J. C. et M. Rubinstein, "Recovering Probability Distributions from Option Prices", *Journal of Finance*, 51, décembre 1996, 1611-1631.

Melick W. R. et C. P. Thomas, "Recovering an Asset's Implied Probability Density Function from Option Prices : An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32 (1), mars 1996, 91-116.

Reiswich, D. et U. Wystup, "FX Volatility Smile construction", *Working Paper*, Frankfurt School of Finance and Management, avril 2010.

RUBINSTEIN M., "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978", *Journal of Finance*, 40, juin 1985, 455-480.

Problèmes et exercices

20.1 Quel schéma de volatilité implicite est-il probable d'observer lorsque :

a. les deux queues de la distribution des cours d'actions sont moins épaisses que celles d'une distribution log-normale ?

b. la queue de droite est plus épaisse et celle de gauche plus fine par rapport à une distribution log-normale ?

20.2 Quel schéma de volatilité implicite est-il probable d'observer pour des options sur actions ?

20.3 Quel schéma de volatilité implicite observe-t-on en cas de variations extrêmes du cours de l'actif sous-jacent ? Ce schéma est-il plus prononcé pour une option à 2 ans ou pour une option à 3 mois ?

20.4 Un call et un put européens ont même prix d'exercice et même date d'échéance. Le call a une volatilité implicite de 30 % et le put a une volatilité implicite de 25 %. Quelles transactions pouvez-vous envisager ?

20.5 Expliquez pourquoi une distribution de probabilité avec une queue gauche (ou droite) plus (ou moins) épaisse que celle d'une loi log-normale conduit à une courbe de volatilité décroissante.

20.6 Un call européen cote 3,00 € et le modèle de Black et Scholes donne une valeur de 3,50 € avec une volatilité de 30 %. La valeur, selon le modèle de Black et Scholes, d'un put européen de même prix d'exercice et de même échéance est de 1,00 € avec la même volatilité. Quel devrait être le prix de marché de cette option ? Justifiez votre réponse.

20.7 Expliquez le terme « krachophobie ».

20.8 Le cours d'une action est actuellement de 20 €. Demain est attendue une information susceptible de faire varier le cours de 5 € à la hausse ou à la baisse. Quels sont les problèmes rencontrés si le modèle de Black et Scholes est utilisé pour évaluer une option sur cette action, d'échéance 1 mois ?

20.9 Quel schéma de volatilité implicite est-il probable d'observer pour des options d'échéance 6 mois lorsque la volatilité est incertaine et positivement corrélée avec le cours de l'action ?

20.10 Quels sont les problèmes principaux rencontrés lorsqu'on cherche à tester empiriquement un modèle d'évaluation d'options sur actions ?

20.11 Supposons que la politique d'une banque centrale soit de permettre la fluctuation d'un taux de change entre 0,97 et 1,03. Quel schéma de volatilités implicites, déduit des options de change correspondantes, vous attendriez-vous à observer ?

20.12 Les traders d'options qualifient parfois les options très en dehors d'options sur la volatilité. Pourquoi utilisent-ils ce terme ?

20.13 Un call européen sur une action a un prix d'exercice de 30 €, une durée de vie de 1 an et une volatilité implicite de 30 %. Un put européen sur cette même action a un prix d'exercice de 30 €, une durée de vie de 1 an et une volatilité implicite de 33 %. Quelle est l'opportunité d'arbitrage offerte à un trader ? Est-ce que l'arbitrage n'est possible que sous l'hypothèse de log-normalité sous-jacente de Black et Scholes ? Justifiez votre réponse de manière détaillée.

20.14 Supposons que le résultat d'une procédure judiciaire affectant la Société Générale doive être annoncé demain. Le cours de l'action Société Générale est actuellement de 60 €. Si l'issue est favorable à la Société Générale, il est prévu une hausse du cours de l'action qui coterait alors 75 €. Si elle est défavorable, le cours de l'action chuterait à 50 €. Quelle est la probabilité risque-neutre d'une annonce favorable ? Supposons que la volatilité annuelle de l'action Société Générale soit de 25 % pour les six mois suivant l'annonce si cette dernière est favorable, et qu'elle soit de 40 % si l'annonce est défavorable. Utilisez DerivaGem pour calculer la relation entre la volatilité implicite et le prix d'exercice d'une option européenne à 6 mois sur l'action Société Générale. Vous supposerez que la Société Générale ne verse aucun dividende et que le taux sans risque à 6 mois est de 6 %. Considérez des calls avec des prix d'exercice de 30 €, 40 €, 50 €, 60 €, 70 € et 80 €.

20.15 Un taux de change est actuellement à 0,8000. La volatilité de ce taux de change est égale à 12 % et les taux d'intérêt des deux pays sont les mêmes. À l'aide de l'hypothèse de log-normalité, estimez les probabilités que le taux de change dans trois mois soit (a) inférieur à 0,7000, (b) entre 0,7000 et 0,7500, (c) entre 0,7500 et 0,8000, (d) entre 0,8000 et 0,8500, (e) entre 0,8500 et 0,9000, et (f) supérieur à 0,9000. En vous fondant sur le smile de volatilité généralement observé sur le marché des changes, quelles estimations trouvez-vous trop faibles et trop élevées ?

20.16 Une action cote 40 €. Un call européen à 6 mois sur cette action, de prix d'exercice 30 €, fournit une volatilité implicite de 35 %. Un call européen à 6 mois sur la même action, de prix d'exercice 50 €, donne une volatilité implicite de 28 %. Le taux sans risque est de 5 % et aucun dividende n'est attendu. Expliquez pourquoi les deux volatilités implicites sont différentes. Utilisez DerivaGem pour calculer les valeurs des deux options. Servez-vous de la relation de parité call-put pour calculer les valeurs de deux puts à 6 mois de prix d'exercice 30 € et 50 €. Utilisez DerivaGem pour calculer les volatilités implicites de ces deux puts.

20.17 « Le modèle de Black et Scholes est utilisé par les traders comme un outil d'interpolation. » Commentez ce point de vue.

20.18 En utilisant le tableau 20.2, calculez la volatilité implicite qu'un trader utiliserait pour une option à 8 mois telle que $K/S_0 = 1{,}04$.

Questions complémentaires

20.19 Une action cote 4 € et la société n'est pas endettée. Un analyste estime la valeur de liquidation de la société à au moins 300 000 €, et il y a 100 000 actions en circulation. Quel smile de volatilité vous attendez-vous à observer ?

20.20 Une société attend actuellement l'issue d'un procès crucial. Le jugement doit être rendu dans un mois. Le cours de l'action est aujourd'hui de 20 €. Si l'issue du procès est favorable, le cours de l'action atteindra 24 € dans un mois. Sinon, le cours de l'action sera de 18 €. Le taux sans risque à 1 mois est de 8 % par an.

a. Quelle est la probabilité risque-neutre d'un jugement favorable ?

b. Quelles sont les valeurs d'options à 1 mois avec des prix d'exercice de 19 €, 20 €, 21 €, 22 € et 23 € ?

c. Utilisez DerivaGem pour calculer un smile de volatilité pour des calls à 1 mois.

d. Vérifiez que le même smile de volatilité est obtenu avec des puts à 1 mois.

20.21 Un prix futures est actuellement à 40 €. Le taux d'intérêt sans risque est de 5 %. Demain sont attendues des informations qui devraient conduire la volatilité des trois prochains mois à 10 % ou 30 %. Il y a 60 % de chances d'obtenir le premier résultat (10 % de volatilité) et 40 % d'obtenir le second (30 %). Utilisez DerivaGem pour calculer un smile de volatilité pour des options à 3 mois.

20.22 Le site www.pearson.fr fournit des données sur un certain nombre de devises. Choisissez une devise et utilisez les données pour produire un tableau similaire au tableau 20.1.

20.23 Des données sur un certain nombre d'indices d'actions sont fournies sur le site www.pearson.fr. Choisissez un indice et vérifiez si une baisse de plus de 3 écarts-types est plus fréquente qu'une hausse de plus de 3 écarts-types.

20.24 Soient un call européen et un put européen de même prix d'exercice et de même date d'échéance. Montrez que leur valeur varie du même montant lorsque la volatilité augmente d'un niveau σ_1 à un niveau σ_2 durant un court intervalle de temps. (Indication : utilisez la relation de parité call-put.)

20.25 Un taux de change est actuellement égal à 1,0 et les volatilités implicites des options européennes à 6 mois pour des prix d'exercice de 0,7 à 1,3 par pas de 0,1 sont respectivement 13 %, 12 %, 11 %, 10 %, 11 %, 12 % et 13 %. Les taux sans risque domestique et étranger sont égaux à 2,5 %. Calculez la distribution de probabilité implicite en utilisant une approche analogue à celle de l'exemple 20A.1 de l'annexe de ce chapitre. Comparez à la distribution log-normale obtenue avec une volatilité constante de 11,5 %.

20.26 Utilisez le tableau 20.2 pour calculer la volatilité implicite qu'un trader utiliserait pour une option à 11 mois avec un ratio $K/S_0 = 0{,}98$.

Annexe

Détermination de la distribution risque-neutre implicite à partir de smiles de volatilité

Le prix d'un call européen sur un actif avec un prix d'exercice K et une maturité T est donné par :

$$c = \mathrm{e}^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K)\ g\,(S_T)\, dS_T$$

où r est le taux d'intérêt (supposé constant), S_T le cours de l'actif en T, et g la fonction de densité de probabilité risque-neutre de S_T. En calculant la dérivée par rapport à K, on obtient :

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -\,\mathrm{e}^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g\,(S_T)\ dS_T$$

En dérivant à nouveau par rapport à K, on a :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = \mathrm{e}^{-rT}\, g\,(K)$$

La densité g s'écrit donc :

$$g\,(K) = \mathrm{e}^{rT}\, \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} \qquad (20A.1)$$

Ce résultat, dû à Breeden et Litzenberger (1978), permet d'estimer des distributions de probabilité risque-neutre à partir de smiles de volatilité [8]. Notons c_1, c_2, et c_3 les valeurs de calls de maturité T et de prix d'exercice respectifs $K-\delta$, K et $K+\delta$. En supposant que δ est petit, une estimation de $g(K)$ est donnée par :

$$\mathrm{e}^{rT}\, \frac{c_1 + c_3 - 2\,c_2}{\delta^2}$$

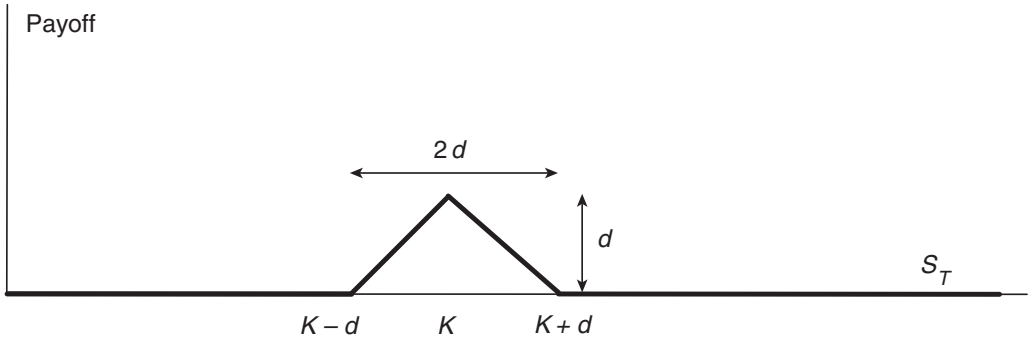
On peut illustrer cette formule par une approche différente en considérant un butterfly spread de prix d'exercice $K-\delta$, K et $K+\delta$ et de maturité T. Vous achetez donc deux calls de prix d'exercice respectifs $K-\delta$ et $K+\delta$ et vous vendez deux calls de prix d'exercice K. La valeur du spread est alors $c_1 + c_3 - 2c_2$. On peut aussi calculer cette valeur en intégrant son payoff par rapport à la distribution risque-neutre du prix du sous-jacent, notée $g(S_T)$, et en actualisant au taux sans risque. Le payoff du spread est donné au graphique 20A.1. Comme δ est proche de 0, on peut supposer que $g(S_T) = g(K)$ sur l'intervalle de prix $K-\delta < S_T < K+\delta$ sur lequel le payoff est non nul. La surface sur laquelle le payoff est non nul mesure $0{,}5 \times 2\delta \times \delta = \delta^2$. La valeur actuelle du payoff est donc $\mathrm{e}^{-rT}\, g(K)\, \delta^2$. Il s'ensuit :

$$\mathrm{e}^{-rT}\, g(K)\, \delta^2 = c_1 + c_3 - 2\,c_2$$

On peut alors déduire immédiatement :

$$g(K) = \mathrm{e}^{rT}\, \frac{c_1 + c_3 - 2\,c_2}{\delta^2} \qquad (20A.2)$$

8. Voir D. T. Breeden et R. H. Lintzenberger, "Prices of State-Contingent Claim Implicit in Option Prices", *Journal of Business*, 51, 1978, 621-651.



Graphique 20A.1 : Payoff d'un butterfly spread

■ **Exemple 20A.1** Considérons une action ne payant pas de dividendes et cotée 10 €, alors que le taux sans risque est de 3 %. Les volatilités implicites des options européennes à 3 mois pour des prix d'exercice allant de 6 € à 14 € par pas de 1 € sont décroissantes, de 30 % à 22 % par pas de 1 %. On peut appliquer les résultats précédents de la manière suivante.

Supposons que $g(S_T)$ soit constant sur l'intervalle $6 \leq S_T < 7$, constant sur l'intervalle $7 \leq S_T < 8$, etc. Définissons maintenant :

$$\begin{aligned} g(S_T) &= g_1 \text{ pour } 6 \leq S_T < 7 \\ g(S_T) &= g_2 \text{ pour } 7 \leq S_T < 8 \\ g(S_T) &= g_3 \text{ pour } 8 \leq S_T < 9 \\ &\vdots \\ g(S_T) &= g_8 \text{ pour } 13 \leq S_T < 14 \end{aligned}$$

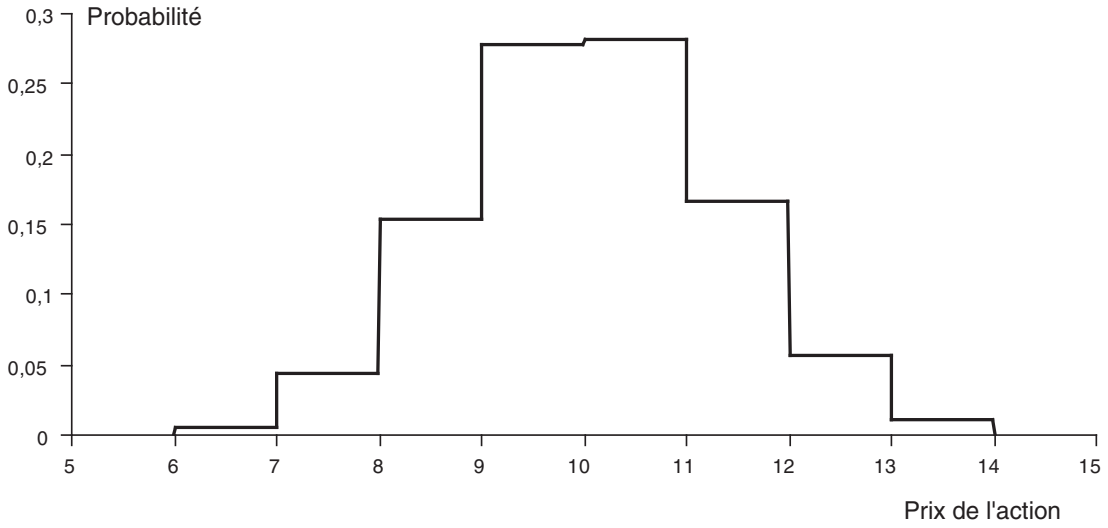
On peut calculer la valeur de g_1 par interpolation pour obtenir la volatilité implicite d'une option à 3 mois de prix d'exercice 6,5 € à 29,5 %. Les options de prix d'exercice 6 €, 6,5 € et 7 € ont donc des volatilités implicites respectives de 30 %, 29,5 % et 29 %. DerivaGem nous indique que les prix de ces options sont 4,045 €, 3,549 € et 3,055 €. L'équation (20A.2) appliquée à $K = 6{,}5$ € et $\delta = 0{,}5$ € donne :

$$g_1 = \frac{\mathrm{e}^{0{,}03 \times 0{,}25}\,(4{,}045 + 3{,}055 - 2 \times 3{,}549)}{0{,}5^2} = 0{,}0057$$

Des calculs analogues conduisent à :

$$\begin{aligned} g_2 &= 0{,}0444 \quad ; \quad g_3 = 0{,}1545 \quad ; \quad g_4 = 0{,}2781 \quad ; \quad g_5 = 0{,}2813 \\ g_6 &= 0{,}1659 \quad ; \quad g_7 = 0{,}0573 \quad ; \quad g_8 = 0{,}0113 \end{aligned}$$

Le graphique 20A.2 montre la distribution de probabilité implicite (on remarque que la surface totale sous la courbe n'est que de 0,9985, la probabilité que le prix de l'action soit inférieur à 6 ou supérieur à 14 est donc de 0,0015). Bien que cela ne saute pas aux yeux sur le graphique, cette distribution de probabilité a une queue gauche (ou droite) plus (ou moins) épaisse qu'une loi log-normale. Pour une telle loi avec une volatilité de 26 %, la probabilité de l'intervalle de prix entre 6 et 7 € est de 0,0031 (à comparer au résultat 0,0057 du graphique 20A.2) et celle de l'intervalle entre 13 et 14 € est de 0,0167 (à comparer au résultat 0,0113 du graphique 20A.2).



Graphique 20A.2 : Distribution de probabilité implicite pour l'exemple 20A.1

Chapitre 21

Les procédures numériques

Ce chapitre traite de trois procédures numériques permettant d'évaluer les produits dérivés pour lesquels il n'existe pas de résultat analytique exact du type formule de Black et Scholes. Les deux premières reposent sur le recours aux arbres binomiaux, présentés au chapitre 13, et aux simulations de Monte-Carlo, évoquées brièvement au chapitre 14 lors de la présentation des processus stochastiques. La dernière s'appuie sur la méthode des différences finies.

La simulation de Monte-Carlo est principalement utilisée pour évaluer les produits dérivés dont les payoffs dépendent de la trajectoire suivie par le prix de l'actif sous-jacent, ou sont fonction de plusieurs sous-jacents. Les arbres binomiaux et les méthodes des différences finies permettent, pour leur part, de gérer les situations dans lesquelles le détenteur du contrat doit prendre des décisions avant l'échéance. Outre l'évaluation des contrats, ces procédures permettent toutes de calculer les « lettres grecques », comme le delta, le gamma ou le vega.

Les procédures développées dans ce chapitre sont suffisantes pour traiter les problèmes d'évaluation de la plupart des actifs dérivés rencontrés dans la pratique. Cependant, il existe des cas particuliers n'entrant pas dans ce cadre. Les méthodes adéquates pour les traiter seront abordées au chapitre 27.

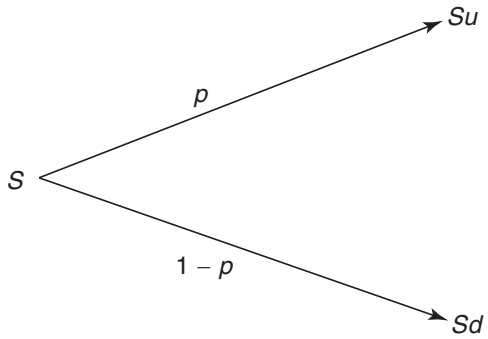
21.1 Les arbres binomiaux

Au chapitre 13, nous avons introduit les arbres binomiaux pour évaluer des options soit européennes, soit américaines. Les formules de Black et Scholes des chapitres 15, 17 et 18 fournissent une évaluation analytique des premières [1] ; il n'existe pas, en revanche, une telle solution (analytique) pour les secondes [2].

1. Les formules de Black et Scholes sont fondées sur les mêmes hypothèses que celles obtenues en utilisant les arbres binomiaux. Comme nous le montrons dans l'annexe au chapitre 13, quand le nombre de pas de temps tend vers l'infini, le prix « binomial » d'une option européenne converge vers celui donné par la formule de Black et Scholes.

2. Il existe des formules analytiques approximant la valeur d'une option américaine. Voir la note technique n° 8 sur le site www.pearson.fr pour une description de la méthode de l'approximation quadratique.

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 13, l'évaluation par la méthode binomiale consiste à diviser la durée de vie de l'option en intervalles de longueur Δt. Sur chacun de ces intervalles, le prix de l'actif passe de sa valeur initiale S à l'une des deux valeurs possibles, Sd ou Su. Ces mouvements sont représentés dans le graphique 21.1. En général, on a $u > 1$ et $d < 1$, aussi appelle-t-on le passage de S à Su un mouvement ***up***, et le passage de S à Sd un mouvement ***down***. Les probabilités respectives de ces deux variations sont notées p et $1 - p$.



Graphique 21.1 : Mouvements de prix de l'actif sur l'intervalle Δt dans un modèle binomial

L'évaluation risque-neutre

Le principe de l'évaluation risque-neutre, introduit aux chapitres 13 et 15, établit qu'une option (de même que tout autre produit dérivé) peut être évaluée dans un univers risque-neutre. Cela revient, dans une optique d'évaluation, à poser les hypothèses suivantes :

1. La rentabilité espérée de tout actif échangé sur le marché est le taux d'intérêt sans risque ;
2. Tout flux futur peut être évalué en actualisant sa valeur espérée au taux d'intérêt sans risque.

L'utilisation d'arbres binomiaux pour l'évaluation repose essentiellement sur ces hypothèses.

La détermination de *p, u* et *d*

Le choix de p, u et d est réalisé de façon à retrouver les valeurs exactes de la moyenne et de la variance de rentabilité de l'actif sur chaque intervalle de longueur Δt. Dans l'univers risque-neutre, la rentabilité espérée d'une action doit être le taux d'intérêt sans risque, r. Supposons que l'actif produise un taux de dividende égal à q. Le gain espéré en capital sur ce titre est alors $r - q$. Cela signifie qu'à la fin d'un intervalle de longueur Δt, l'action de prix initial S aura une valeur espérée égale à $S\,\mathrm{e}^{(r-q)\Delta t}$. Pour retrouver dans l'arbre la rentabilité espérée de l'actif, les paramètres doivent vérifier :

$$S\,\mathrm{e}^{(r-q)\Delta t} = p\,S\,u + (1-p)\,S\,d$$

ou encore :

$$\mathrm{e}^{(r-q)\Delta t} = p\,u + (1-p)\,d \tag{21.1}$$

La variance d'une variable X est définie par $E(X^2)-[E(X)]^2$. Si l'on note R la variation du prix de l'actif sur un intervalle Δt exprimée en pourcentage, 1 + R vaut u avec une probabilité p et d avec une probabilité $1-p$. En reprenant l'équation (21.1), la variance de 1 + R est donc :

$$p\,u^2 + (1-p)\,d^2 - \mathrm{e}^{2(r-q)\Delta t}$$

L'ajout d'une constante à une variable ne modifie pas sa variance, aussi la variance de R et celle de 1 + R sont-elles égales. Comme nous l'avons montré à la section 15.4 la variance de rentabilité de l'actif est égale à $\sigma^2\Delta t$ et l'on peut écrire :

$$p\,u^2 + (1-p)\,d^2 - \mathrm{e}^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

En remplaçant p par sa valeur dans l'équation (21.1), cette expression se réduit à :

$$\mathrm{e}^{(r-q)\Delta t}(u+d) - u\,d - \mathrm{e}^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2\Delta t \tag{21.2}$$

Les équations (21.1) et (21.2) constituent deux premières conditions sur la valeur des paramètres p, u et d. Cox, Ross et Rubinstein (1979) [3] imposent comme contrainte supplémentaire :

$$u = \frac{1}{d} \tag{21.3}$$

Ces trois conditions impliquent, si l'on ignore les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt [4], les valeurs suivantes des paramètres :

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{21.4}$$

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{21.5}$$

$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{21.6}$$

avec :

$$a = \mathrm{e}^{(r-q)\Delta t} \tag{21.7}$$

La variable a est parfois appelée facteur de capitalisation ou taux de croissance. Les équations (21.4) à (21.7) sont cohérentes avec les résultats présentés aux sections 13.8 et 13.11.

L'arbre d'évolution des prix de l'action

Le graphique 21.2 représente l'arbre d'évolution des prix de l'action utilisé dans les modèles binomiaux. À la date initiale, le prix S_0 de l'actif est connu. À la date Δt, deux

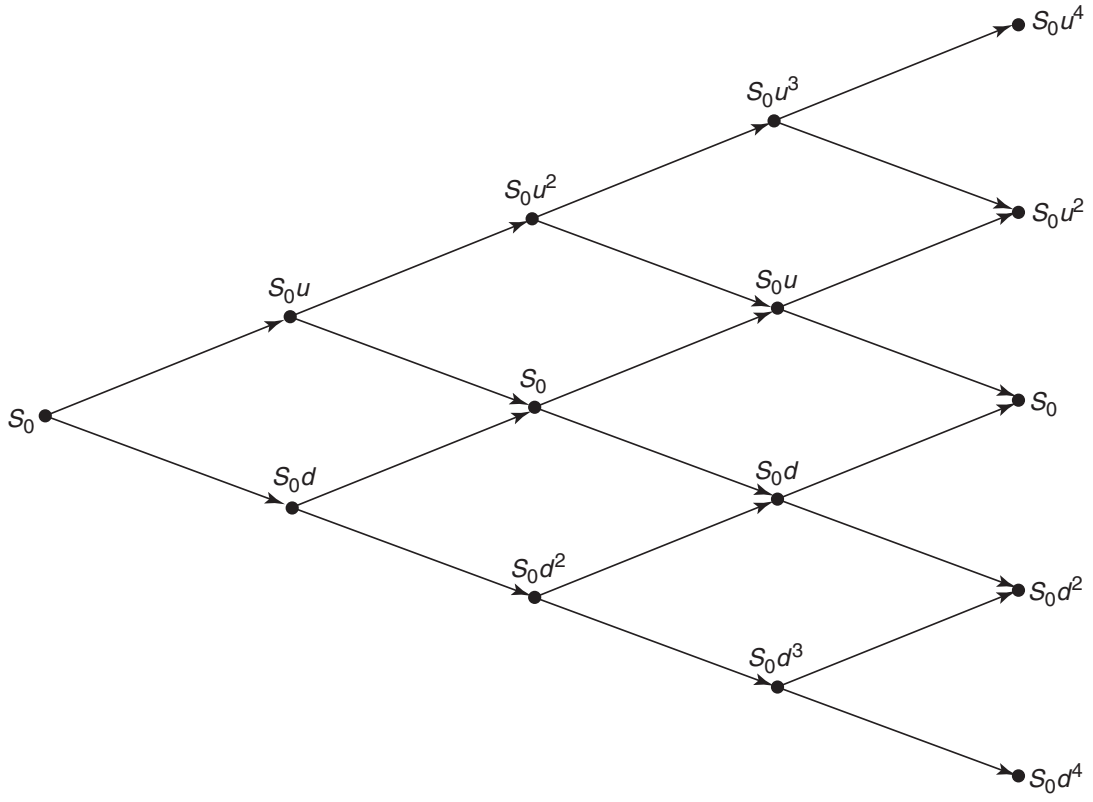
3. Voir J. C. Cox, S. A. Ross et M. Rubinstein, "Option Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, 229-263.

4. Il est facile de montrer ces résultats. On peut tout d'abord noter que les équations (21.4) et (21.7) satisfont exactement les contraintes (21.1) et (21.3). La fonction exponentielle e^x peut être développée sous la forme $1+x+x^2/2+\ldots$ Si on ignore les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt, les équations (21.5) et (21.6) peuvent s'écrire $u = 1+\sigma\sqrt{\Delta t}+1/2\,\sigma^2\Delta t$ et $d = 1-\sigma\sqrt{\Delta t}+1/2\,\sigma^2\Delta t$. En outre, $\mathrm{e}^{(r-q)\Delta t} = 1+(r-q)\Delta t$ et $\mathrm{e}^{2(r-q)\Delta t} = 1+2(r-q)\Delta t$. On voit par substitution de tous ces termes par leur développement que la contrainte (21.2) est bien vérifiée quand les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés.

prix peuvent être atteints, $S_0\,u$ et $S_0\,d$; à la date $2\Delta t$, trois prix peuvent être atteints, $S_0\,u^2$, S_0 et $S_0\,d^2$; et ainsi de suite. D'une manière générale, il existe $i+1$ prix possibles pour l'action à la date $i\Delta t$, égaux à :

$$S_0\,u^j\,d^{i-j},\ j=0,\,1,\,\ldots,\,i$$

L'arbre représenté dans le graphique 21.2 a été construit en imposant la condition supplémentaire $u = 1/d$. Tout mouvement up suivant un mouvement down annule donc le précédent, et inversement. Ainsi, par exemple, le prix de l'actif pour $j = 2$ et $i = 3$ est $S_0\,u^2\,d = S_0\,u$. En outre, quel que soit le nœud de départ, un mouvement up suivi d'un mouvement down conduit donc au même prix qu'un mouvement down suivi d'un mouvement up. L'arbre est alors dit recombinant.



Graphique 21.2 : Arbre binomial utilisé pour l'évaluation d'options sur un support de prix initial S_0

L'évaluation par induction arrière

Les options sont évaluées par induction arrière, en partant de la fin de l'arbre qui correspond à la date d'échéance T et en revenant vers la date initiale. À la date d'échéance, la formulation de la valeur de l'option est connue. Ainsi, un put vaut $\max(K - S_T\,;0)$ et un call $\max(S_T - K\,;0)$, où S_T désigne le prix de l'action à la date T, et K le prix d'exercice. Comme l'univers dans lequel on se situe est supposé risque-neutre, la valeur à chaque nœud de la date $T-\Delta t$ peut être calculée comme la valeur espérée à la date T actualisée au taux d'intérêt sans risque r sur une durée Δt. De même, la valeur à tout nœud de la date $T-2\Delta t$ peut être calculée comme la valeur espérée à la date $T-\Delta t$ actualisée sur une durée Δt au taux r, et ainsi de suite jusqu'à la date initiale. Pour les

options américaines, il est nécessaire de vérifier à chaque nœud de l'arbre si l'exercice immédiat est préférable à la détention de l'option pour une période Δt supplémentaire. La valeur de l'option à la date 0 est ainsi déterminée par induction arrière sur l'ensemble des nœuds.

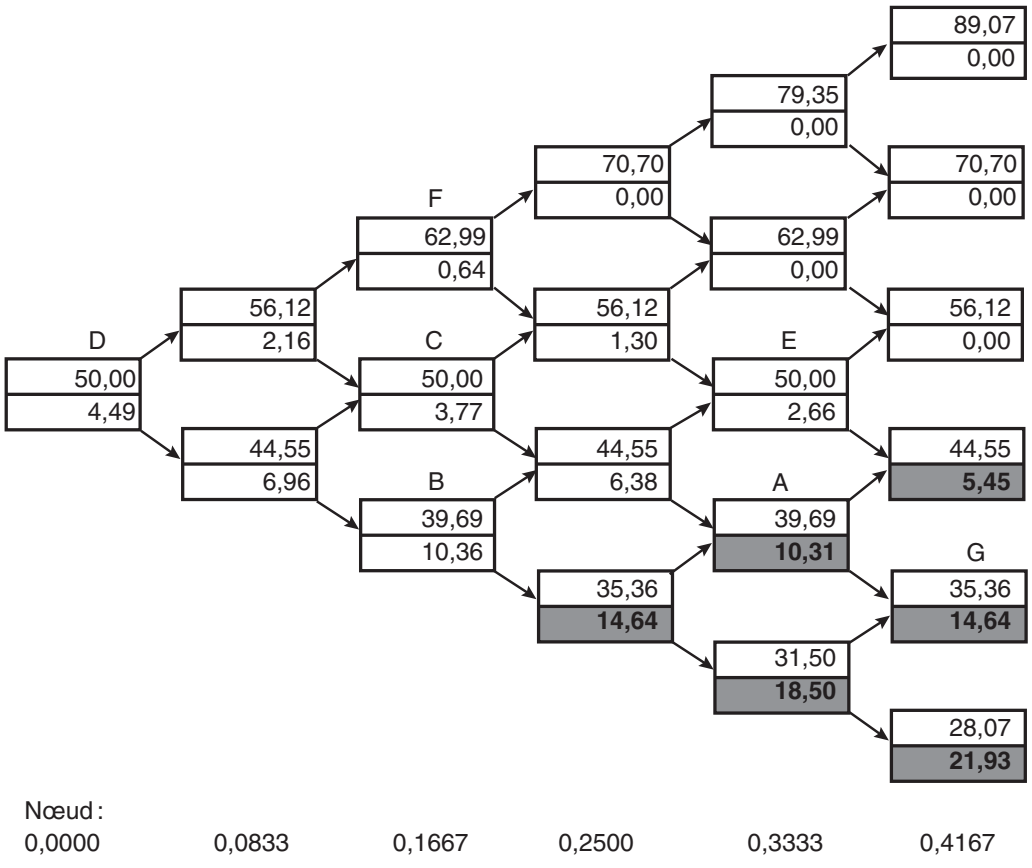
■ **Exemple 21.1** Prenons le cas d'une option de vente américaine d'échéance 5 mois et de prix d'exercice 50 €, portant sur une action ne versant pas de dividendes. L'action cote 50 €, sa volatilité est estimée à 40 % par an et le taux sans risque est égal à 10 % par an. Avec les notations adoptées précédemment, nous avons $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}40$, $T = 0{,}4167$ et $q = 0$. Nous pouvons diviser la vie de l'option en cinq intervalles d'un mois (0,0833 année) et construire l'arbre binomial correspondant. Pour cette valeur $\Delta t = 0{,}0833$, les équations (21.4) à (21.7) s'écrivent :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}1224, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0{,}8909$$

$$a = e^{r\Delta t} = 1{,}0084, \quad p = \frac{a-d}{u-d} = 0{,}5073$$

$$1 - p = 0{,}4927$$

Le graphique 21.3 représente l'arbre binomial construit avec DerivaGem.



Graphique 21.3 : Arbre binomial du put américain sur une action ne versant pas de dividendes (exemple 21.1) construit par DerivaGem

Deux valeurs différentes apparaissent à chaque nœud, le prix de l'action dans la cellule du haut et la valeur de l'option dans la cellule du bas. À tout nœud de l'arbre, les probabilités respectives des mouvements up et down sont égales à 0,5073 et 0,4927.

Au j-ème nœud ($j = 0,1,\ldots,i$) de la date $i\Delta t$ ($i = 0,1,\ldots,5$), le prix de l'action est égal à $S_0 u^j\, d^{i-j}$. Ainsi, le prix de l'action au nœud A, auquel on a observé trois mouvements down suivis d'un mouvement up (i = 4, j = 1), est égal à

$$50 \times 1{,}1224 \times 0{,}8909^3 = 39{,}69 \text{ €}$$

La valeur de l'option est égale à $\max(K - S_T\,;0)$ aux nœuds terminaux. Au nœud G, par exemple, l'option vaut $\max(50 - 35{,}36\,;0) = 14{,}64$. Les valeurs correspondant à l'avant-dernière date sont calculées à partir de celles de la date terminale. Pour un nœud donné, nous supposons dans un premier temps que l'option n'est pas exercée. Dans ce cas, la valeur de l'option est sa valeur espérée à la date suivante, actualisée au taux sans risque. Pour le nœud E, on obtient :

$$(0{,}5073 \times 0 + 0{,}4927 \times 5{,}45)\ \mathrm{e}^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 2{,}66$$

alors qu'au nœud A, les calculs conduisent à :

$$(0{,}5073 \times 5{,}45 + 0{,}4927 \times 14{,}64)\ \mathrm{e}^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 9{,}90$$

Dans un second temps, nous devons vérifier dans quelle mesure l'exercice anticipé n'est pas optimal, c'est-à-dire préférable à l'attente. Au nœud E, l'exercice anticipé ne rapporterait rien puisque le prix d'exercice est égal au prix de l'action, 50 €, ce qui donnerait une valeur nulle à l'option. Il est clairement préférable de conserver l'option. La valeur correcte de l'option au nœud E est donc 2,66 €. Les conditions ne sont pas les mêmes au nœud A. Si l'option est exercée prématurément, elle rapporte alors 50 € − 39,69 €, soit 10,31 €. C'est plus que les 9,90 € calculés précédemment. Dans ces conditions, si le nœud A est atteint, l'option devrait être exercée prématurément et la valeur correcte de l'option à ce nœud est 10,31 €.

Le principe de calcul est identique pour tous les nœuds de l'arbre. Cependant, l'exercice anticipé de l'option dans la monnaie n'est pas toujours optimal. Le nœud B illustre cette situation. L'exercice de l'option rapporte 50 € − 39,69 €, soit 10,31 €, alors que sa valeur, si on n'exerce pas, est donnée par :

$$(0{,}5073 \times 6{,}38 + 0{,}4927 \times 14{,}64)\ \mathrm{e}^{-0{,}10 \times 0{,}0833} = 10{,}36$$

L'option vaut donc 10,36 € et l'exercice prématuré n'est pas optimal.

En procédant ainsi jusqu'à la date 0, on trouve une valeur de 4,49 € au nœud initial, ce qui constitue notre estimation numérique de la valeur courante de l'option. En pratique, on choisit des périodes Δt plus courtes mais plus nombreuses. Les prix de l'option obtenus avec DerivaGem pour 30, 50, 100 et 500 périodes sont respectivement égaux à 4,263, 4,272, 4,278 et 4,283.

La traduction algébrique de la méthode binomiale

Considérons une option américaine dont la durée de vie a été divisée en N périodes de durée Δt. Notons (i,j) le j-ème nœud de la date $i\Delta t$, avec $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq i$, et $f_{i,j}$ la valeur de l'option au nœud (i,j). À ce même nœud, le prix de l'actif sous-jacent est $S_0\, u^j\, d^{i-j}$. Si l'option est un call, sa valeur à la date d'échéance T est $\max(S_T - K\,;0)$, de sorte que :

$$f_{N,j} = \max(S_0\, u^j\, d^{N-j} - K\,;0), \quad j = 0,\, 1,\ldots,\, N$$

Si l'option est un put, sa valeur à l'échéance s'écrit $\max(K - S_T\,;0)$ et on a :

$$f_{N,j} = \max(K - S_0\,u^j\,d^{N-j}\,;0), \quad j = 0,\,1,\ldots,\,N$$

De la date $i\Delta t$ à la date $(i+1)\Delta t$, l'action passe du nœud (i,j) au nœud $(i+1,j+1)$ avec une probabilité p, et au nœud $(i+1,j)$ avec une probabilité $1-p$. En supposant que l'option n'est pas exercée prématurément, l'évaluation risque-neutre conduit à :

$$f_{i,j} = \mathrm{e}^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)\,f_{i+1,j}]$$

pour $0 \leq i \leq N-1$ et $0 \leq j \leq i$. On compare cette valeur de $f_{i,j}$ à la valeur intrinsèque de l'option à chaque nœud précédant la date d'échéance, afin de prendre en compte la possibilité d'exercice anticipé, de sorte que la valeur du call est :

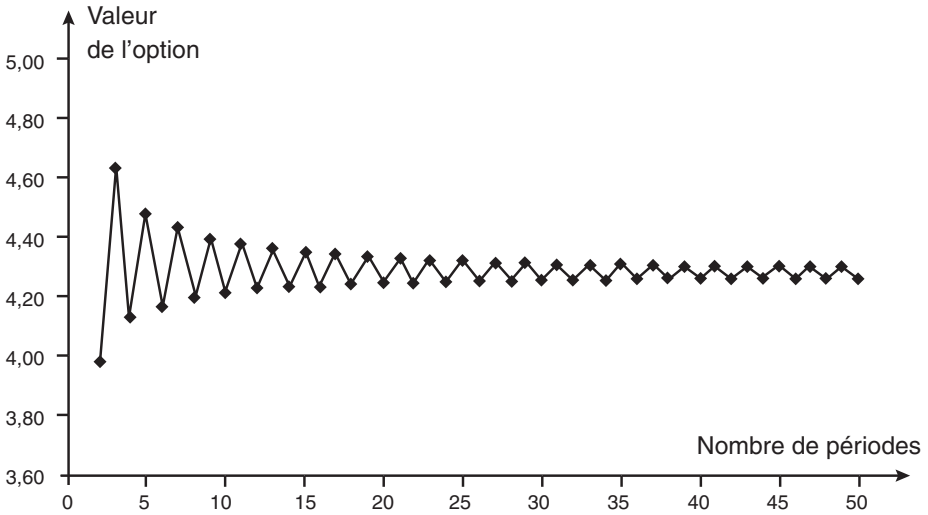
$$f_{i,j} = \max\{S_0\,u^j\,d^{i-j} - K\;;\;\mathrm{e}^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)\,f_{i+1,j}]\}$$

et celle du put :

$$f_{i,j} = \max\{K - S_0\,u^j\,d^{i-j}\;;\;\mathrm{e}^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)\,f_{i+1,j}]\}$$

Notez que, l'induction arrière étant conduite à partir de la date d'échéance T, la valeur à la date $i\Delta t$ intègre non seulement la possibilité d'exercice anticipé en date $i\Delta t$, mais aussi à toutes les dates postérieures, jusqu'à l'échéance.

La valeur exacte de l'option de vente américaine est obtenue en faisant tendre la durée des périodes Δt vers 0, mais dans la pratique, un découpage en $N = 30$ périodes donne des résultats généralement satisfaisants. Le graphique 21.4 illustre la convergence du prix de l'option pour l'exemple 21.1.



Graphique 21.4 : Convergence du prix de l'option de l'exemple 21.1 obtenue avec les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem

Ce graphique a été obtenu à l'aide des fonctions du développeur d'applications contenu dans DerivaGem (ici, nous avons utilisé l'application A).

L'estimation du delta et des autres lettres grecques

Rappelons que le delta d'une option, noté Δ, est le taux de variation de son prix par rapport à une modification du prix de l'actif sous-jacent. Si on note ΔS une petite

variation du prix du sous-jacent et Δf la variation correspondante du prix de l'option, le delta peut être estimé par :

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

À la date Δt, la valeur estimée de l'option est $f_{1,1}$ en cas de hausse du prix du sous-jacent à $S_0\,u$, et $f_{1,0}$ en cas de baisse à $S_0\,d$. Ainsi, pour une variation $\Delta S = S_0\,u - S_0\,d$, la valeur de Δf est $f_{1,1} - f_{1,0}$. Une estimation du Δ à la date Δt est alors donnée par :

$$\Delta = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{S_0\,u - S_0\,d} \tag{21.8}$$

Pour déterminer le gamma, noté Γ, on utilise deux estimations du delta à la date $2\Delta t$. Pour la valeur de l'action $S = \frac{1}{2}\,(S_0\,u^2 + S_0)$, c'est-à-dire à mi-chemin entre le deuxième et le troisième nœud, le delta vaut $(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0\,u^2 - S_0)$; pour la valeur de l'action $S = \frac{1}{2}\,(S_0 + S_0\,d^2)$, c'est-à-dire à mi-chemin entre le premier et le deuxième nœud, le delta vaut $(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0\,d^2)$. Si l'on note h la différence entre ces deux valeurs de S, on a :

$$h = 0{,}5\,(S_0\,u^2 - S_0\,d^2)$$

Le gamma est égal à la variation du delta divisée par h :

$$\Gamma = \frac{[(f_{2,2} - f_{2,1})\,/\,(S_0\,u^2 - S_0)] - [(f_{2,1} - f_{2,0})\,/\,(S_0 - S_0\,d^2)]}{h} \tag{21.9}$$

On dispose ainsi d'estimations du delta pour la date Δt et du gamma pour la date $2\Delta t$. En pratique, ces valeurs servent aussi d'estimation du delta et du gamma pour la date initiale [5].

L'arbre permet encore d'obtenir directement un paramètre de couverture supplémentaire, le thêta, noté Θ. Il s'agit du taux de variation du prix de l'option par rapport au temps, toutes choses égales par ailleurs. La valeur de l'option est $f_{0,0}$ en date 0 et $f_{2,1}$ en date $2\Delta t$. Une estimation du thêta est alors donnée par :

$$\Theta = \frac{f_{2,1} - f_{0,0}}{2\Delta t} \tag{21.10}$$

En revanche, pour déterminer le vega, il est nécessaire de construire un autre arbre pour lequel on aura fait varier la volatilité de $\Delta\sigma$, tout en gardant la même durée de période Δt. La différence entre la nouvelle valeur de l'option f^* et celle qui correspond à l'arbre original permet alors l'estimation du vega :

$$\nu = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

Le rhô peut être obtenu en suivant le même principe.

5. Dans le cas où une précision plus importante est nécessaire pour le delta et le gamma, on peut faire débuter l'arbre binomial à la date $-2\Delta t$ et supposer que le prix est S_0 à cette date. Le prix de l'option à la date zéro sera alors calculé pour trois prix différents de l'action.

■ **Exemple 21.2** Reprenons l'exemple 21.1. On peut lire dans le graphique 21.3 les valeurs de $f_{1,0}$ = 6,96 et de $f_{1,1}$ = 2,16. L'équation (21.8) donne une estimation du delta de :

$$\frac{2{,}16 - 6{,}96}{56{,}12 - 44{,}55} = -0{,}41$$

D'après l'équation (21.9), l'estimation du gamma de l'option peut être obtenue à partir de la valeur de l'option aux nœuds B, C et F :

$$\frac{[(0{,}64 - 3{,}77) \,/\, (62{,}99 - 50{,}00)] - [(3{,}77 - 10{,}36) \,/\, (50{,}00 - 39{,}69)]}{11{,}65} = 0{,}03$$

D'après l'équation (21.10), une estimation du thêta de l'option peut être obtenue à partir des valeurs aux nœuds D et C.

$$\Theta = \frac{3{,}77 - 4{,}49}{0{,}1667} = -4{,}3 \text{ par an}$$

Cela correspond à une variation de $-0{,}012$ par jour. Bien entendu, il ne s'agit là que d'estimations grossières. Leur précision s'accroît à mesure qu'on augmente le nombre de périodes. Les estimations respectives du delta, du gamma et du thêta données par DerivaGem pour 50 périodes sont $-0{,}415$, 0,034 et $-0{,}0117$. En changeant de manière marginale les paramètres de volatilité et de taux sans risque, on obtient des estimations de vega et rhô égales à 0,123 et $-0{,}072$.

21.2 L'évaluation des options sur indices, sur devises et contrats futures à partir des arbres binomiaux

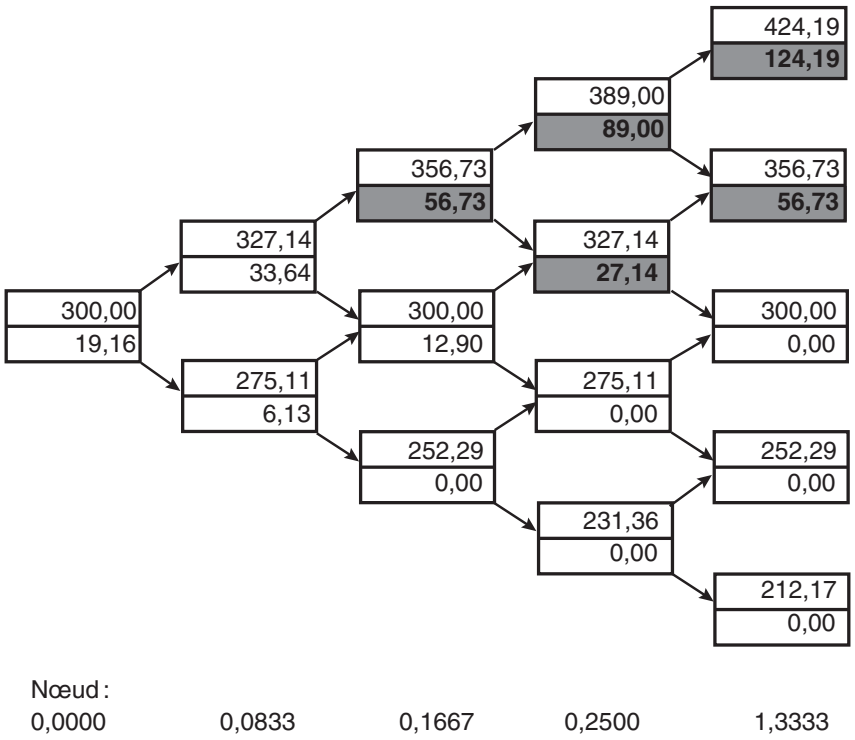
Nous avons expliqué aux chapitres 13, 17 et 18 que les indices, les devises et les contrats futures pouvaient être considérés, dans l'optique de l'évaluation, comme des actifs versant des taux de dividende connus. Dans le cas d'un indice, le taux de dividende est celui du portefeuille composant l'indice ; pour une devise, c'est le taux d'intérêt de la devise étrangère ; dans le cas du contrat futures, c'est le taux d'intérêt sans risque. La méthode binomiale est ainsi utilisable pour des options sur ces divers supports, à condition d'interpréter correctement le paramètre q de l'équation (21.7).

■ **Exemple 21.3** Prenons le cas d'un call américain sur un contrat futures d'indice boursier de maturité 4 mois. Le prix futures est initialement 300, de même que le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque est égal à 8 % et la volatilité de l'indice est estimée à 30 %. Pour la construction de l'arbre binomial, la durée de vie de l'option est divisée en quatre périodes d'un mois. On a donc $F_0 = 300$, $K = 300$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}3$, $T = 0{,}3333$ et $\Delta t = 0{,}0833$. Un contrat futures peut être assimilé à une action versant
des dividendes au taux r, aussi la valeur de q à introduire dans l'équation (21.7) est r, ce qui donne a = 1. Les autres paramètres de l'arbre binomial sont les suivants :

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1{,}0905, \quad d = \frac{1}{u} = 0{,}9170$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0{,}4784, \;\; 1 - p = 0{,}5216$$

Le graphique 21.5 représente l'arbre construit par DerivaGem (la valeur du haut est le prix futures et celle du bas le prix de l'option). L'estimation du prix de l'option est de 19,16, mais il convient d'augmenter le nombre de périodes pour avoir une plus grande précision. Pour 50 et 100 périodes, les prix donnés par DerivaGem sont respectivement égaux à 20,18 et 20,22.



Graphique 21.5 : Arbre binomial du call américain sur contrat futures d'indice (exemple 21.3) construit par DerivaGem

■ **Exemple 21.4** Un put américain sur la livre sterling (GBP) a une maturité de 1 an et un prix d'exercice de 1,6000 $. La livre sterling s'échange actuellement à 1,6100 $, les taux d'intérêt sans risque en dollars US et en livres sterling valent respectivement 8 % et 9 %, et la volatilité du taux de change livre sterling/dollar US est estimée à 12 %. On peut donc écrire S_0 = 1,61, K = 1,60, r = 0,08, r_f = 0,09, σ = 0,12, T = 1. Avec des sous-périodes d'une durée de 3 mois, on a Δt = 0,25. Dans le cas de contrats d'options sur devises, $q = r_f$, et l'équation (21.7) donne :

$$a = \mathrm{e}^{(0,08\ -\ 0,09)\ \times\ 0,25} = 0,9975$$

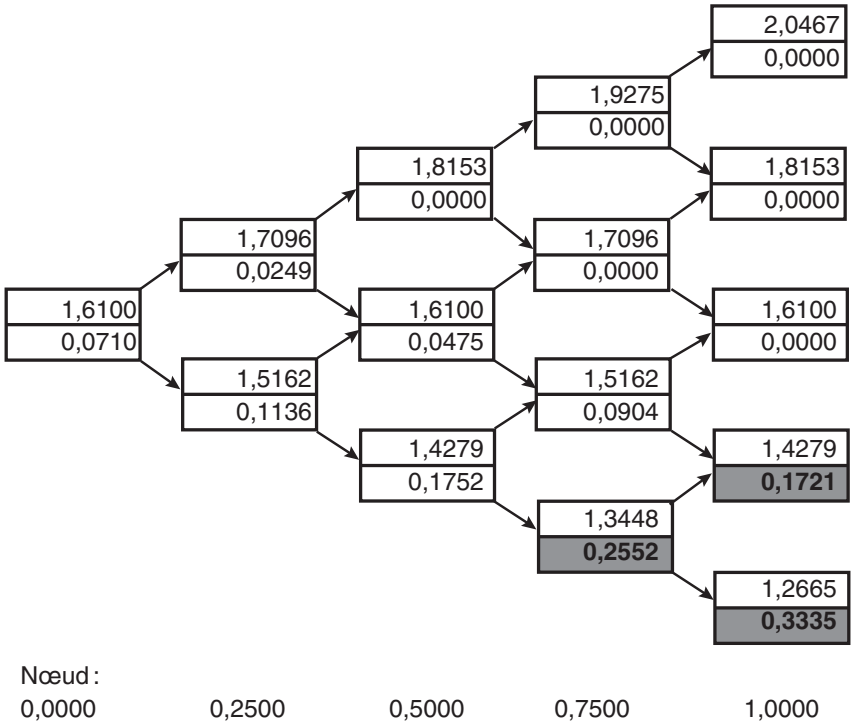
Les autres paramètres de l'arbre binomial sont :

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1,0618, \quad d = \frac{1}{u} = 0,9418$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0,4642, \quad 1 - p = 0,5358$$

Le graphique 21.6 représente l'arbre construit par DerivaGem (la valeur du haut est le taux de change et celle du bas le prix de l'option). Le prix de l'option est ici

0,0710 $. (Pour 50 et 100 périodes, le prix donné par DerivaGem est dans les deux cas 0,0738.)



Graphique 21.6 : Arbre binomial du put américain sur devises (exemple 21.4) construit par DerivaGem

21.3 Le modèle binomial pour les actions versant des dividendes

Nous allons maintenant évaluer les options dans la situation plus délicate où l'action sous-jacente verse des dividendes. Comme au chapitre 15, nous appellerons ici *dividende* la diminution du prix de l'action à la date ex-dividende résultant du paiement du dividende.

Dividende proportionnel connu

Pour les options sur actions ayant une durée de vie longue, on suppose souvent, par souci de simplicité, que l'action verse des dividendes à un taux connu q. Dans ce cas, ces options peuvent être évaluées de la même façon que les options sur indices.

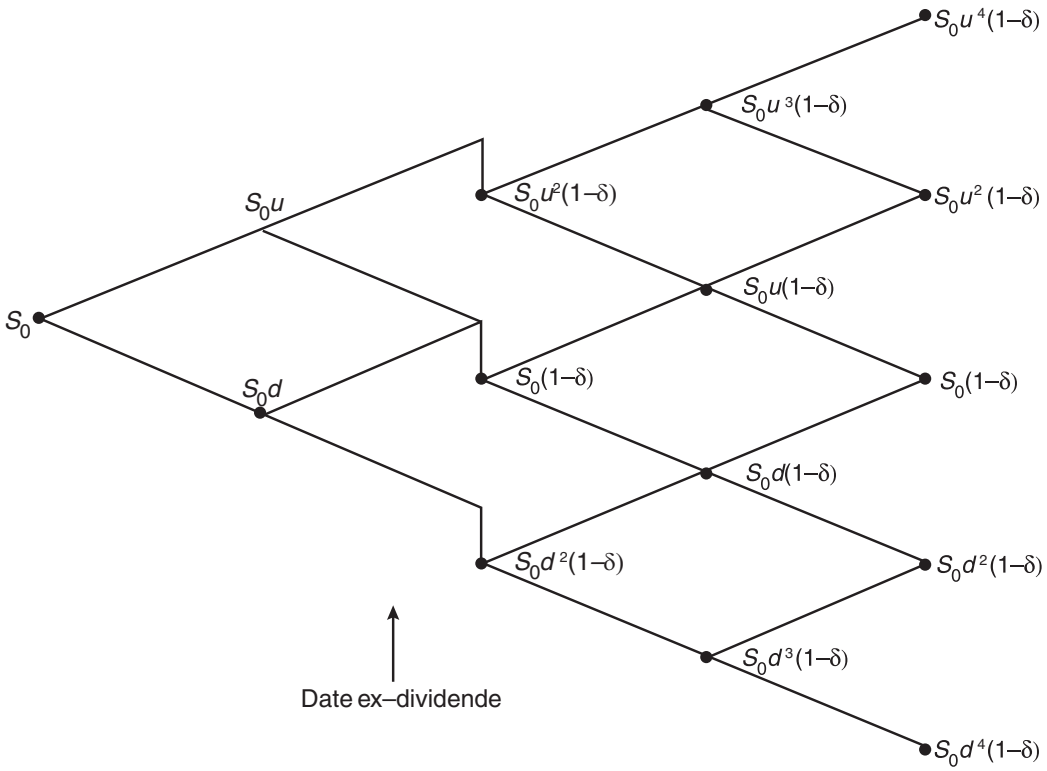
Pour plus de précision, il est entendu que les dividendes proportionnels connus sont payés à des dates discrètes. Supposons qu'un seul dividende soit versé et qu'il soit proportionnel au prix de l'action à la date de versement. Les paramètres u, d et p peuvent être calculés comme si aucun dividende ne devait être versé. Si la date $i\Delta t$ précède la date à laquelle l'action passe ex-dividende, les prix de l'action aux différents nœuds sont :

$$S_0\, u^j\, d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, i$$

Si, au contraire, la date $i\Delta t$ est postérieure à la date à laquelle l'action passe ex-dividende, les prix de l'action aux différents nœuds sont :

$$S_0\,(1-\delta)\,u^j\,d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, i$$

où δ désigne le taux de dividende. L'arbre résultant est illustré dans le graphique 21.7.



Graphique 21.7 : Arbre de prix de l'action quand un dividende proportionnel connu est versé à une date précise

Il est possible de prendre en compte le versement de plusieurs dividendes proportionnels pendant la durée de vie de l'option de la même manière. Si on note δ_i le dividende proportionnel total associé à la période séparant la date initiale et la date $i\Delta t$, les prix de l'action aux différents nœuds sont égaux à :

$$S_0\,(1-\delta_i)\,u^j\,d^{i-j}$$

Montant du dividende connu

Dans certaines situations, et en particulier pour les options de durée de vie courte, il est plus réaliste de supposer que c'est le montant du dividende qui est connu à l'avance, plutôt que le taux de dividende. Avec une volatilité de l'action σ, supposée constante, l'arbre prend la forme représentée dans le graphique 21.8. Il n'est plus recombinant et le nombre de nœuds pour lesquels il faudra évaluer l'option est susceptible de devenir très élevé. Supposons ici qu'un seul dividende soit versé, que l'action passe ex-dividende à la date τ, entre $k\Delta t$ et $(k+1)\Delta t$, et que le montant du dividende versé soit D. Pour $i \leq k$, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$S_0\,u^j\,d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, i$$

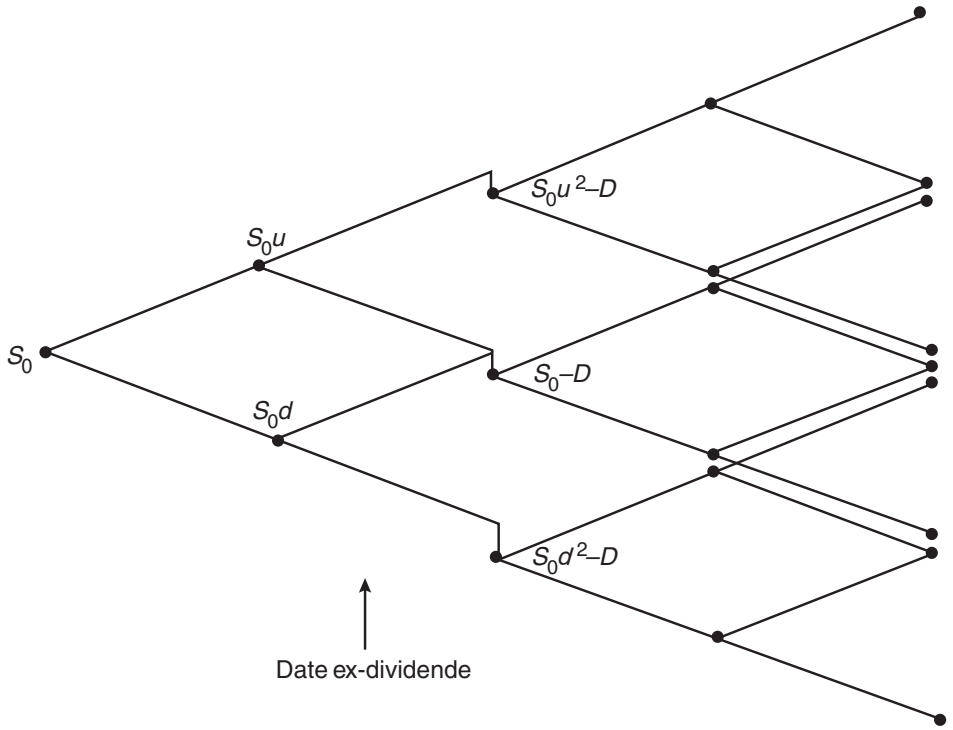
Pour $i = k + 1$, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$S_0\, u^j\, d^{i-j} - D, \quad j = 0, 1, \ldots, i$$

Pour $i = k + 2$, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$(S_0\, u^j\, d^{i-1-j} - D)\, u \quad \text{et} \quad (S_0\, u^j\, d^{i-1-j} - D)\, d$$

avec $j = 0, 1, \ldots, i - 1$. Il n'y a donc plus $i + 1$ mais $2i$ nœuds à la date $i\Delta t$. De même, pour $i = k + m$, il n'y a plus $k + m + 1$, mais $m(k + 2)$ nœuds. Le nombre de nœuds augmente d'autant plus vite que le nombre de dividendes versés pendant la durée de vie de l'option est élevé.



Graphique 21.8 : Arbre de prix de l'action quand un dividende d'un montant connu est versé, la volatilité étant supposée constante

Nous avons montré à la section 15.12 que l'on peut évaluer les options européennes sur des actions payant des dividendes, en supposant que le prix de l'action a deux composantes : l'une est incertaine et l'autre est la valeur actualisée de tous les dividendes qui seront versés pendant la durée de vie de l'option. Nous avions alors souligné les raisons pour lesquelles les professionnels considèrent que cette hypothèse est raisonnable. Les options européennes doivent être évaluées avec le même modèle que les options américaines„ sans quoi les options américaines, pour lesquelles l'exercice anticipé n'est jamais optimal, n'auraient pas le même prix que les options européennes correspondantes. En pratique, les options américaines sur des actions payant des dividendes sont donc évaluées à l'aide de l'approche présentée à la section 15.12. Cela permet en particulier de résoudre le problème d'accroissement du nombre de nœuds, illustré dans le graphique 21.8.

Supposons qu'il n'y a qu'une date de versement de dividendes durant la vie de l'option, notée τ, et que $k\Delta t \leq \tau \leq (k + 1)\Delta t$. À la date $i\Delta t$, la valeur de la composante

incertaine, S^*, est donnée par :

$$S^* = S, \quad \text{pour} \quad i\Delta t > \tau$$

et par :

$$S^* = S - D\,\mathrm{e}^{-r(\tau - i\Delta t)}, \quad \text{pour} \quad i\Delta t \leq \tau$$

où D est le montant du dividende versé. Notons σ^* la volatilité de la composante incertaine S^* [6]. Les paramètres p, u et d peuvent être calculés à partir des équations (21.4) à (21.7) en remplaçant σ par σ^*. L'arbre d'évolution de S^* peut alors être construit de la manière habituelle. Il peut être modifié pour représenter les évolutions de S en ajoutant à chaque nœud, quand c'est nécessaire, la valeur actualisée des dividendes à verser avant l'échéance. Si on note S_0^* la valeur de S^* à la date initiale, les prix de l'action aux différents nœuds de la date $i\Delta t$ sont :

$$S_0^* u^j\, d^{i-j} + D\,\mathrm{e}^{-r(\tau - i\Delta t)}, \quad j = 0, 1, \ldots, i$$

pour $i\Delta t < \tau$ et :

$$S_0^* u^j\, d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, i$$

pour $i\Delta t > \tau$. Cette approche permet de retrouver un arbre recombinant ne comptant que $i + 1$ nœuds à la date $i\Delta t$. Elle peut très facilement être généralisée pour prendre en compte plusieurs versements de dividendes dont les montants sont connus à l'avance.

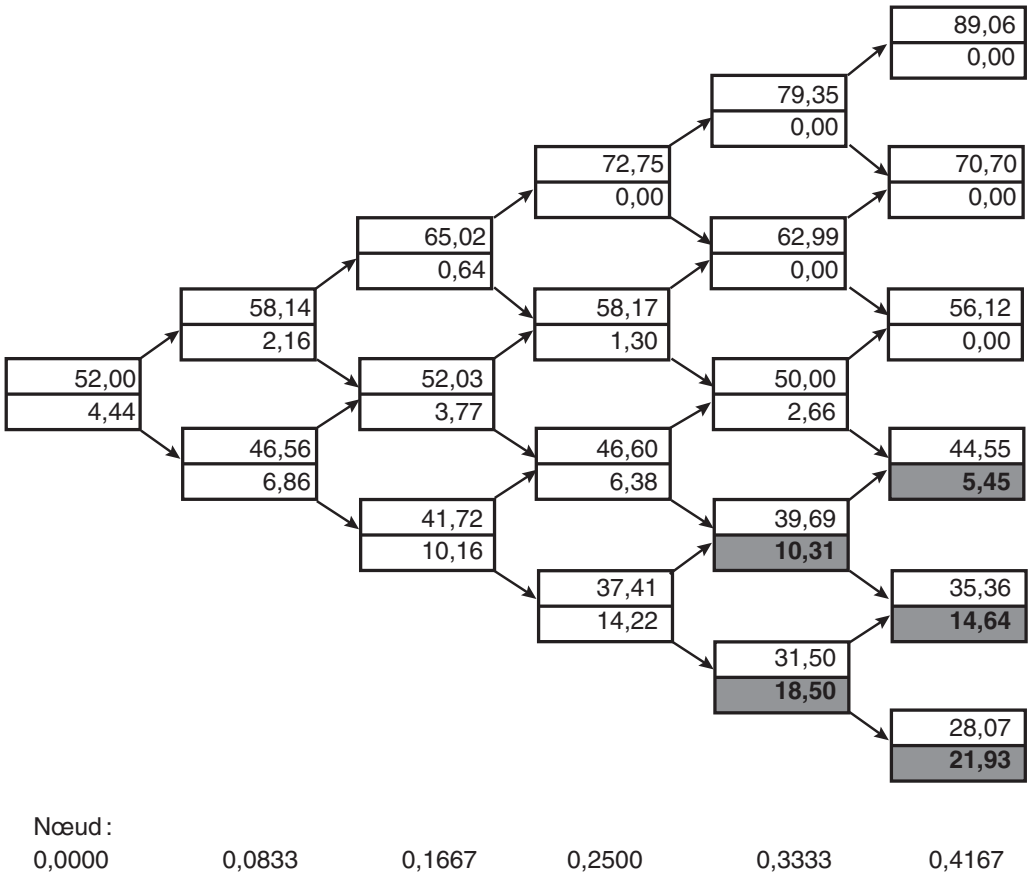
■ **Exemple 21.5** Considérons un put américain d'échéance 5 mois. L'action sous-jacente, dont le prix initial est 52 €, doit verser un dividende unique de 2,06 € pendant la vie de l'option, l'action passant ex-dividende dans trois mois et demi. Le prix d'exercice est 50 €, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle est estimée à 40 %.

On construit d'abord l'arbre d'évolution de S^*, le prix de l'action diminué de la valeur actualisée des dividendes à verser jusqu'à l'échéance. À la date initiale, la valeur actualisée du dividende est :

$$2{,}06\,\mathrm{e}^{-0{,}2917 \times 0{,}1} = 2{,}00$$

La valeur initiale de S^* est donc 52 € − 2,00 € = 50 €. Le graphique 21.3 donne une représentation de l'arbre d'évolution de S^* dès lors qu'on suppose une volatilité de 40 % pour S^*. (Dans ce cas, le prix initial et la volatilité sont en effet les mêmes dans les deux exemples.) Il suffit alors d'ajouter à chaque nœud la valeur actualisée du dividende à verser pour obtenir la représentation binomiale de l'évolution de S, illustrée dans le graphique 21.9. Comme dans l'arbre du graphique 21.3, les probabilités respectives des mouvements up et down sont 0,5073 et 0,4927. L'induction arrière conduit à un prix initial de 4,44 € pour cette option de vente (pour 50 et 100 périodes, DerivaGem donne des prix de 4,208 et de 4,214).

6. Comme nous l'avons mentionné à la section 15.12, la différence entre σ^* et σ n'est généralement pas prise en compte. En pratique, l'utilisation d'une structure par termes des volatilités implicites qui correspondent aux σ^* permet de pallier ce problème.



Graphique 21.9 : Arbre binomial construit par DerivaGem pour l'exemple 21.5

La technique du contrôle de la différence

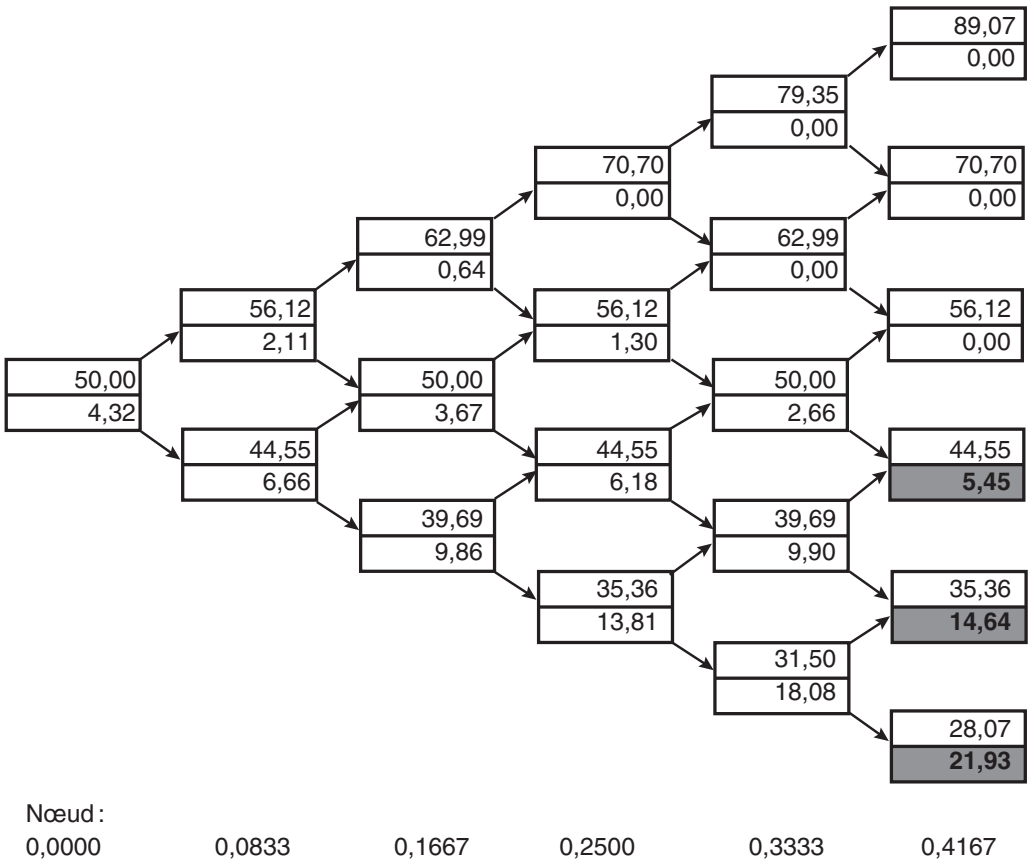
La technique dite « du contrôle de la différence » peut être utilisée pour l'évaluation des contrats d'options de type américain [7]. Cette technique consiste à se servir du même arbre pour calculer la valeur de l'option américaine, f_A, et celle de l'option européenne, f_E. Il convient aussi de calculer f_{BS}, le prix de Black et Scholes de l'option européenne. L'erreur d'évaluation due à l'utilisation de la procédure binomiale pour le contrat européen $f_{BS} - f_E$ est supposée égale à celle obtenue avec le même arbre pour le contrat américain. Dès lors, une estimation du prix de l'option américaine est donnée par :

$$f_A + f_{BS} - f_E$$

En guise d'illustration, le graphique 21.10 montre l'arbre d'évaluation de l'option du graphique 21.3 en supposant que ce contrat est de type européen. Le prix obtenu, f_E, est 4,32 €. La vraie valeur du contrat européen, f_{BS}, donnée par la formule de Black et Scholes est 4,08 €, et l'estimation de la valeur du contrat américain, f_A, donnée dans le graphique 21.3 est de 4,49 €. L'estimation du prix de l'option américaine est alors :

$$4{,}49 + 4{,}08 - 4{,}32 = 4{,}25$$

7. Voir J. C. Hull et A. White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, septembre 1988, 237-251.



Graphique 21.10 : Arbre binomial de la version européenne du put américain du graphique 21.3, construit par DerivaGem. À chaque nœud, la cellule supérieure contient le prix de l'action et la cellule inférieure le prix de l'option

Le prix du contrat américain, obtenu avec la procédure binomiale sur 100 périodes, est de 4,278. L'approche du contrôle de la différence améliore ainsi considérablement l'estimation binomiale quand le nombre de périodes choisi est faible. (Nous avions une estimation de 4,49 pour 5 périodes de 1 mois.)

En fait, la technique du contrôle de la différence consiste à se servir de l'arbre binomial pour calculer la différence entre les prix des contrats américains et européens plutôt que directement le prix du contrat américain. Nous évoquerons une autre application de cette technique un peu plus loin dans ce chapitre, lors de la présentation des simulations de Monte-Carlo.

21.4 Les procédures alternatives de construction d'arbres

La procédure originale de construction d'arbres binomiaux à la Cox, Ross et Rubinstein présentée jusqu'ici n'est pas la seule à pouvoir être utilisée. Dans un univers risque-neutre, la variation de $\ln S$ au cours d'une période de durée Δt a pour moyenne $(r - q - \sigma^2/2)\,\Delta t$ et pour écart-type $\sigma\sqrt{\Delta t}$. On peut retrouver ces valeurs dans un arbre binomial, en fixant $p = 0{,}5$ et :

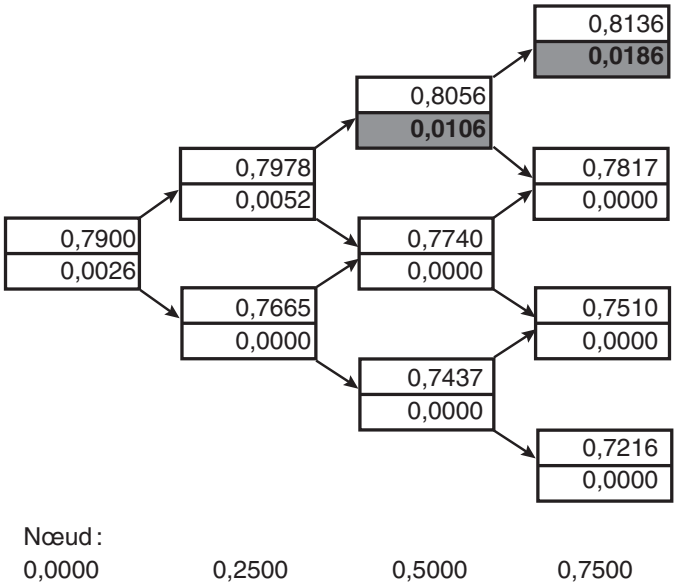
$$u = \mathrm{e}^{\left(r-q-\sigma^2/2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \mathrm{e}^{\left(r-q-\sigma^2/2\right)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Cette procédure alternative de construction de l'arbre a l'avantage, par rapport à celle de Cox, Ross et Rubinstein, de retenir des probabilités systématiquement égales à 0,5, indépendamment de la valeur de σ ou du nombre de périodes [8]. En revanche, un inconvénient majeur de cette procédure réside dans la difficulté à calculer le delta, le gamma et le rhô à partir de l'arbre. Au nœud central de la date $2\Delta t$, la valeur de l'actif sous-jacent n'est plus, avec cette procédure de construction, égale à la valeur initiale.

■ **Exemple 21.6** Un call américain sur devise a une durée de vie de 9 mois et un prix d'exercice de 0,7950. Le taux de change courant est 0,7900, le taux d'intérêt sans risque domestique s'élève à 6 %, alors que le taux sans risque étranger est égal à 10 %. La volatilité du taux de change est de 4 % par an. On a S_0 = 0,79, K = 0,795, r = 0,06, r_f = 0,10, σ = 0,04 et T = 0,75. Si l'on retient des périodes de durée trois mois, Δt = 0,25, et des probabilités égales à 0,5 pour toutes les branches, l'amplitude des mouvements up et down obtenue avec cette procédure alternative de construction d'arbre est donnée par :

$$u = \mathrm{e}^{(0,06-0,10-0,0016/2)0,25+0,04\sqrt{0,25}} = 1,0098$$
$$d = \mathrm{e}^{(0,06-0,10-0,0016/2)0,25-0,04\sqrt{0,25}} = 0,9703$$

L'arbre du taux de change est représenté dans le graphique 21.11 et donne un prix initial de l'option de 0,0026 $.

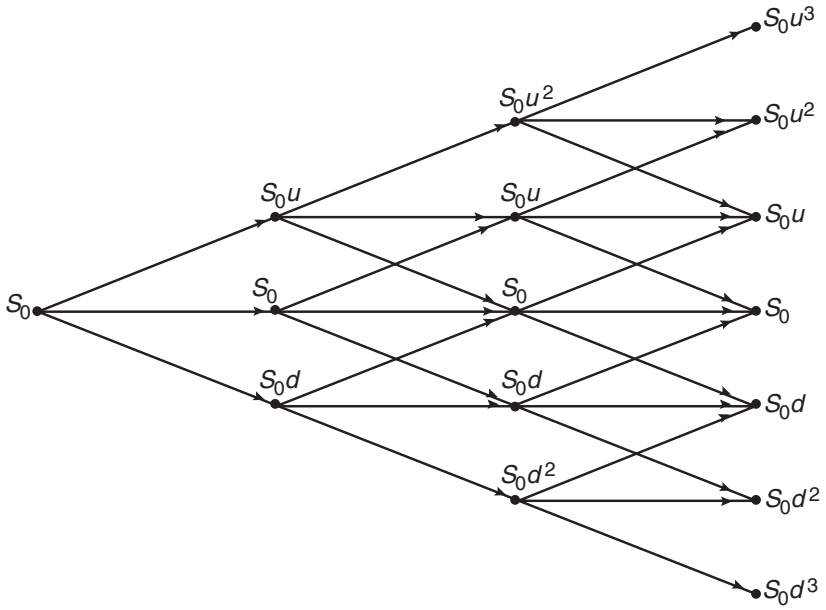


Graphique 21.11 : Arbre binomial du call américain sur devise. La cellule supérieure de chaque nœud représente le taux de change et la cellule inférieure la valeur de l'option. Toutes les probabilités sont égales à 0,5.

8. Au contraire de la procédure présentée ici, un problème posé par la procédure de Cox, Ross et Rubinstein est que les probabilités deviennent négatives quand la durée des périodes est suffisamment longue pour que $\sigma < \left|(r-q)\sqrt{\Delta t}\right|$.

Les arbres trinomiaux

Les arbres trinomiaux peuvent constituer une alternative aux arbres binomiaux. Leur forme générale est représentée dans le graphique 21.12.



Graphique 21.12 : Arbre trinomial décrivant l'évolution du prix d'une action

Notons p_u, p_m et p_d les probabilités respectives des mouvements up, mid et down à chaque nœud, et Δt la durée entre deux nœuds successifs. Quand les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, les valeurs des paramètres qui permettent de retrouver la moyenne et l'écart-type des variations de $\ln S$ sont :

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}, \quad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}(r - q - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{1}{6}$$

Les calculs à effectuer dans un arbre trinomial sont analogues à ceux à faire dans les arbres binomiaux. À chaque nœud, on compare la valeur de l'exercice immédiat à celle de la continuation. Cette dernière s'écrit :

$$\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left(p_u f_u + p_m f_m + p_d f_d\right)$$

où $(f_u, f_m$ et $f_d)$ sont les valeurs de l'option dans les trois états up, mid et down. L'approche trinomiale se révèle en outre équivalente à la méthode des différences finies que nous développerons à la section 21.8.

Figlewski et Gao [9] ont développé une méthode alternative, dite du maillage adaptatif (*adaptive mesh model*), qui consiste à introduire un maillage fin, c'est-à-dire des périodes Δt très courtes, dans un arbre plus grossier (avec des périodes Δt plus longues).

9. Voir S. Figlewski et B. Gao, "The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing", *Journal of Financial Economics*, 53, 1999, 313-351.

En fait, pour évaluer efficacement les options américaines, le maillage doit être fin à proximité du prix d'exercice à l'approche de l'échéance.

21.5 Les paramètres dépendant du temps

Jusqu'à présent, nous avons supposé r, q, r_f et σ constants alors qu'en pratique ils sont généralement supposés dépendre du temps. La valeur de ces variables entre les dates t et $t + \Delta t$ est supposée égale à leur valeur forward [10].

Dans un modèle binomial à la Cox-Ross-Rubinstein, il est possible de faire de r et q (ou r_f) des fonctions du temps. Fixons :

$$a = \mathrm{e}^{[f(t)-g(t)]\Delta t} \tag{21.11}$$

aux nœuds de la date t, où $f(t)$ est le taux d'intérêt forward pour la période t, $t + \Delta t$ et où $g(t)$ est la valeur forward correspondante de q (ou r_f). La géométrie de l'arbre ne se trouve pas modifiée car u et d ne dépendent pas de a. En revanche, les probabilités associées aux mouvements up et down pour les nœuds de la date t deviennent [11] :

$$p = \frac{\mathrm{e}^{[f(t)-g(t)]\Delta t} - d}{u - d} \tag{21.12}$$

et :

$$1 - p = \frac{u - \mathrm{e}^{[f(t)-g(t)]\Delta t}}{u - d}$$

À l'exception de cette modification, la suite de la procédure reste classique, à ceci près que l'actualisation entre les dates t et $t + \Delta t$ doit être faite au taux $f(t)$.

Il est plus compliqué de rendre la volatilité dépendante du temps. Notons $\sigma(t)$ la volatilité utilisée pour évaluer les options d'échéance t. Une possibilité consiste à considérer des intervalles de temps dont la durée est inversement proportionnelle au taux de variance en vigueur sur chaque intervalle. Ainsi, les valeurs des paramètres u et d restent toujours les mêmes et l'arbre est recombinant. Notons $V = \sigma(T)^2 T$, avec T la durée de vie de l'arbre, et t_i la fin de la période i. Pour un nombre total de périodes égal à N, il convient de choisir t_i de sorte que $\sigma(t_i)^2 t_i = iV/N$ et de fixer $u = \mathrm{e}^{\sqrt{V/N}}$ et $d = 1/u$. Le paramètre p dépend de u, d, r et q, comme dans le cas où la volatilité est constante. Cette procédure peut être combinée avec la précédente de sorte à avoir à la fois des taux d'intérêt et des volatilités qui dépendent du temps.

21.6 La simulation de Monte-Carlo

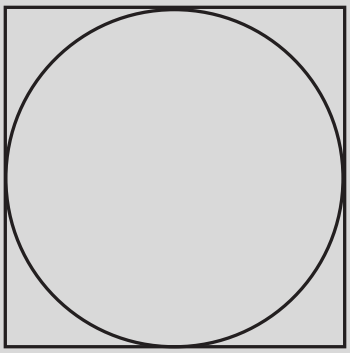
Nous abordons maintenant la méthode de simulation de Monte-Carlo pour l'évaluation des actifs dérivés ; elle est très différente de celle fondée sur les arbres binomiaux. L'encadré 21.1 illustre l'idée qui sous-tend cette méthode en montrant comment on peut estimer π avec un simple programme Excel.

10. Le taux de dividende forward et le taux de variance forward sont calculés de la même façon qu'un taux d'intérêt forward. (Le taux de variance est le carré de la volatilité.)

11. Pour un nombre de pas de temps suffisamment grand, ces probabilités sont toujours positives.

Encadré 21.1 Calcul de π par une simulation de Monte-Carlo

Supposons que les côtés du carré représenté dans le graphique 21.13 soient de longueur unité.



Graphique 21.13 : Calcul de π par jets de fléchettes

Vous lancez des fléchettes au hasard sur ce carré et vous évaluez le pourcentage de celles qui tombent dans le cercle inscrit. Combien devriez-vous trouver ? Le cercle inscrit a un rayon égal à 0,5, son aire est donc égale à $\pi/4$. Par conséquent, la proportion de fléchettes qui se plantent dans le cercle devrait être de $\pi/4$. On peut donc estimer π en multipliant par 4 la proportion observée.

Utilisons une feuille Excel pour simuler l'expérience, comme illustré dans le tableau 21.1.

Tableau 21.1 : Exemple de feuille de calcul

	A	B	C
1	0,207	0,690	4
2	0,271	0,520	4
3	0,007	0,221	0
⋮	⋮	⋮	⋮
100	0,198	0,403	4
101			
102		Moyenne :	3,04
103		EC :	1,69

On entre la fonction =ALEA(), qui renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 correspondant aux coordonnées de la fléchette dans le graphique 21.1, dans les cellules A1 et B1. Dans la cellule C1, on saisit la formule :

$$= \text{SI}\,(\text{A1} - 0{,}5)\,\hat{}\,2 + (\text{B1} - 0{,}5)\,\hat{}\,2 < 0{,}25\,;\,4\,;\,0)$$

On recopie ensuite cette ligne vers le bas jusqu'à la ligne 100. La formule ci-dessus a pour effet d'écrire le nombre 4 dans la colonne C quand le point dont les coordon-

nées sont dans les colonnes A et B est dans le cercle, et le nombre 0 sinon. On saisit ensuite dans la cellule C102 l'instruction =MOYENNE(C1:C100) et en C103 l'instruction =ECARTYPEP(C1:C100). En C102 (de valeur 3,04 dans le tableau 21.1) on a une estimation de π calculée avec 100 « jets de fléchettes automatisés » et en C103 on trouve l'écart-type de cette estimation. Comme nous le verrons dans l'exemple 21.7, cette mesure peut être utilisée pour juger de la qualité de l'estimation obtenue. Quand on accroît le nombre de tirages au hasard (ce qui joue le rôle des jets de fléchettes), la pertinence de l'estimation augmente, mais la convergence vers la valeur exacte est lente.

L'évaluation des options par simulations de Monte-Carlo repose en grande partie sur l'évaluation risque-neutre. Les paiements futurs espérés sont en effet calculés dans l'univers risque-neutre en suivant une procédure d'échantillonnage, avant d'être actualisés au taux d'intérêt sans risque. Considérons un actif dérivé ayant pour support une variable de marché S et délivrant un payoff à la date T.

Avec des taux d'intérêt supposés constants, il est possible d'évaluer cet actif dérivé de la manière suivante :

1. Tirer au hasard une trajectoire de S dans l'univers risque-neutre ;
2. Calculer le flux payé à l'échéance par l'actif dérivé pour cette trajectoire ;
3. Répéter les étapes 1 et 2 de façon à disposer d'un grand nombre de flux terminaux de l'actif dérivé dans l'univers risque-neutre ;
4. Calculer la moyenne des flux terminaux pour obtenir une estimation de l'espérance du flux terminal dans l'univers risque-neutre ;
5. Actualiser le flux terminal espéré au taux d'intérêt sans risque pour obtenir une estimation de la valeur de l'actif dérivé.

Cette procédure est illustrée dans DerivaGem 3.00, dans la feuille de calcul sur la simulation de Monte-Carlo.

Supposons que, dans l'univers risque-neutre, la variable de marché sous-jacente suive le processus :

$$dS = \hat{\mu}\, S\, dt + \sigma\, S\, dz \tag{21.13}$$

où z est un processus de Wiener standard, $\hat{\mu}$ désigne la rentabilité espérée dans l'univers risque-neutre, et σ la volatilité[12]. Si on divise la vie de l'option en N intervalles de longueur Δt, on peut simuler la trajectoire suivie par S en approximant l'équation (21.13) par :

$$S\,(t + \Delta t) - S\,(t) = \hat{\mu}\, S\,(t)\, \Delta t + \sigma\, S(t)\, \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{21.14}$$

12. Si S est le prix d'une action ne versant pas de dividendes, $\hat{\mu} = r$; s'il s'agit d'un taux de change, $\hat{\mu} = r - r_f$, et ainsi de suite pour les différents types d'actifs sous-jacents. Il est important de noter que, comme nous l'avons expliqué à la section 13.7, la volatilité est la même dans l'univers « réel » et dans l'univers risque-neutre.

où $S(t)$ est la valeur de S à la date t, et ε est une variable normale centrée-réduite. La valeur de S à la date Δt est calculée à partir de la valeur initiale de S, la valeur de S à la date $2\Delta t$ est obtenue à partir de $S(\Delta t)$, et ainsi de suite. Cette procédure a déjà été illustrée à la section 14.3. La simulation implique la construction d'une trajectoire complète pour le prix de l'actif sous-jacent et nécessite ainsi N tirages aléatoires selon la loi normale.

En pratique, on obtient des résultats plus précis en simulant $\ln(S)$ plutôt que S. D'après le lemme d'Itô, le processus suivi par $\ln(S)$ s'écrit :

$$d\ln(S) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dz \tag{21.15}$$

de telle façon que :

$$\ln(S\,(t+\Delta t)) - \ln(S(t)) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

ou encore :

$$S\,(t+\Delta t) = S(t)\exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}\right] \tag{21.16}$$

Travailler avec $\ln(S(t))$ (plutôt qu'avec $S(t)$) est plus aisé car il s'agit d'un processus de Wiener général. Cela signifie qu'avec $\hat{\mu}$ et σ constants, l'équation suivante est vérifiée pour toute date[13] T :

$$S(T) = S(0)\exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\,\varepsilon\,\sqrt{T}\right] \tag{21.17}$$

Cette relation permet d'évaluer des options dont le payoff à la date T n'est pas standard. L'encadré 21.2 montre que cette démarche peut aussi être utile pour tester les formules de Black et Scholes.

Encadré 21.2 Tester le modèle de Black et Scholes

La formule d'évaluation d'une option européenne de Black et Scholes peut être testée en construisant un arbre binomial comptant un grand nombre de périodes. Une alternative consiste à utiliser une simulation de Monte-Carlo. Le tableau 21.2 montre comment cela peut être réalisé dans une feuille Excel. Les cellules C2, D2, E2, F2 et G2 contiennent S_0, K, r, σ et T. Les cellules D4 et E4 contiennent les valeurs calculées de d_1 et d_2 alors que F4 donne la valeur de l'option calculée par la formule de Black et Scholes (4,817 dans cet exemple).

13. *A contrario*, l'égalité (21.14) n'est valide que pour Δt proche de zéro.

Tableau 21.2 : Simulation de Monte-Carlo pour tester la formule de Black-Scholes

	A	B	C	D	E	F	G
1	45,95	0	S_0	K	r	σ	T
2	54,49	4,38	50	50	0,05	0,3	0,5
3	50,09	0,09		d_1	d_2	Prix BS	
4	47,46	0		0,2239	0,0118	4,817	
5	44,93	0					
⋮	⋮	⋮					
1 000	68,27	17,82					
1 001							
1 002	Moyenne :	4,98					
1 003	EC :	7,68					

Dans Excel, la fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE() est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite. Par conséquent, la formule :

$$= \text{LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())}$$

simule un tirage aléatoire selon cette loi. On saisit alors dans la cellule A1 :

$$= \text{\$C\$2*EXP((\$E\$2}-\text{\$F\$2*\$F\$2)*\$G\$2}$$

$$+ \text{\$F\$2*LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())*RACINE(\$G\$2))}$$

Cette formule simule un prix terminal de l'action tel que décrit dans l'équation (21.17). Dans la cellule B1, on écrit :

$$= \text{EXP}(-\text{\$E\$2*\$G\$2)*MAX(A1}-\text{\$D\$2}\,;0)$$

Il s'agit de la valeur actuelle du paiement terminal engendré par un call. On recopie vers le bas ces formules jusqu'à la ligne 1 000. Dans la cellule B1002, on calcule la moyenne des résultats obtenus par la formule = MOYENNE(B1:B1000), qui vaut 4,98 dans cet exemple. Il s'agit d'une estimation du prix de l'option, qui ne doit pas être très éloigné de celui donné par la formule de Black et Scholes. La cellule B1003 donne une estimation de l'écart-type de cette série obtenue à l'aide de la formule = ECARTYPEP(B1:B1000). Comme nous le verrons dans l'exemple 21.8, cette valeur peut être utilisée pour évaluer la qualité de l'estimation.

L'avantage de la simulation de Monte-Carlo est de pouvoir être utilisée aussi bien quand les flux terminaux de l'actif dérivé dépendent du chemin suivi par S, que quand ils dépendent seulement de la valeur terminale de S. On peut ainsi évaluer, par exemple, des options dont le payoff dépend du cours moyen du sous-jacent observé pendant la durée de vie de l'option. En outre, des flux intermédiaires peuvent aussi être pris en

compte ; de même, n'importe quel processus d'évolution peut être envisagé pour S. Enfin, comme nous allons maintenant le montrer, la procédure peut être étendue au cas où les flux de l'actif dérivé dépendent de plusieurs variables de marché sous-jacentes. Les principaux inconvénients de la simulation de Monte-Carlo sont le temps de calcul élevé et la difficulté à gérer les situations dans lesquelles l'actif dérivé peut être exercé prématurément [14].

Les actifs dérivés dépendant de plus d'une variable de marché

Nous avons présenté les processus stochastiques corrélés à la section 14.5. Considérons un actif dérivé dont le payoff dépend de n variables θ_i, $(1 \leq i \leq n)$. Notons s_i la volatilité de θ_i, $\hat{m}_i$ le taux de croissance espéré de θ_i dans l'univers risque-neutre, et ρ_{ik} la corrélation entre les processus de Wiener suivis par θ_i et θ_k [15]. Comme dans le contexte à une seule variable, il faut diviser la vie de l'option en N périodes de durée Δt. La version discrète du processus suivi par θ_i est alors :

$$\theta_i(t+\Delta t) - \theta_i(t) = \hat{m}_i\,\theta_i(t)\,\Delta t + s_i\,\theta_i(t)\,\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} \tag{21.18}$$

où ε_i suit une loi normale centrée-réduite. Le coefficient de corrélation entre ε_i et ε_k est ρ_{ik} pour $1 \leq i, k \leq n$. La simulation d'une trajectoire implique le tirage de N valeurs du vecteur aléatoire $(\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n)$ dont la loi jointe est normale centrée-réduite. Ces valeurs sont intégrées dans l'équation (21.18) pour simuler autant de trajectoires qu'il existe de variables θ_i, et permettre ainsi le calcul du paiement de l'actif dérivé sur cette trajectoire.

Le tirage d'échantillons aléatoires de distributions normales

Le tirage aléatoire d'un échantillon de loi normale centrée-réduite peut être obtenu à l'aide de la fonction d'Excel, déjà présentée dans l'encadré 21.2 :

$$= \text{LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())}$$

Quand le tirage de deux valeurs ε_1 et ε_2 de lois normales centrées-réduites est nécessaire, on peut suivre la procédure consistant à tirer au hasard deux valeurs indépendantes de lois normales univariées, x_1 et x_2, et à calculer ensuite ε_1 et ε_2 ainsi :

$$\varepsilon_1 = x_1$$
$$\varepsilon_2 = \rho\,x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

où ρ est le coefficient de corrélation.

Si maintenant, n tirages corrélés de distributions normales sont nécessaires, et si le coefficient de corrélation entre i et j est ρ_{ij}, il faut d'abord tirer au hasard n valeurs

14. Toutefois, nous verrons au chapitre 27 que de nombreux travaux ont proposé des moyens de prendre en compte le caractère américain des options dans le cadre de simulations de type Monte-Carlo.

15. s_i, $\hat{m}_i$ et ρ_{ik} peuvent éventuellement dépendre de θ_i.

indépendantes x_i $(1 \leq i \leq n)$ à partir de distributions normales univariées. Les ε_i $(1 \leq i \leq n)$ désirés sont alors égaux à :

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} x_k$$

Pour que la variance des ε_i et leur covariance avec les ε_j $(1 \leq j < i)$ soient correctes, il faut que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha_{11} x_1 \\ \varepsilon_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \\ \varepsilon_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 \end{aligned} \tag{21.19}$$

et ainsi de suite. Il faut choisir les coefficients de ces combinaisons de façon à retrouver les corrélations. Cela se fait pas à pas : on pose $\alpha_{11} = 1$, on choisit α_{21} tel que $\alpha_{21}\alpha_{11} = \rho_{21}$ et α_{22} tel que $\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$, et ainsi de suite[16]. Cette procédure est connue sous le nom de décomposition de Cholesky.

Le nombre de trajectoires à simuler

La précision du résultat obtenu par simulation de Monte-Carlo dépend du nombre de trajectoires tirées. Il convient généralement de calculer non seulement la moyenne des payoffs actualisés simulés (qui donne l'estimation de la valeur de l'actif dérivé), mais aussi leur écart-type. Si M trajectoires indépendantes ont été simulées avec la procédure décrite précédemment, si μ désigne la moyenne des payoffs actualisés et ω son écart-type, l'écart-type de l'estimateur est égal à :

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

Un intervalle de confiance à 95 % pour le prix de l'actif dérivé est alors donné par :

$$\mu - \frac{1{,}96\,\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1{,}96\,\omega}{\sqrt{M}}$$

Il apparaît clairement dans cette relation que l'incertitude sur la valeur de l'actif dérivé est inversement liée à la racine carrée du nombre de trajectoires simulées. Pour doubler la précision de la simulation, il faut donc quadrupler le nombre de trajectoires simulées ; pour la multiplier par dix, il faut multiplier par cent le nombre de trajectoires, et ainsi de suite.

■ **Exemple 21.7** Dans le tableau 21.1, π est calculé comme une moyenne de 100 nombres. L'écart-type de cette série de nombres est 1,69. Dans ce cas, M = 100 et ω = 1,69, de sorte que l'écart-type de l'estimateur est 1,69 / 10 = 0,169. La feuille de calcul donne un intervalle de confiance à 95 % pour π allant de $3{,}04 - 1{,}96 \times 0{,}169$ à $3{,}04 + 1{,}96 \times 0{,}169$, c'est-à-dire de 2,71 à 3,37. La valeur exacte de π se situe bien dans l'intervalle de confiance, qui est toutefois relativement large.

16. Dans le cas où les équations n'admettent pas de solution réelle pour les α, la structure interne de corrélation supposée n'est pas cohérente. Ce point sera discuté à la section 23.7.

■ **Exemple 21.8** Dans le tableau 21.2, la valeur de l'option est calculée avec un échantillon de taille 1 000. L'écart-type de cette série est 7,68, ce qui donne un écart-type de l'estimateur de $7{,}68/\sqrt{1\,000} = 0{,}24$. L'intervalle de confiance à 95 % donné par la feuille de calcul pour la valeur de l'option est alors :

$$[4{,}98 - 1{,}96 \times 0{,}24; 4{,}98 + 1{,}96 \times 0{,}24] = [4{,}51; 5{,}45]$$

Le prix de Black et Scholes est bien compris entre ces deux bornes.

La sélection de trajectoires dans un arbre

Plutôt que de construire des trajectoires à partir du processus stochastique de la variable sous-jacente, il est possible de les tirer au hasard parmi les 2^N trajectoires possibles d'un arbre binomial à N périodes. Par exemple, si un arbre binomial décrit l'évolution d'un sous-jacent avec une probabilité de mouvement up égale à 0,6, la procédure de sélection aléatoire d'une trajectoire est la suivante. À chaque nœud, un nombre est tiré selon une loi uniforme sur [0 ;1] ; s'il est inférieur à 0,4, un mouvement down est retenu ; si, au contraire, il est supérieur à 0,4, c'est un mouvement up qui sera considéré. Une fois le nœud terminal atteint, le flux terminal de l'actif dérivé est calculé, ce qui achève la première étape. Il s'agit ensuite de reproduire cette procédure jusqu'à l'obtention d'un nombre suffisant de trajectoires. L'estimation de la valeur de l'actif dérivé est donnée par la moyenne des payoffs terminaux actualisée au taux d'intérêt sans risque [17].

■ **Exemple 21.9** Supposons que l'arbre du graphique 21.3 soit utilisé pour évaluer une option qui délivre un payoff égal à $\max(S_{\text{moy}} - 50\,;\, 0)$, où S_{moy} est le prix moyen d'une action mesuré sur une période de 5 mois (le premier et le dernier prix comptant dans le calcul de la moyenne). Il s'agit d'une « option asiatique ». Le tableau 21.3 montre un résultat possible pour 10 tirages. La valeur de l'option est égale au paiement moyen actualisé au taux sans risque. Dans notre exemple, le paiement moyen est de 7,08 et le taux sans risque de 10 %. L'estimation du prix de l'option est donc $7{,}08\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 5/12} = 6{,}79$. Il s'agit d'une simple illustration ; pour traiter les cas concrets, on utilise des sous-périodes plus courtes et un nombre de tirages bien plus important.

Le calcul des grecques

Les grecques présentées au chapitre 19 peuvent être calculées dans le cadre de simulations de Monte-Carlo. Soit f la valeur d'un actif dérivé et x celle de son sous-jacent ou d'un paramètre. Dans un premier temps, la simulation est menée comme précédemment pour déterminer une estimation de la valeur de l'actif dérivé, $\hat{f}$. Dans un second temps, une légère variation Δx est appliquée à la valeur de x et une nouvelle simulation est entreprise, conduisant à une seconde estimation $\hat{f}^*$.

17. Pour une discussion sur la façon de rendre efficace l'échantillonnage sur un arbre, on pourra se référer à D. Mintz, "Less is More", *RISK*, juillet 1997, 42-45.

Le delta de f par rapport à x est alors estimé par :

$$\frac{\hat{f}^* - \hat{f}}{\Delta x}$$

Pour minimiser l'écart-type d'estimation, il faut que le nombre de périodes, N, les suites de nombres aléatoires, et le nombre de trajectoires simulées, M, soient les mêmes pour le calcul de $\hat{f}$ et de $\hat{f}^*$.

Tableau 21.3 : Simulation de Monte-Carlo pour évaluer une option asiatique

Tirage	Trajectoire	Prix moyen de l'action	Paiement de l'option
1	UUUUD	64,98	14,98
2	UUUDD	59,82	9,82
3	DDDUU	42,31	0,00
4	UUUUU	68,04	18,04
5	UUDDU	55,22	5,22
6	UDUUD	55,22	5,22
7	DDUDD	42,31	0,00
8	UUDDU	55,22	5,22
9	UUUDU	62,25	12,25
10	DDUUD	45,56	0,00
Moyenne			7,08

Les utilisations

La simulation de Monte-Carlo tend à être numériquement plus performante que les autres procédures quand trois variables stochastiques ou plus sont considérées. Cela tient au fait que le temps nécessaire à la simulation augmente à peu près linéairement avec le nombre de variables, alors que le temps nécessaire à la plupart des autres procédures augmente exponentiellement avec le nombre de variables. La simulation de Monte-Carlo a l'avantage de fournir les écarts-types des estimations produites. Cette approche peut aussi être adaptée à des structures de payoffs et à des processus stochastiques complexes, ce qui constitue un autre atout. Ainsi, elle peut être utilisée même quand les revenus terminaux de l'actif dérivé à évaluer dépendent du sentier suivi par les variables sous-jacentes, plutôt que de leur seule valeur finale.

21.7 Les procédés de réduction de la variance

Dans le cas où l'on simule les réalisations des processus stochastiques suivis par les variables sous-jacentes à l'aide des équations (21.13) à (21.18), il faut simuler un très grand nombre de trajectoires pour estimer f avec une précision raisonnable. C'est particulièrement coûteux en temps de calcul. Dans cette section, nous présentons des procédés de réduction de la variance, qui peuvent conduire à de notables économies de temps de calcul.

La technique de la variable antithétique

La technique de la variable antithétique repose sur le calcul de deux valeurs de l'actif dérivé par simulation. La première valeur, f_1, est calculée selon la procédure maintenant usuelle. La seconde valeur, f_2, est déterminée en changeant le signe de tous les tirages aléatoires de la loi normale centrée-réduite (si ε est tiré pour f_1, on utilise $-\varepsilon$ pour f_2). On retient alors la moyenne de f_1 et f_2 pour calculer la valeur de l'actif dérivé. Ce procédé fonctionne bien, puisque quand l'une des valeurs est supérieure à la vraie valeur, l'autre tend à être inférieure et *vice versa*.

La moyenne de f_1 et de f_2 est notée $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

L'estimation finale de la valeur de l'actif dérivé est donnée par la moyenne des $\bar{f}$. Si on note $\bar{\omega}$ l'écart-type des $\bar{f}$ et M le nombre de trajectoires simulées (c'est-à-dire le nombre de couples de valeurs), l'écart-type de l'estimation est $\bar{\omega}/\sqrt{M}$, ce qui est généralement très inférieur à l'écart-type obtenu par simulation de $2M$ trajectoires.

La technique du contrôle de la différence

Nous avons déjà donné à la section 21.3 un exemple de cette technique pour l'évaluation des options américaines avec des arbres. Elle est applicable quand il existe deux actifs dérivés, A et B, semblables. L'actif dérivé A est l'actif à évaluer et l'actif dérivé B est semblable au précédent, mais une solution analytique permet son évaluation. Deux simulations reposant sur les mêmes suites de nombres aléatoires et la même périodicité Δt sont conduites en parallèle pour le calcul des estimations respectives f_{A^*} et f_{B^*} des valeurs de A et de B. Une meilleure estimation de la valeur de A, f_A, est alors donnée par la formule :

$$f_A = f_{A^*} - f_{B^*} + f_B \tag{21.20}$$

où f_B est la vraie valeur de B, qui est connue. Hull et White [18] donnent un exemple de l'utilisation de cette technique dans leur étude de l'effet de la volatilité stochastique sur le prix d'un call européen ; A est alors l'option pour laquelle la volatilité est supposée stochastique, et B celle pour laquelle la volatilité est supposée constante.

L'échantillonnage par importance

La façon la plus simple d'expliquer l'échantillonnage par importance (*importance sampling*) est d'en donner un exemple. Supposons que nous cherchions à évaluer un call européen très en dehors de prix d'exercice K et d'échéance T. Si nous simulons des valeurs terminales du prix de l'actif sous-jacent avec la méthode usuelle, la plupart des trajectoires vont conduire à un flux terminal nul. Cela constitue une perte de temps de calcul puisque ces trajectoires contribuent très peu à la détermination de la valeur de

18. Voir J. C. Hull et A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, juin 1987, 281-300.

l'option. Il serait donc plus intéressant de ne choisir que les trajectoires importantes, c'est-à-dire celles qui conduisent à un prix terminal du sous-jacent supérieur au prix d'exercice K.

Notons F la distribution de probabilité non conditionnelle du prix de l'action à la date T et supposons aussi que la probabilité, notée q, que le prix de l'action soit supérieur à K à l'échéance puisse être déterminée analytiquement. Dans ce cas, $G = F/q$ est la distribution de probabilité du prix de l'action, conditionnellement à l'événement $S > K$. Pour la mise en place d'un échantillonnage par importance, la simulation est effectuée à partir de valeurs tirées de G plutôt que de F. L'estimation de la valeur de l'option est alors la moyenne actualisée du payoff terminal multipliée par q.

L'échantillonnage stratifié

L'échantillonnage de valeurs représentatives d'une distribution de probabilité, plutôt que de valeurs aléatoires, permet généralement d'améliorer la précision de la simulation. Une façon de procéder consiste à effectuer un échantillonnage stratifié. Si l'on désire par exemple 1 000 tirages d'une distribution de probabilité, il convient de diviser la distribution en, par exemple, 10 intervalles équiprobables et de choisir 100 valeurs dans chacun de ceux-ci.

Si la loi est normale centrée-réduite et qu'on considère n intervalles, la valeur représentative du i-ème intervalle est :

$$N^{-1}\left(\frac{i-0{,}5}{n}\right)$$

où N^{-1} est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi normale. Ainsi, pour n = 4, les valeurs représentatives des quatre intervalles sont $N^{-1}(0{,}125)$, $N^{-1}(0{,}375)$, $N^{-1}(0{,}625)$ et $N^{-1}(0{,}875)$. Elles peuvent être calculées à l'aide de la fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE disponible dans Excel.

La méthode des moments

La méthode des moments consiste à ajuster les échantillons tirés de la distribution normale centrée-réduite de façon à récupérer la valeur exacte du premier, du second moment, et éventuellement des moments d'ordre supérieur. Notons ε_i $(1 \leq i \leq n)$ l'échantillon, extrait d'une distribution normale centrée-réduite, utilisé pour le calcul des variations d'une variable particulière pour une certaine période. Pour coller aux deux premiers moments de la distribution, nous calculons la moyenne de l'échantillon, m, et son écart-type, s. L'échantillon ajusté ε_i^* $(1 \leq i \leq n)$ est donné par :

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i - m}{s}$$

C'est cet échantillon ajusté, de moyenne effectivement nulle et d'écart-type égal à 1,0, qui est utilisé pour les calculs.

La méthode des moments permet d'économiser du temps de calcul, mais peut entraîner des problèmes de mémoire car chaque valeur tirée au sort doit être conservée jusqu'à la fin de la simulation. Cette méthode des moments est parfois appelée « rééchantillonnage

quadratique ». Elle est souvent appliquée conjointement avec la technique de la variable antithétique car cette dernière renvoie automatiquement la bonne valeur des moments impairs, aussi est-il suffisant, dans ce cas, d'ajuster l'échantillon pour récupérer la valeur exacte du deuxième et éventuellement du quatrième moment.

L'utilisation de séquences quasi aléatoires

Une séquence quasi aléatoire [19] (aussi appelée séquence à faible divergence) est une séquence de valeurs représentatives tirées d'une distribution de probabilité. Brotherton-Ratcliffe ainsi que Press *et al.* ont décrit plusieurs utilisations de séquences quasi aléatoires [20]. Ces séquences peuvent avoir l'intéressante propriété de réduire l'écart-type d'estimation ; il devient proportionnel à $1/M$ plutôt qu'à $1/\sqrt{M}$, où M est la taille de l'échantillon.

L'échantillonnage quasi aléatoire est semblable à l'échantillonnage stratifié, dans la mesure où l'objectif est de tirer au hasard des valeurs représentatives des variables sous-jacentes. Dans le cas de l'échantillonnage stratifié, le nombre de valeurs tirées au sort est supposé initialement connu. Le schéma d'échantillonnage quasi aléatoire est plus flexible : les valeurs sont tirées au hasard de façon à toujours combler les vides existant dans l'échantillon déjà construit. À chaque étape de la simulation, les valeurs de l'échantillon sont espacées à peu près régulièrement au sein de l'espace d'échantillonnage.

Le graphique 21.14 représente les points générés dans un espace à deux dimensions à l'aide de la procédure de Sobol' [21]. On observe bien que les nouveaux points tendent à combler les vides laissés par les points précédents.

21.8 Les méthodes de différences finies

La méthode des différences finies (ou schéma aux différences finies) permet d'évaluer les actifs dérivés à travers la résolution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) satisfaite par le prix de tout actif dérivé. Pour cela, l'EDP est convertie en un ensemble d'équations aux différences, et ces équations sont résolues de façon itérative.

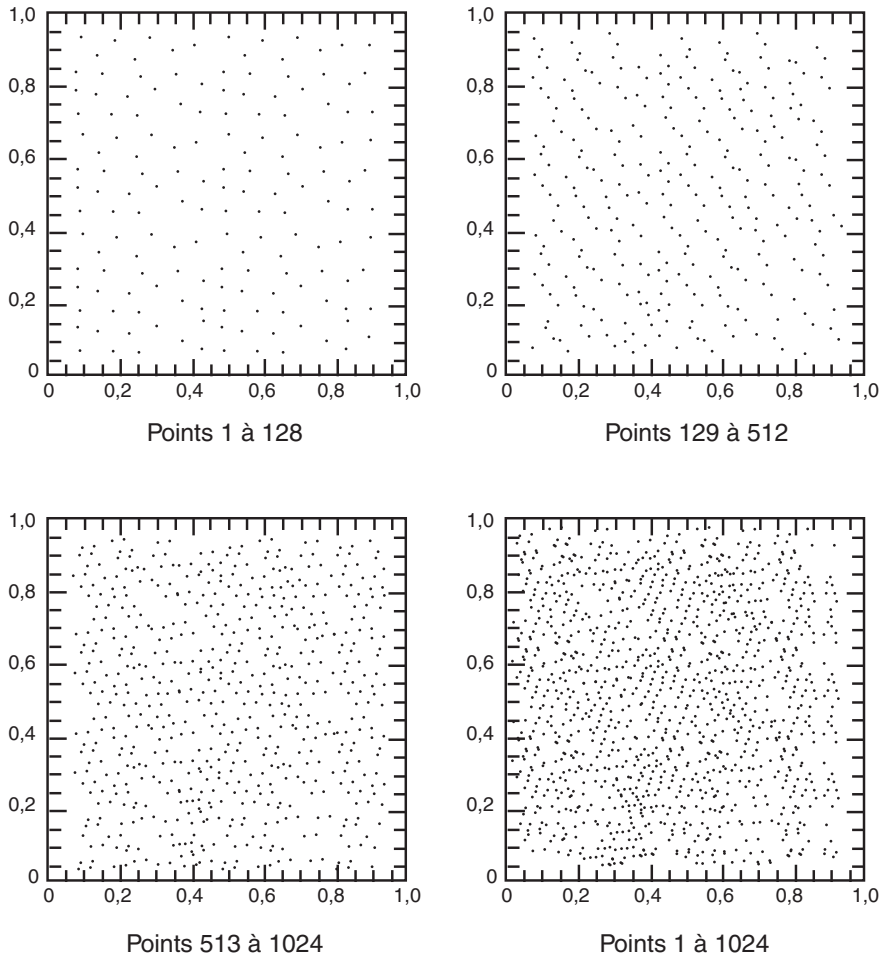
Illustrons cette approche pour l'évaluation d'un put américain sur une action versant un taux de dividende q. Cette option doit vérifier l'EDP suivante, déjà introduite à l'équation (17.6) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)\,S\,\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f \tag{21.21}$$

19. Il faut être attentif au fait que le terme quasi aléatoire est en fait inapproprié puisqu'une séquence quasi aléatoire est totalement déterministe.

20. Voir à ce sujet R. Brotherton-Ratcliffe, "Monte Carlo Monitoring", *RISK*, décembre 1994, 53-58, et W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

21. Voir I. M. Sobol', "On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7, 4 (1967), 86-112. Une description de la procédure de Sobol' peut être trouvée dans W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.



Graphique 21.14 : Les 1 024 premiers points d'une séquence de Sobol'

La durée de vie de l'option, T, est divisée en N intervalles de durée $\Delta t = T/N$. Les $N + 1$ dates pertinentes sont alors :

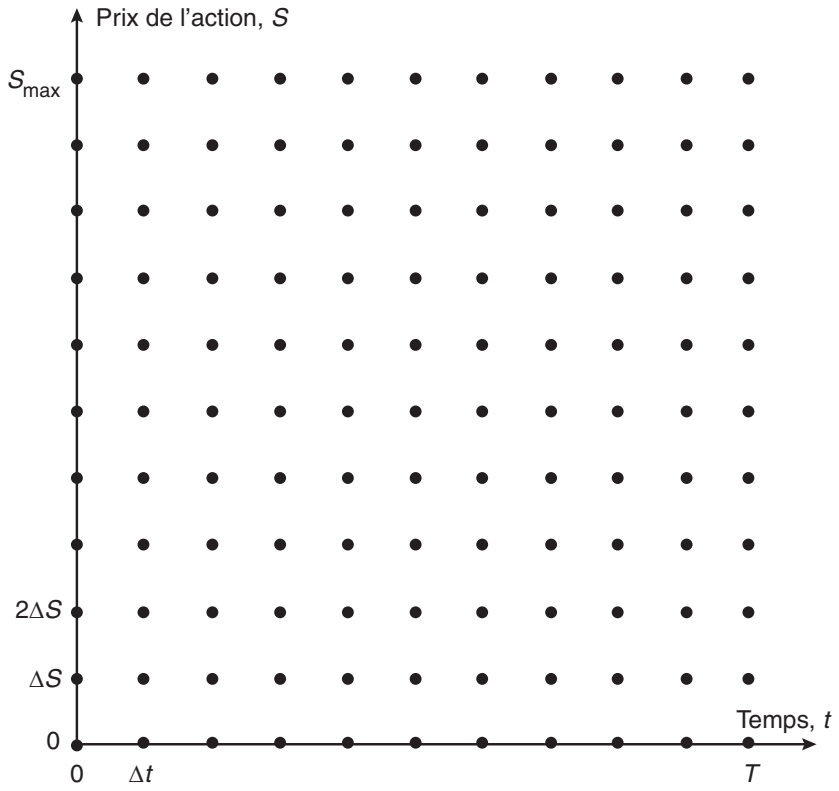
$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ T$$

Notons aussi $S_{\max}$ un prix de l'action suffisamment élevé pour qu'une fois celui-ci atteint, le put n'ait virtuellement plus aucune valeur. L'intervalle $[0\,;\ S_{\max}]$ est aussi divisé en M intervalles de longueur $\Delta S = S_{\max}/M$. On considère donc $M + 1$ prix de l'action régulièrement espacés :

$$0,\ \Delta S,\ 2\Delta S,\ \ldots,\ S_{\max}$$

La valeur de $S_{\max}$ doit être choisie de façon que l'un de ces prix soit le prix actuel de l'action.

Les dates et les prix de l'action définissent une grille de $(M + 1) \times (N + 1)$ points, représentée dans le graphique 21.15. Le point $(i,\ j)$ de la grille correspond à la date $i\Delta t$ et au prix de l'action $j\Delta S$, et $f_{i,j}$ désigne la valeur de l'option en ce point.



Graphique 21.15 : Grille utilisée pour la méthode des différences finies

La méthode implicite des différences finies

Pour tout point intérieur (i, j) de la grille, $\partial f/\partial S$ peut être approximé par :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \tag{21.22}$$

ou par :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \tag{21.23}$$

L'équation (21.22) est connue sous le nom d'approximation de la différence forward (ou progressive), et l'équation (21.23) sous le nom d'approximation de la différence backward (ou rétrograde). Une approximation centrée sera cependant privilégiée, en faisant la moyenne des deux précédentes :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \tag{21.24}$$

Pour $\partial f/\partial t$, l'approximation de la différence forward est retenue de façon que la valeur en date $i\Delta t$ soit liée à la valeur en date $(i + 1)\Delta t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \tag{21.25}$$

Voyons maintenant $\partial^2 f/\partial S^2$. L'approximation de la différence backward de $\partial f/\partial S$ au point (i, j) est donnée par l'équation (21.23). Au point $(i, j + 1)$, la différence backward est donc :

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

Dès lors, une approximation aux différences finies pour $\partial^2 f/\partial S^2$ au point (i, j) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \right) / \Delta S$$

ou encore :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \tag{21.26}$$

En substituant les équations (21.24), (21.25) et (21.26) dans l'équation aux dérivées partielles (21.21) et en remarquant que $S = j\Delta S$, on obtient :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q)\, j\, \Delta S\, \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\, \sigma^2\, j^2\, \Delta S^2\, \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = r f_{i,j}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, M - 1$ et $i = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Un réarrangement des termes conduit à :

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \tag{21.27}$$

avec :

$$a_j = \tfrac{1}{2}(r-q)\, j\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t, \quad b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t, \quad c_j = -\tfrac{1}{2}(r-q)\, j\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

À l'échéance, la valeur du put est $\max(K - S_T\,; 0)$, avec S_T la valeur de l'action à cette même date. Dès lors, on a :

$$f_{N,j} = \max\left(K - j\,\Delta S\,; 0\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, M \tag{21.28}$$

Quand le prix de l'action est nul, la valeur de l'option est K, aussi a-t-on :

$$f_{i,0} = K \qquad i = 0, 1, \ldots, N \tag{21.29}$$

On suppose que la valeur de l'option est nulle quand $S = S_{\max}$, de façon que :

$$f_{i,M} = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, N \tag{21.30}$$

Les équations (21.28), (21.29) et (21.30) donnent la valeur du put sur les trois bordures de la grille du graphique 21.15, pour S = 0, $S = S_{\max}$ et $t = T$. Il ne reste plus qu'à appliquer l'équation (21.27) pour obtenir la valeur de f pour tous les autres points. Il convient de commencer avec les points de la date $T - \Delta t$, ce qui revient à appliquer l'équation (21.27) avec $i = N - 1$:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \tag{21.31}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, M - 1$. Le membre de droite de ces équations est donné par l'équation (21.28). De plus, les équations (21.29) et (21.30) permettent d'écrire :

$$f_{N-1,0} = K \tag{21.32}$$

$$f_{N-1,M} = 0 \tag{21.33}$$

L'équation (21.31) définit un système de $M-1$ équations à $M-1$ inconnues [22] : $f_{N-1,1}$, $f_{N-1,2}$, ..., $f_{N-1,M-1}$. Une fois la résolution effectuée, on compare chaque valeur de $f_{N-1,j}$ avec $K-j\Delta S$. Quand $f_{N-1,j} < K-j\Delta S$, l'exercice anticipé à la date $T-\Delta t$ est optimal, aussi la valeur de $f_{N-1,j}$ est-elle fixée à $K-j\Delta S$. La résolution est identique pour les points de la date $T-2\Delta t$, et ainsi de suite jusqu'à la date initiale. En fin de compte, les valeurs $f_{0,1}$, $f_{0,2}$, ..., $f_{0,M-1}$ sont obtenues et le prix de l'option est l'une de ces valeurs.

La technique du contrôle de la différence peut être appliquée conjointement avec la méthode des différences finies. Dans ce cas, la même grille doit être utilisée pour évaluer une option semblable à celle dont on cherche à déterminer le prix, mais pour laquelle il existe une solution analytique. Il reste ensuite à appliquer l'équation (21.20) pour trouver un prix encore plus proche de la vraie valeur.

■ **Exemple 21.10** Le tableau 21.4 montre les résultats de l'utilisation de la méthode implicite des différences finies selon la procédure que nous venons de décrire pour l'évaluation du put américain de l'exemple 21.1. Nous avons choisi des valeurs de 20, 10 et 5 pour M, N et ΔS. Le prix de l'option est donc évalué pour des intervalles de prix de 5 €, entre 0 € et 100 €, avec des intervalles de temps d'une durée de quinze jours sur toute la durée de vie de l'option. La grille conduit à un prix du put de 4,07 €. La même grille conduit à une valeur de 3,91 € pour le même contrat européen. La formule de Black et Scholes donne 4,08 € comme véritable valeur du put européen, aussi l'estimation du contrôle de la différence pour le prix du put américain est-elle :

$$4{,}07 + 4{,}08 - 3{,}91 = 4{,}24 \text{ €}$$

La méthode explicite des différences finies

La méthode implicite des différences finies présente l'avantage d'être d'une grande robustesse. Elle converge en effet toujours vers la solution de l'équation aux dérivées partielles quand ΔS et Δt tendent vers zéro [23]. L'un des désavantages de cette méthode est qu'il faut résoudre un système de $M-1$ équations pour déterminer les valeurs des $f_{i,j}$ à partir des $f_{i+1,j}$. La méthode peut toutefois être simplifiée si l'on suppose que les valeurs de $\partial f/\partial S$ et de $\partial^2 f/\partial S^2$ au point (i,j) de la grille sont identiques à celles au point $(i+1,j)$. Les équations (21.24) et (21.26) deviennent :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

22. Ces équations peuvent être résolues sans avoir à inverser de matrice. L'équation (21.31) pour $j = 1$ permet d'exprimer $f_{N-1,2}$ en fonction de $f_{N-1,1}$; la deuxième équation permet d'exprimer $f_{N-1,3}$ en fonction de $f_{N-1,1}$; et ainsi de suite. La dernière équation donne une valeur pour $f_{N-1,1}$ qui peut alors être utilisée pour déterminer la valeur de tous les autres $f_{N-1,j}$.

23. Dans la mise en œuvre des méthodes des différences finies, ΔS doit rester proportionnel à $\sqrt{\Delta t}$ quand on fait tendre ces deux variables vers zéro.

Tableau 21.4 : Grille d'évaluation du put de l'exemple 21.1 pour la méthode implicite des différences finies

Cours de l'action (euros)	Distance à l'échéance (mois)										
	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
85	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
80	0,16	0,12	0,09	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
75	0,27	0,22	0,17	0,13	0,09	0,06	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
70	0,47	0,39	0,32	0,25	0,18	0,13	0,08	0,04	0,02	0,00	0,00
65	0,82	0,71	0,60	0,49	0,38	0,28	0,19	0,11	0,05	0,02	0,00
60	1,42	1,27	1,11	0,95	0,78	0,62	0,45	0,30	0,16	0,05	0,00
55	2,43	2,24	2,05	1,83	1,61	1,36	1,09	0,81	0,51	0,22	0,00
50	4,07	3,88	3,67	3,45	3,19	2,91	2,57	2,17	1,66	0,99	0,00
45	6,58	6,44	6,29	6,13	5,96	5,77	5,57	5,36	5,17	5,02	5,00
40	10,15	10,10	10,05	10,01	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
35	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00
30	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
25	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
20	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00
15	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
10	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00
5	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00
0	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

L'équation aux différences s'écrit alors :

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \tag{21.34}$$

avec :

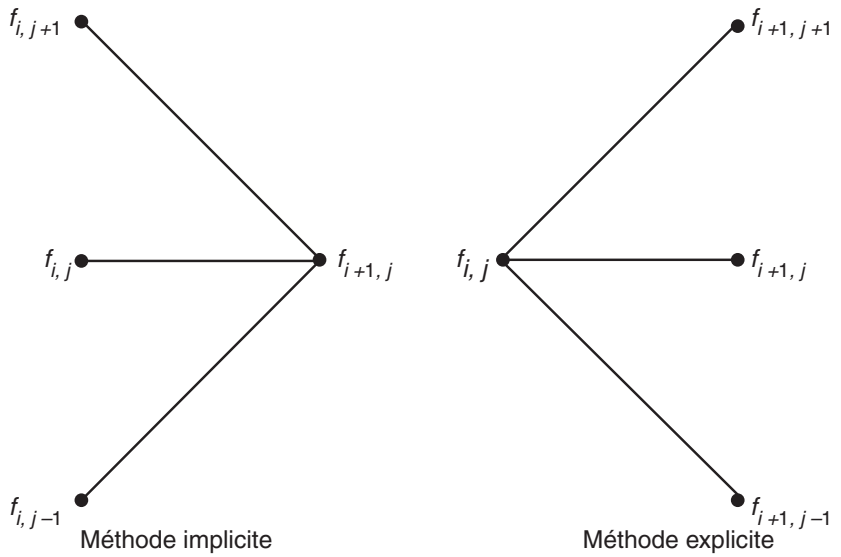
$$a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\tfrac{1}{2}(r-q)\,j\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\tfrac{1}{2}(r-q)\,j\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right)$$

Ce choix correspond à la méthode explicite des différences finies [24]. Le graphique 21.16 illustre la différence entre les méthodes implicite et explicite.

24. L'utilisation de l'approximation de la différence backward plutôt que de la différence forward pour $\partial f/\partial t$ conduit aussi à la méthode explicite des différences finies.



Graphique 21.16 : Différence entre les méthodes implicite et explicite des différences finies

La méthode implicite conduit à l'équation (21.27) qui donne une relation entre trois valeurs différentes de l'option à la date $i\Delta t$ (à savoir $f_{i,j-1}$, $f_{i,j}$ et $f_{i,j+1}$) et une valeur de l'option à la date $(i+1)\,\Delta t$ (qui est $f_{i+1,j}$). La méthode explicite conduit à l'équation (21.34), qui donne une relation entre une valeur de l'option à la date $i\Delta t$ ($f_{i,j}$) et trois valeurs différentes de l'option à la date $(i+1)\,\Delta t$, c'est-à-dire $f_{i+1,j-1}$, $f_{i+1,j}$ et $f_{i+1,j+1}$.

■ **Exemple 21.11** Le tableau 21.5 donne les résultats de l'évaluation du put américain de l'exemple 21.1 à l'aide de la méthode explicite des différences finies. Comme dans l'exemple 21.10, les valeurs choisies pour M, N et ΔS sont respectivement de 20, 10 et 5. La grille [25] conduit à un prix de l'option de 4,26 €.

Le changement de variable

Dans le cas où le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, il est plus efficace, en termes de temps de calcul, de mettre en place les méthodes des différences finies avec $\ln(S)$ plutôt que S. En notant $Z = \ln(S)$, l'équation (21.21) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q - \sigma^2/2)\,\frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = rf$$

La grille permet alors d'évaluer l'actif dérivé pour des valeurs régulièrement espacées de Z plutôt que de S.

25. Nous expliquerons plus loin dans ce chapitre les nombres négatifs et autres incohérences apparaissant dans la partie supérieure gauche du tableau.

Tableau 21.5 : Grille d'évaluation du put de l'exemple 21.1 pour la méthode explicite des différences finies

Cours de l'action (euros)	Distance à l'échéance (mois)										
	5	**4,5**	**4**	**3,5**	**3**	**2,5**	**2**	**1,5**	**1**	**0,5**	**0**
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
95	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90	−0,11	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
85	0,28	−0,05	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
80	−0,13	0,20	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
75	0,46	0,06	0,20	0,04	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
70	0,32	0,46	0,23	0,25	0,10	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
65	0,91	0,68	0,63	0,44	0,37	0,21	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00
60	1,48	1,37	1,17	1,02	0,81	0,65	0,42	0,27	0,00	0,00	0,00
55	2,59	2,39	2,21	1,99	1,77	1,50	1,24	0,90	0,59	0,00	0,00
50	4,26	4,08	3,89	3,68	3,44	3,18	2,87	2,53	2,07	1,56	0,00
45	6,76	6,61	6,47	6,31	6,15	5,96	5,75	5,50	5,24	5,00	5,00
40	10,28	10,20	10,13	10,06	10,01	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
35	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00	15,00
30	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
25	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
20	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00
15	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
10	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00	40,00
5	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00
0	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00

L'équation aux différences pour la méthode implicite devient :

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2)\,\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta Z} + \frac{1}{2}\sigma^2\,\frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta Z^2} = r f_{i,j}$$

ou encore :

$$\alpha_j f_{i,j-1} + \beta_j f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \tag{21.35}$$

avec :

$$\alpha_j = \frac{\Delta t}{2\Delta Z}\,(r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\beta_j = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2 + r\Delta t$$

$$\gamma_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\,(r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

Et pour la méthode explicite, l'équation aux différences s'écrit :

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-q-\sigma^2/2)\,\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta Z}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta Z^2}=rf_{i,j}$$

ou :

$$\alpha_j^* f_{i+1,j-1}+\beta_j^* f_{i+1,j}+\gamma_j^* f_{i+1,j+1}=f_{i,j} \tag{21.36}$$

avec :

$$\alpha_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{21.37}$$

$$\beta_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{21.38}$$

$$\gamma_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r-q-\sigma^2/2)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2\right) \tag{21.39}$$

Il est intéressant de noter que le changement de variable a pour conséquence de rendre α_j, β_j, γ_j, de même que α_j^*, β_j^* et γ_j^*, indépendants de j. Dans la plupart des cas, fixer $\Delta Z=\sigma\sqrt{3\Delta t}$ est efficace.

Le lien avec les arbres trinomiaux

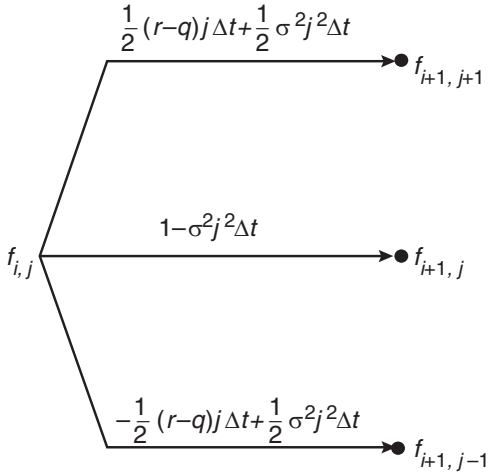
La méthode explicite des différences finies[26] est en fait équivalente à l'approche des arbres trinomiaux. Les expressions de a_j^*, b_j^* et c_j^* de l'équation (21.34) peuvent être interprétées de la sorte :

- $-\frac{1}{2}(r-q)\,j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$: probabilité que le prix de l'action diminue de $j\Delta S$ à $(j-1)\Delta S$ pendant la période de longueur Δt ;
- $1-\sigma^2 j^2\Delta t$: probabilité que le prix de l'action reste inchangé pendant la période de longueur Δt ;
- $\frac{1}{2}(r-q)\,j\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$: probabilité que le prix de l'action augmente de $j\Delta S$ à $(j+1)\Delta$S pendant la période de longueur Δt.

Le graphique 21.17 illustre cette interprétation.

La somme des trois probabilités est égale à 10. Sous ces probabilités, la variation espérée du prix de l'action pendant la durée Δt est $(r-q)\,j\Delta S\Delta t=(r-q)\,S\Delta t$, ce qui correspond à la variation espérée dans un univers risque-neutre. Sous ces mêmes probabilités, pour de petites valeurs de Δt, la variance de la variation du prix de l'action pendant la durée Δt est $\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t=\sigma^2 S^2\Delta t$. Ces valeurs correspondent au processus stochastique suivi par S. La valeur de f à la date $i\Delta t$ est calculée comme la valeur espérée de f à la date $(i+1)\Delta t$ dans un univers risque-neutre, actualisée au taux d'intérêt sans risque.

26. On peut aussi montrer que la méthode implicite des différences finies est équivalente à une approche par arbres multinomiaux dans laquelle $M+1$ branches partent de chaque nœud.



Graphique 21.17 : La méthode explicite des différences finies exprimée sous la forme d'un arbre trinomial

Pour que la méthode explicite des différences finies fonctionne correctement, les trois « probabilités » :

$$-\tfrac{1}{2}(r-q)\,j\Delta t+\tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t\ ,\quad 1-\sigma^2 j^2\Delta t\ ,\quad \tfrac{1}{2}(r-q)\,j\Delta t+\tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

doivent toutes être positives. Dans l'exemple 21.11, $1-\sigma^2 j^2\Delta t$ est négatif pour $j \geq 13$ (c'est-à-dire quand $S \geq 65$). Cette remarque explique les valeurs d'options négatives et les autres incohérences de la partie supérieure gauche du tableau 21.5. Cet exemple illustre bien le principal problème associé à la mise en œuvre de la méthode explicite des différences finies : les probabilités associées à l'arbre trinomial pouvant être négatives, cette méthode ne converge pas nécessairement vers la solution de l'équation aux dérivées partielles [27].

Si on suit l'approche du changement de variable, correspondant aux équations (21.36) à (21.39), les probabilités que $Z = \ln(S)$ diminue de ΔZ, ne change pas, ou augmente de ΔZ sont respectivement égales à :

$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$1-\frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}\left(r-q-\sigma^2/2\right)+\frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

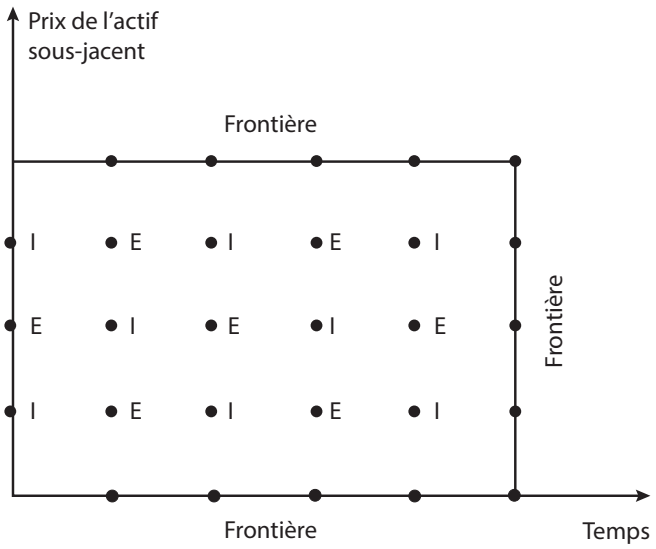
Ces variations de Z correspondent respectivement à des variations de prix de S à $S\,\mathrm{e}^{-\Delta Z}$, à S et à $S\,\mathrm{e}^{\Delta Z}$. On retrouve l'arbre et les probabilités de l'approche trinomiale présentée à la section 21.4 en fixant $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.

27. J. C. Hull et A. White montrent toutefois dans "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, mars 1990, 87-100, qu'il est possible de dépasser cette difficulté. Dans cette situation particulière, il suffit ainsi de construire la grille pour $\ln(S)$ plutôt que pour S pour s'assurer de la convergence.

D'autres méthodes des différences finies

La plupart des autres méthodes des différences finies proposées dans la littérature présentent des caractéristiques communes à la fois à la méthode explicite des différences finies et à la méthode implicite des différences finies.

Dans le cas de la méthode *hopscotch*, calculs explicites et implicites alternent au fur et à mesure du passage d'un nœud au nœud suivant, comme l'illustre le graphique 21.18.



Graphique 21.18 : La méthode hopscotch : les nœuds auxquels les calculs implicites sont effectués sont identifiés par les I ; les nœuds auxquels les calculs explicites sont effectués sont identifiés par les E

À chaque date, les valeurs aux nœuds « explicites » (notés E) sont d'abord calculées en suivant la méthode usuelle. Les valeurs aux nœuds « implicites » (notés I) peuvent ensuite être calculées sans qu'il soit nécessaire de résoudre un système d'équations puisque les valeurs aux nœuds adjacents sont déjà connues.

Dans le cas de la méthode de Crank-Nicolson, l'estimation de :

$$-\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

est obtenue par une moyenne des valeurs données par les méthodes explicite et implicite.

Les utilisations des méthodes des différences finies

Les méthodes des différences finies peuvent être employées pour la résolution des mêmes problèmes d'évaluation d'actifs dérivés que les approches reposant sur les arbres. Elles permettent l'évaluation de contrats européens aussi bien qu'américains, mais ne peuvent être facilement mises en œuvre quand les payoffs de l'actif dérivé dépendent du chemin suivi par le sous-jacent. Les méthodes des différences finies peuvent en revanche être employées quand les payoffs dépendent de plusieurs sous-jacents, mais seulement au prix d'un accroissement considérable du temps de calcul. La grille représentée dans le graphique 21.15 devient alors multidimensionnelle.

La méthode de calcul des lettres grecques est semblable à celle qui est utilisée pour les arbres. Le delta, le gamma et le thêta peuvent être calculés directement à partir des valeurs de $f_{i,j}$ de la grille. Pour le vega, il est nécessaire d'appliquer une légère variation à la volatilité et de recalculer la valeur de l'actif dérivé en utilisant la même grille.

Résumé

Nous avons, dans ce chapitre, présenté trois procédures numériques différentes d'évaluation des actifs dérivés quand il n'existe pas de solution analytique ; ces procédures reposent respectivement sur la construction d'arbres, la simulation de Monte-Carlo et les méthodes des différences finies.

Dans le cas des arbres binomiaux, le prix de l'action est supposé, pendant le court intervalle de temps Δt, augmenter d'une proportion u ou diminuer d'une proportion d. Les valeurs de u et d et les probabilités associées sont déterminées de telle façon que la moyenne et l'écart-type des changements de prix soient exacts dans un univers risque-neutre. Les prix des actifs dérivés sont alors calculés à partir de la date d'échéance par induction arrière. Pour les options américaines, la valeur retenue à un nœud est égale à la valeur maximale entre la valeur d'exercice immédiat et la valeur espérée actualisée résultant de la conservation de l'option pendant une période Δt supplémentaire.

La simulation de Monte-Carlo consiste, à partir de nombres tirés au hasard, à construire un échantillon de trajectoires du sous-jacent dans l'univers risque-neutre. Le flux terminal de l'actif dérivé est calculé pour chaque trajectoire et actualisé au taux d'intérêt sans risque. La valeur estimée de l'actif dérivé est alors la moyenne arithmétique des payoffs actualisés.

Les méthodes des différences finies résolvent l'EDP en la transformant en une équation aux différences. Elles ont en commun avec les approches par arborescence l'utilisation de l'induction arrière. La méthode explicite est en outre identique à l'approche trinomiale. L'avantage de la méthode implicite, plus compliquée par ailleurs, est qu'il n'est alors pas nécessaire de prendre des précautions particulières pour que la convergence soit assurée.

En pratique, le choix de la méthode à employer dépend principalement des caractéristiques des produits dérivés à évaluer et de la précision requise. Les simulations de Monte-Carlo, fonctionnant de la date initiale vers la date d'échéance, doivent plutôt être utilisées pour les contrats européens. Elles peuvent cependant s'accommoder de toutes sortes de raffinements, tant que ceux-ci concernent la définition des payoffs. Elles deviennent, en termes relatifs, plus économes en temps de calcul, à mesure qu'augmente le nombre de variables sous-jacentes. Les approches par arborescence et les méthodes des différences finies, fonctionnant depuis la date d'échéance vers la date initiale, peuvent être employées indifféremment pour l'évaluation des produits dérivés de type américain ou européen. Toutefois, elles sont délicates à appliquer quand les payoffs ne dépendent plus uniquement de la valeur terminale du sous-jacent mais aussi de la trajectoire suivie par celui-ci. Enfin, il y a de fortes chances qu'elles nécessitent des temps de calcul très importants dans le cas où plus de deux variables sous-jacentes doivent être prises en compte.

Références complémentaires

Générales

Clewlow L. et C. Strickland, *Implementing Derivatives Models*, Wiley, Chichester, 1998.

Press W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Sur l'approche par arborescences

Cox J., S. Ross et M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, octobre 1979, 229-264.

Figlewski S. et B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing", *Journal of Financial Economics*, 53, 1999, 313-351.

Hull J. C. et A. White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, septembre 1988, 237-251.

Rendleman R. et B. Bartter, "Two State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34, 1979, 1092-1110.

Sur la simulation de Monte-Carlo

Boyle P. P., "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, 323-338.

Boyle P. P., M. Broadie et P. Glasserman, "Monte Carlo Methods for Security Pricing", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 21, 1997, 1267-1322.

Broadie M., P. Glasserman et G. Jain, "Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices", *Journal of Derivatives*, 5, automne 1997, 25-44.

Sur les méthodes des différences finies

Hull J. C. et A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, mars 1990, 87-100.

Wilmott P., *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, Wiley, Chichester, 1998.

Problèmes et exercices

21.1 Quelles lettres grecques peuvent être estimées pour une option américaine, en ne construisant qu'un seul arbre binomial : le delta, le gamma, le vega, le thêta, le rhô ?

21.2 Calculez le prix d'un put américain de prix d'exercice 60 €, d'échéance 3 mois sur une action ne versant pas de dividendes, cotant 60 €, et de volatilité annuelle 45 %, quand le taux sans risque annuel s'élève à 10 %. Utilisez pour cela un arbre binomial avec des périodes d'un mois.

21.3 Expliquez comment mettre en œuvre la technique du contrôle de la différence quand une option américaine est évaluée à l'aide d'un arbre binomial.

21.4 Considérons un call américain d'échéance 9 mois et de prix d'exercice 200 cents sur un contrat futures sur maïs. Calculez le prix de cette option si le prix futures est 198 cents, le taux sans risque 8 % et la volatilité 30 %. Utilisez pour cela un arbre binomial avec des périodes d'une durée de trois mois.

21.5 Considérons une option dont le payoff terminal est égal à la différence entre le prix terminal de l'action et la moyenne des cours observés sur la durée de vie de l'option si celle-ci est positive, et nul sinon. Ce contrat peut-il être évalué à l'aide d'un arbre binomial ? Expliquez votre raisonnement.

21.6 « L'arbre du prix d'un actif payant des dividendes n'est pas recombinant, mais l'arbre pour le prix de l'action diminué de la valeur des dividendes futurs est recombinant. » Expliquez cette affirmation.

21.7 Montrez que les probabilités d'un arbre binomial à la Cox-Ross-Rubinstein sont négatives quand la condition de la note de bas de page 8 est vérifiée.

21.8 Utilisez un échantillon stratifié de taille 100 pour améliorer l'estimation de π dans l'encadré 21.1 et le tableau 21.1.

21.9 Expliquez pourquoi l'approche par simulation de Monte-Carlo ne peut pas facilement être utilisée pour évaluer les produits dérivés de type américain.

21.10 Considérons un put américain d'échéance 9 mois et de prix d'exercice 49 € sur une action ne versant pas de dividendes. Calculez le prix de cette option si l'action cote 50 €, pour un taux d'intérêt sans risque annuel de 5 % et une volatilité de 30 %. Utilisez pour cela un arbre binomial à trois périodes.

21.11 Utilisez un arbre binomial à trois périodes pour évaluer un call américain sur un contrat futures sur blé. Le prix futures est 400 cents, le prix d'exercice 420 cents, le taux sans risque 6 % et la volatilité annuelle 35 %. Estimez le delta de l'option à partir de l'arbre.

21.12 Considérons un call américain d'échéance 3 mois et de prix d'exercice 20 € sur une action dont le cours actuel est 20 €. Le taux sans risque annuel est égal à 3 %, la volatilité annuelle est estimée à 25 %, et un dividende de 2 € doit être versé dans un mois et demi. Utilisez un arbre binomial à trois périodes pour évaluer cette option.

21.13 Considérons un put américain sur une action ne versant pas de dividendes, d'échéance 1 an et de prix d'exercice 18 €. Le cours actuel de l'action est 20 €, le taux sans risque est égal à 15 % et la volatilité est estimée à 40 %. Utilisez le logiciel DerivaGem avec des périodes d'une durée de trois mois pour évaluer ce contrat. Imprimez l'arbre et vérifiez que les valeurs de l'option aux nœuds de la dernière et de l'avant-dernière date sont exactes. Utilisez le logiciel DerivaGem pour évaluer la version européenne de ce contrat. Améliorez votre estimation du prix de l'option américaine à l'aide de la technique du contrôle de la différence.

21.14 Considérons un put américain sur un indice boursier d'échéance 2 mois et de prix d'exercice 480. L'indice vaut actuellement 484 points, le taux sans risque est égal à 3 % et la volatilité de l'indice est estimée à 25 % par an. Évaluez ce contrat à l'aide d'un arbre binomial en divisant la durée de vie de l'option en quatre périodes de quinze jours.

21.15 Comment la technique du contrôle de la différence peut-elle être utilisée pour améliorer l'estimation du delta d'une option américaine obtenue à l'aide d'un arbre binomial ?

21.16 Supposez qu'on décide d'évaluer un call européen sur une action ne versant pas de dividendes, dont la volatilité est stochastique, à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo. Comment les techniques du contrôle de la différence et de la variable antithétique peuvent-elles permettre d'en améliorer l'efficacité numérique ? Expliquez pourquoi il est nécessaire de calculer six valeurs de l'option pour chaque trajectoire simulée si l'on veut employer à la fois la technique du contrôle de la différence et celle de la variable antithétique.

21.17 Quelles sont les modifications à apporter aux équations (21.27) à (21.30) quand on emploie la méthode des différences finies pour évaluer un call américain sur devises ?

21.18 Considérons un put américain sur une action ne versant pas de dividendes, d'échéance 4 mois et de prix d'exercice 21 €. Le cours actuel de l'action est 20 €, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle est estimée à 30 %. Évaluez cette option à l'aide de la méthode explicite des différences finies avec des intervalles de prix de 4 € et des intervalles de temps d'un mois.

21.19 Le prix spot du cuivre est de 0,60 $ par livre. Supposez que les prix futures (en dollars US par livre sterling) soient les suivants :

3 mois	0,59
6 mois	0,57
9 mois	0,54
12 mois	0,50

La volatilité annuelle du prix du cuivre est estimée à 40 % et le taux sans risque annuel est égal à 6 %. Évaluez un call américain sur le cuivre, de prix d'exercice 0,60 $ et d'échéance 1 an, à l'aide d'un arbre binomial en divisant la durée de vie de l'option en quatre trimestres. (Indication : comme nous l'avons expliqué à la section 18.7, le prix futures d'une variable est l'espérance de son prix futur dans un univers risque-neutre.)

21.20 Servez-vous de l'arbre binomial construit pour le problème 21.19 pour évaluer un titre délivrant un flux égal à x^2 dans un an, x étant le prix du cuivre.

21.21 Expliquez dans quel(s) cas les estimations du prix des actifs dérivés données par la méthode explicite des différences finies sont affectées par les conditions aux bornes pour $S = 0$ et $S \to \infty$.

21.22 Comment utiliseriez-vous la méthode de la variable antithétique pour améliorer l'estimation de la valeur de l'option européenne de l'encadré 21.2 et du tableau 21.2 ?

21.23 Une entreprise a émis des obligations convertibles d'une maturité de 3 ans et de nominal 25 € échangeables à tout moment contre deux actions de la société. L'entreprise peut en outre rembourser l'emprunt par anticipation, forçant ainsi la conversion, dès que le prix de l'action devient supérieur ou égal à 18 €. En supposant que l'entreprise décide de forcer la conversion à la première opportunité, quelles sont les conditions aux bornes du prix de l'actif dérivé ? Expliquez comment vous emploieriez les méthodes des différences finies pour évaluer l'obligation convertible si les taux d'intérêt sont constants. Vous supposerez pour cela que l'entreprise est sans risque de défaut.

21.24 Indiquez quelles formules peuvent être employées pour l'obtention de trois échantillons aléatoires tirés de lois normales centrées-réduites, quand il y a une corrélation $\rho_{i,j}$ entre l'échantillon i et l'échantillon j.

Questions complémentaires

21.25 Considérons un put américain, d'échéance 1 an, donnant le droit de vendre des francs suisses (CHF) contre des dollars US, à un prix d'exercice de 0,80 $. La volatilité du franc suisse est estimée à 10 % ; les taux d'intérêt des placements en dollars US et en francs suisses sont respectivement égaux à 6 % et 3 % ; le taux de change actuel est de 0,81. Évaluez cette option à l'aide d'un arbre binomial à trois périodes et estimez le delta de cette option.

21.26 Considérons un call américain d'échéance 1 an et de prix d'exercice 9,00 $ sur un contrat futures sur argent. Le prix futures est aujourd'hui 8,50 $, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 12 % et la volatilité annuelle du prix futures est estimée à 25 %. Évaluez cette option à l'aide du logiciel DerivaGem pour quatre périodes trimestrielles. Imprimez l'arbre et vérifiez que les valeurs de l'option aux nœuds de la date finale et de l'avant-dernière date sont exactes. Évaluez la version européenne de cette option avec DerivaGem et employez la technique du contrôle de la différence pour améliorer votre estimation du prix de l'option américaine.

21.27 Considérons un call américain d'échéance 6 mois portant sur une action devant verser un dividende de 1 € à la fin des deuxième et cinquième mois. L'action cote 30 €, le prix d'exercice est 34 €, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité de la part incertaine du prix de l'action est estimée à 30 % par an. Évaluez cette option à l'aide du logiciel DerivaGem en divisant la durée de vie de l'option en six périodes mensuelles. Comparez votre résultat avec l'approximation de Black donnée à la section 15.12.

21.28 La livre sterling s'échange actuellement contre 1,60 $, et la volatilité du taux de change livre sterling/dollar US est estimée à 15 % par an. Les taux d'intérêt sans risque annuels aux États-Unis et en Grande-Bretagne sont respectivement égaux à 6 % et 9 %. Évaluez un call américain de prix d'exercice 1,62 $ et d'échéance 1 an à l'aide de la méthode explicite des différences finies. Considérez pour cela des taux de change entre 0,80 et 2,40 par pas de 0,20, et des intervalles de temps trimestriels.

21.29 Répondez aux questions suivantes concernant les procédures alternatives de construction d'arbres vues à la section 21.4.

a. Montrez que le modèle binomial de la section 21.4 donne exactement la moyenne et la variance des variations du logarithme du prix de l'action pendant la période de temps Δt.

b. Montrez que l'arbre trinomial de la section 21.4 donne exactement la moyenne et la variance des variations du logarithme du prix de l'action pendant la période de temps Δt, quand les termes d'ordre supérieur à 2 en Δt sont ignorés.

c. Construisez un modèle trinomial alternatif à celui de la section 21.4, tel que les probabilités associées aux branches haute, moyenne et basse partant de chaque nœud soient respectivement égales à 1/6, 2/3 et 1/6. Supposez pour cela que les branches mènent de S à Su, Sm et Sd avec $m^2 = ud$. Votre arbre doit donner les valeurs exactes de la moyenne et de la variance du logarithme du prix de l'action.

21.30 Les fonctions du développeur d'applications de DerivaGem vous permettent de vérifier dans quelle mesure les prix d'options calculés à l'aide d'arbres binomiaux convergent vers la valeur correcte à mesure que l'on augmente le nombre de périodes (voir le graphique 21.4 et l'application A de DerivaGem). Considérons une option de vente d'échéance 2 ans et de prix d'exercice 900 portant sur un indice boursier valant aujourd'hui 900 points. Le taux sans risque annuel est égal à 5 % et le rendement en dividendes de l'indice est estimé à 2 %.

a. Présentez des résultats de convergence semblables à ceux de l'application dans le cas où l'option est européenne et la volatilité de l'indice est égale à 20 %.

b. Présentez des résultats de convergence semblables à ceux de l'application dans le cas où l'option est américaine et la volatilité de l'indice est égale à 0 %.

c. En employant la technique du contrôle de la différence avec une volatilité de 20 %, construisez un diagramme dans lequel le prix de l'option américaine est fonction du nombre de périodes choisi.

d. Supposez que l'option américaine cote 85,0. Construisez un diagramme liant l'estimation de la volatilité implicite avec le nombre de périodes choisi.

21.31 Estimez le delta, le gamma et le thêta en date initiale à partir de l'arbre de l'exemple 21.3 (graphique 21.5). Comment pouvez-vous interpréter ces valeurs ?

21.32 Dans l'exemple 21.4 (graphique 21.6), calculez le gain associé à l'exercice anticipé au bout de neuf mois, dans le cas où le sous-jacent n'a subi que des mouvements down depuis la date initiale.

21.33 On utilise un arbre binomial à la Cox-Ross-Rubinstein pour évaluer un put américain d'échéance 1 an et de prix d'exercice 500 sur un indice boursier. La valeur de l'indice est de 500, le taux de versement de dividendes est de 2 %, le taux sans risque de 5 % et la volatilité est de 25 % par an. Évaluez l'option et estimez le delta, le gamma et le theta en date initiale. Expliquez comment le vega et le rho pourraient être estimés.

Chapitre 22

Value at Risk et expected shortfall

Au chapitre 19, nous avons examiné des mesures telles que le delta, le gamma ou le vega pour décrire différents aspects du risque d'un portefeuille contenant des options, et éventuellement d'autres actifs. Une institution financière calcule ces différentes mesures chaque jour, pour chaque variable de marché à laquelle sa situation est sensible. Mais des centaines ou des milliers de variables peuvent avoir une influence. Une analyse en termes de delta-gamma-vega requiert la production d'une quantité énorme de mesures. Si celles-ci sont utiles aux traders, elles le sont beaucoup moins à la direction générale, qui doit disposer d'informations pertinentes, certes, mais surtout synthétiques.

La valeur exposée au risque (qu'on appelle parfois, en français, valeur à risque ou encore valeur en risque, mais pour laquelle on garde le plus souvent l'appellation anglo-saxonne *Value at Risk* ou VaR) ainsi que l'*expected shortfall* (que nous définirons un peu plus loin et que nous noterons ES) sont deux façons d'exprimer en un seul nombre l'exposition au risque d'un portefeuille ou d'une position. Jusqu'à récemment, les banques centrales et, plus généralement, les régulateurs utilisaient le plus souvent la VaR pour déterminer le niveau de capitaux propres que doivent posséder les institutions financières lorsqu'elles détiennent des positions risquées, mais elles passent maintenant à l'ES pour ce qui concerne le risque de marché.

Dans ce chapitre, nous décrivons ces mesures de VaR et d'ES et exposons les deux approches principales permettant de les calculer. Ce sont respectivement la simulation historique et l'approche de construction de modèle (ou approche variance-covariance).

22.1 Les mesures de VaR et d'ES

Lorsqu'un gérant de portefeuille utilise une mesure de risque comme la VaR, il cherche à élaborer une constatation du type suivant : « Nous perdrons moins de V euros dans les N prochains jours avec une probabilité de X. » La variable V est alors la VaR du portefeuille à N jours au seuil X. Dans l'évaluation des capitaux propres nécessaires

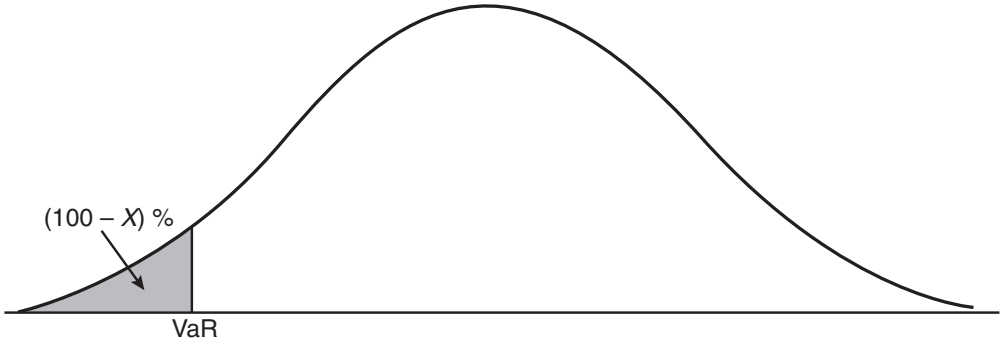
à la couverture des risques, le régulateur utilise en général $N = 10$ et $X = 99\ \%$ (voir l'encadré 22.1). Il s'intéresse donc à la perte potentielle qui sera dépassée avec une probabilité de 1 %. Le plus souvent, lorsque N est l'horizon et X le seuil de confiance, la VaR est le $100\,(1-X)$ centile de la distribution de probabilité des variations de valeur du portefeuille dans les N jours à venir.

Encadré 22.1 Comment le régulateur utilise-t-il la VaR ?

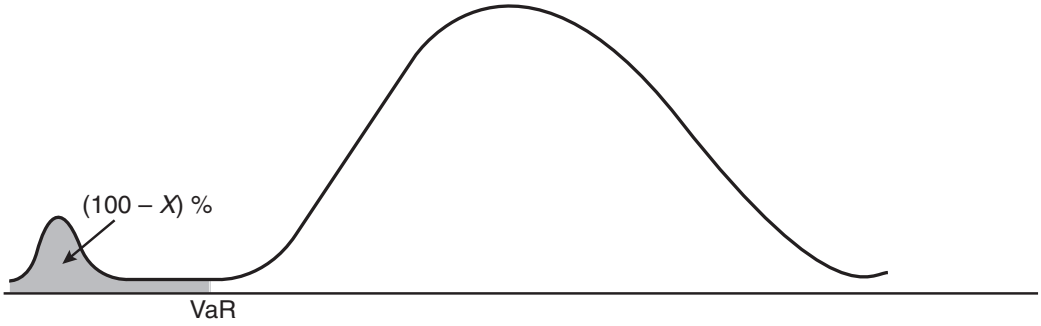
La Comité de Bâle, qui se réunit régulièrement à Bâle, est une institution regroupant les régulateurs des systèmes bancaires du monde entier. En 1988, par « l'accord de Bâle » le comité a défini la façon de calculer les montants de capitaux propres exigibles pour compenser un risque de crédit supporté par une institution financière. Quelques années plus tard, en 1996, il a publié un « amendement » mis en œuvre en 1998. Il englobe à la fois le risque de marché et le risque de crédit en distinguant la composante marché (*trading book*) et la composante bancaire classique (*banking book*). Cette dernière contient en particulier les prêts accordés par les établissements bancaires. Le risque associé n'est pas réévalué aussi souvent que celui de la composante marché, pour des raisons comptables et de gestion évidentes. Le trading book contient les divers instruments financiers traités par les institutions financières (actions, obligations, swaps, contrats forward et futures, options, etc.) ; il est réévalué chaque jour. L'amendement de 1996 préconise, pour le trading book, d'utiliser $N = 10$ et $X = 99$ pour le calcul de la VaR. Cela signifie que l'évaluation des pertes potentielles est faite à l'horizon de 10 jours, avec une probabilité de 1 % de dépasser le niveau de VaR calculé. Le capital requis est alors défini comme k fois cette mesure de VaR (avec un ajustement éventuel s'il existe des risques spécifiques). Le multiplicateur k peut varier d'une banque à l'autre (au gré du régulateur) mais il est supérieur ou égal à 3. Cette valeur minimale de 3 est réservée aux banques qui ont fait leurs preuves dans l'estimation de leurs propres risques. Si ce n'est pas le cas, la valeur de ce multiplicateur peut être plus élevée.

Le graphique 22.1 illustre ce calcul de VaR lorsque les variations de valeur du portefeuille sont supposées gaussiennes. La VaR a pour qualité essentielle sa simplicité. En bref, elle permet de répondre à la question : « Dans quelle mesure la valeur d'un portefeuille peut-elle se dégrader ? »C'est évidemment la question à laquelle tous les gérants souhaitent répondre. De plus, synthétiser l'ensemble des grecques (delta, gamma, thêta, etc.) en un seul nombre est attractif.

Si on suppose que le risque doit être mesuré par un seul nombre, la question est de savoir si la VaR est le meilleur choix. Certains chercheurs ont évoqué la possibilité que cette mesure engendre, chez les traders, une incitation à construire des portefeuilles dont la variation soit distribuée selon une loi comme celle qui est illustrée dans le graphique 22.2.



Graphique 22.1 : Calcul de la VaR au seuil de confiance X à partir d'une loi normale pour les variations de valeur du portefeuille



Graphique 22.2 : Situation alternative à celle du graphique 22.1 ; la VaR est la même mais les pertes potentielles sont plus importantes

La VaR est la même que dans le graphique 22.1, mais le risque est bien plus important. L'*expected shortfall* est une mesure tenant compte de cet aspect [1]. Si la VaR répond à la question « Comment la valeur de mon portefeuille peut-elle se dégrader ? », l'ES répond à la question « Si la situation se dégrade effectivement, quelle sera ma perte moyenne ? »L'ES mesure donc l'espérance de perte conditionnellement à une variation de valeur du portefeuille située dans le $100\,(1-X)$ centile. Par exemple, quand $X = 99\,\%$ et $N = 10$ jours, l'ES indique la perte moyenne dans les 10 jours quand la situation évolue vers les 1 % des cas les plus défavorables. Comme indiqué dans l'encadré 22.1, la régulation bancaire change, de sorte que l'ES est maintenant considéré comme une meilleure mesure du risque de marché que la VaR. Les niveaux de significativité usuels sont 99 % et 97,5 %.

L'horizon temporel

En théorie, la VaR et l'ES dépendent de deux paramètres, N et X. En pratique, on effectue les calculs, au moins dans un premier temps, en supposant que $N = 1$. C'est

1. Cette mesure, parfois appelée C-VaR, est suggérée par P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber et D. Heath, "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, 9, 1999, 203-228. Ces auteurs définissent les « bonnes » propriétés que doit posséder une mesure de risque et montrent que la VaR ne les possède pas toutes. Pour plus de détails, voir J. C. Hull, C. Godlewski et M. Merli, *Gestion des risques et institutions financières*, 3e éd., Pearson, Montreuil, 2013.

en général parce qu'on ne dispose pas de données suffisantes pour estimer directement le comportement des variables de marché pour des horizons plus longs. L'hypothèse retenue ensuite est que :

$$V(N;X) = V(1;X) \times \sqrt{N}$$

$$ES(N;X) = ES(1;X) \times \sqrt{N}$$

où $V(N;X)$ ($ES(N;X)$) est la VaR (l'ES) à N jours au seuil X.

Ces formules sont exactes quand les variations successives de la valeur du portefeuille sont supposées normales, indépendantes et centrées. Quand ces hypothèses ne sont pas vérifiées, ces relations sont des approximations.

22.2 La simulation historique

L'un des moyens les plus courants pour estimer la VaR est la simulation historique. Cette méthode s'appuie très directement sur les variations passées pour estimer la distribution des variations futures. Supposons que nous souhaitions calculer la VaR à un jour au seuil de 99 %, c'est-à-dire $V(1\,;\,99\ \%)$, à partir d'un historique de 500 données journalières. La première étape consiste à identifier les variables de marché pertinentes. Ce seront par exemple des taux d'intérêt, des taux de change, des prix d'actions, etc. Tous les prix sont mesurés en devise domestique. On collecte alors des données pour ces variables sur les 500 jours qui viennent de s'écouler. Cela donne 500 scénarios sur les possibilités de variation entre aujourd'hui et demain. Pour chacun des scénarios, on calcule la variation de valeur du portefeuille entre aujourd'hui et demain. On construit ainsi une distribution de probabilité des variations de valeur du portefeuille analysé. La cinquième variation la plus défavorable définit le premier centile [2], soit $V(1\,;\,99\ \%)$. Sous l'hypothèse que les 500 jours passés fournissent un bon estimateur des variations futures, cette cinquième variation la plus défavorable est bien l'estimateur de la VaR à un jour au seuil de 99 %. La probabilité que la perte dépasse la VaR est alors de 1 %. Pour préciser cette approche, considérons une variable v valant v_i dans le scénario i. Si v_n est l'observation d'aujourd'hui, la simulation de v pour demain selon le scénario i est alors $v_n \frac{v_i}{v_{i-1}}$.

Illustration : investissement dans un portefeuille de quatre indices

Pour illustrer cette approche, prenons le cas d'un portefeuille d'une valeur de 10 millions de dollars US composé de quatre indices boursiers : le Dow Jones Industrial Average (DJIA) (États-Unis), le FTSE 100 (Royaume-Uni), le CAC 40 (France) et le Nikkei 225 (Japon), en date du 25 septembre 2008 (voir tableau 22.1). Une feuille Excel contenant 501 jours d'historique des valeurs de clôture pour ces indices ainsi que l'ensemble

2. Ici on peut discuter pour savoir s'il faut prendre la 5e perte ou la 6e, ou une moyenne des deux. Dans Excel, si on a n observations et si k est un entier, le nombre de rang $k+1$est le percentile $k/(n-1)$ donné par la fonction CENTILE.

des calculs de la VaR sont disponibles sur le site web www-2.rotman.utoronto.ca/∼hull/OFOD/VaRExample [3]. Les données du tableau 22.2 en sont extraites.

Tableau 22.1 : Portefeuille utilisé pour le calcul de la VaR

Indice	Valeur du portefeuille (en milliers de dollars US)
DJIA	4 000
FTSE 100	3 000
CAC 40	1 000
Nikkei 225	2 000
Total	10 000

La date du 25 septembre 2008 est intéressante pour valoriser un portefeuille de marché, car à cette date, la crise financière sévissait déjà depuis un an. Les prix des actions étaient en baisse depuis plusieurs mois, la volatilité explosait et Lehman Brothers venait de faire faillite, tandis que le Troubled Asset Relief Program (TARP) de 700 milliards de dollars US n'avait pas encore été voté par le Congrès américain.

Tableau 22.2 : Données sur indices boursiers pour la simulation historique (en équivalent USD, égales aux valeurs d'indice multipliées par le taux de change)

Jour	Date	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	07/08/2006	11 219,38	11 131,84	6 373,89	131,77
1	08/08/2006	11 173,59	11 096,28	6 378,16	134,38
2	09/08/2006	11 076,18	11 185,35	6 474,04	135,94
3	10/08/2006	11 124,37	11 016,71	6 357,49	135,44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	24/09/2008	10 825,17	9 438,58	6 033,93	114,26
500	25/09/2008	11 022,06	9 599,90	6 200,40	112,82

Le tableau 22.3 contient les valeurs des indices au 26 septembre 2008 générées selon 500 scénarios. Selon le scénario n° 1 (première ligne), la variation des indices entre le 25 et le 26 septembre 2008 est égale à celle observée entre le 7 et le 8 août 2006 ; selon le scénario n° 2 (deuxième ligne), cette variation est égale à celle observée entre le 8 et le 9 août 2006, et ainsi de suite. En général, selon le scénario i, la variation des indices entre le 25 et le 26 septembre 2008 est égale à celle des jours $i-1$ et i pour $1 \leq i \leq 500$ et les 500 lignes du tableau 22.3 correspondent aux 500 scénarios ainsi générés.

3. Afin de rendre l'exemple le plus clair possible, nous avons gardé uniquement les jours où les quatre indices étaient cotés. C'est pourquoi l'historique de données commence le 7 août 2006 pour se terminer le 25 septembre 2008.

Tableau 22.3 : Scénarios générés pour le 26 septembre 2008 sur la base des données du tableau 22.2

Scénario	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225	Valeur du portefeuille (en milliers de dollars US)	Pertes (en milliers de dollars US)
1	10 977,08	9 569,40	6 204,55	115,05	10 014,334	−14,334
2	10 925,97	9 676,96	6 293,60	114,13	10 027,481	−27,481
3	11 070,01	9 455,16	6 088,77	112,40	9 946,736	53,264
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
499	10 831,43	9 383,49	6 051,94	113,85	9 857,465	142,535
500	11 222,53	9 763,97	6 371,45	111,40	10 126,439	−126,439

Le DJIA valait respectivement 11 022,06, 11 173,59 et 11 219,38 les 25 septembre 2008, 8 août 2006 et 7 août 2006. Ainsi, la valeur du DJIA selon le scénario n° 1 est :

$$11\ 022{,}06 \times \frac{11\ 173{,}59}{11\ 219{,}38} = 10\ 977{,}08$$

De même, les valeurs du FTSE 100, du CAC 40 et du Nikkei 225 sont 9 569,23, 6 204,55 et 115,05 respectivement. La valeur du portefeuille selon le scénario n° 1 (en milliers de dollars US) est égale à :

$$4\,000 \times \frac{10\ 977{,}08}{11\ 022{,}06} + 3\,000 \times \frac{9\ 569{,}23}{9\ 599{,}90} + 1\,000 \times \frac{6\ 204{,}55}{6\,200{,}40} + 2\,000 \times \frac{115{,}05}{112{,}82} = 10\ 014{,}334$$

On constate un gain de 14 334 $ selon le scénario n° 1. Ces calculs sont répétés pour chaque scénario. Un histogramme des pertes est représenté au graphique 22.3 (les bâtonnets représentent des pertes en milliers de dollars US dans des intervalles de 450-550, 350-450, 250-350, et ainsi de suite).

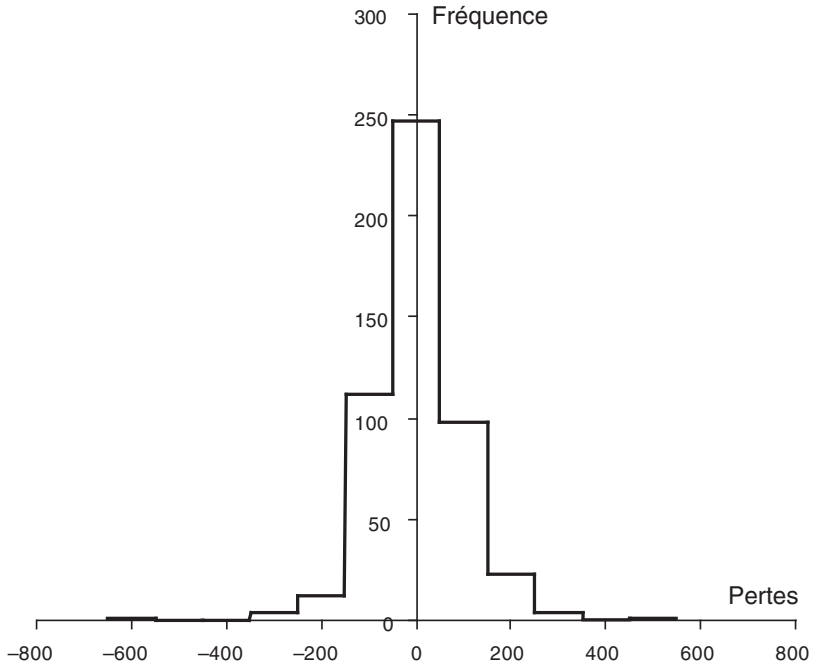
Ensuite, les pertes sont classées par ordre décroissant (voir tableau 22.4 pour un extrait). Le « plus mauvais » scénario est le 494, selon lequel les indices ont évolué avec la même amplitude que le jour de la faillite de Lehman Brothers. La VaR au seuil de 99 % à un jour correspond à la perte selon le cinquième « plus mauvais » scénario, soit 253 385 $.

La VaR au seuil de 99 % à dix jours correspond à la VaR au même seuil à un jour, multipliée par $\sqrt{10}$ (voir section 22.1), soit dans ce cas :

$$\sqrt{10} \times 253\ 385 = 801\ 274$$

Chaque jour, l'estimation de la VaR est actualisée à partir de l'historique des 501 jours les plus récents. Considérons, par exemple, ce qui survient le 26 septembre 2008 (jour 501). On dispose d'une nouvelle observation pour chaque variable de marché et l'on peut calculer la nouvelle valeur du portefeuille. La procédure décrite ci-dessus est reprise pour estimer la VaR à partir des données du 8 août 2006 au 26 septembre 2008 (jours 1 à 501), afin d'élaborer les nouveaux scénarios (cela garantit les 500 observations nécessaires sur

les variations des variables de marché ; les valeurs du 7 août 2006 – jour 0 – ne sont plus utilisées). De même, au jour suivant – 29 septembre 2008 (jour 502) –, les calculs seront effectués avec les données à partir du 9 août 2006 et jusqu'au 29 septembre 2009 (jours 2 à 502), et ainsi de suite.



Graphique 22.3 : Histogramme des pertes selon les scénarios considérés entre le 25 et le 26 septembre 2008

Tableau 22.4 : Pertes classées par ordre décroissant pour les 500 scénarios

Scénario	Pertes (milliers de dollars US)
494	477,841
339	345,435
349	282,204
329	277,041
487	253,385
227	217,974
131	205,256
238	201,389
473	191,269
306	191,059
477	185,127
495	184,450
376	182,707
237	180,105
365	172,224
⋮	⋮

En pratique, le portefeuille d'une banque est nettement plus complexe, puisqu'il compte des milliers, voire des dizaines de milliers de positions, incluant des forward, des options, etc. Parfois, une procédure de *simulation partielle* est employée pour accélérer l'évaluation des scénarios. Si l'activité de trading de la banque engendre un portefeuille plus (ou moins) risqué, la VaR au seuil de 99 % à dix jours augmente (ou diminue). La VaR est calculée sous l'hypothèse de composition fixe du portefeuille jusqu'au prochain jour ouvré.

Les variables de marché considérées dans le calcul de la VaR sont des taux de change, des prix de matières premières et des taux d'intérêt. Pour ces derniers, la banque doit disposer d'informations sur la structure zéro-coupon des taux d'intérêt du Trésor et Libor/swap pour différentes devises, afin d'évaluer sa position. Les variables de marché considérées sont celles à partir desquelles ces structures par terme sont calculées (voir chapitre 4). Il peut y avoir jusqu'à dix variables de marché pour chaque courbe zéro-coupon.

Le calcul de l'ES

Pour calculer l'ES en utilisant la simulation historique, on calcule la moyenne des observations se situant au delà du niveau de VaR. Dans notre exemple, les cinq pertes les plus importantes correspondent aux scénarios 494, 339, 349, 329, 487 (voir tableau 22.4). La moyenne de ces pertes est de 327 181 $, et ce montant est l'estimation de l'ES.

Scénarios de stress

Jusqu'à présent, nous avons utilisé les données historiques récentes pour la simulation historique. Par exemple, en calculant la VaR et l'ES dans l'exemple à quatre indices, ce sont les 501 jours précédents qui ont permis de réaliser les estimations. Cependant les estimations peuvent être réalisées avec n'importe quelle période passée, des périodes de forte (faible) volatilité conduisant à des estimations de VaR et d'ES élevées (faibles).

Les régulateurs ont introduit des mesures appelées VaR et ES *stressées*, pour lesquelles on utilise une période de 251 jours de volatilité extrême, permettant d'étudier le comportement du portefeuille détenu dans des contextes très perturbés. Cette période de 251 jours joue le même rôle que la période de 501 jours de l'exemple précédent, et la méthode de calcul est la même. Les variations des variables de marché entre le jour 0 et le jour 1 définissent le premier scénario, les variations du jour 1 au jour 2 le second scénario, et ainsi de suite. 250 scénarios sont ainsi créés. La VaR stressée au seuil de 99 % correspond à la moyenne des deuxième et troisième pertes. L'ES à un jour est alors calculé comme $0{,}4c_1 + 0{,}4c_2 + 0{,}2c_3$, où c_1,c_2 et c_3 sont les trois pertes les plus importantes, avec $c_1 > c_2 > c_3$.

22.3 L'approche variance-covariance

L'alternative essentielle à la simulation historique est l'approche variance-covariance, encore appelée approche de construction de modèle (*model building approach*). Avant

d'entrer dans la présentation détaillée, il est bon de revenir sur la façon de mesurer la volatilité.

Les volatilités journalières

Dans les modèles d'évaluation d'options, les volatilités sont exprimées en base annuelle. Dans l'approche de construction de modèle pour le calcul de la VaR, la période de référence est le jour ; la volatilité est donc exprimée par jour. Quelle est la relation entre la volatilité en base journalière intervenant dans le calcul de la VaR et la volatilité en base annuelle de l'univers des options ? Notons σ_a la volatilité annuelle et σ_j la volatilité journalière ; en supposant qu'il y a 252 jours de cotation par an, l'équation (15.2) établit entre ces deux quantités la relation :

$$\sigma_a = \sigma_j \sqrt{252}$$

De manière équivalente, l'écart-type journalier s'écrit :

$$\sigma_j = \frac{\sigma_a}{\sqrt{252}}$$

En d'autres termes, la volatilité journalière représente environ 6 % de la volatilité annuelle. Dans le calcul de la VaR ou de l'ES, on suppose que la volatilité journalière est l'écart-type de la variation journalière (en pourcentage) de l'actif ou du portefeuille considéré (voir section 15.4). Dans les sections suivantes, nous supposons que des estimations des volatilités et des corrélations sont disponibles pour les calculs présentés. Au chapitre 23, l'obtention de ces estimations sera abordée plus en détail.

Le cas d'un seul actif

Considérons pour l'instant le cas le plus simple d'un portefeuille contenant une seule action, par exemple 10 millions d'euros d'actions Sanofi ; comme précédemment, nous traitons le cas N = 10 et X = 99 %, mais nous cherchons dans un premier temps à calculer la VaR à un jour. Si la volatilité journalière de Sanofi est de 2 % (correspondant à une volatilité annuelle de 32 %), l'écart-type des variations journalières du portefeuille est 200 000 €. Il est courant de supposer, sur un horizon court (un jour ou dix jours), que l'espérance des variations est nulle. Cette hypothèse se justifie par le fait que l'espérance sur un intervalle court est négligeable face aux variations liées à la volatilité. Si, par exemple, Sanofi a une rentabilité annuelle espérée de 20 %, la rentabilité espérée journalière est $20\ \%/252 = 0{,}08\ \%$, alors que l'écart-type journalier est 2 %. À l'horizon de 10 jours, la rentabilité espérée est 0,8 % et l'écart-type $2\ \% \times \sqrt{10} = 6{,}3\ \%$.

Si on suppose de plus que les variations de valeur du portefeuille sont normalement distribuées [4], la variation de valeur du portefeuille a une probabilité inférieure à 1 % d'être supérieure à 2,326 fois l'écart-type. En d'autres termes, au seuil de confiance

4. Pour être cohérent avec le modèle d'évaluation d'options du chapitre 15, nous devrions supposer que le prix de Sanofi demain suit une loi log-normale. En fait, sur un intervalle très court, la différence avec l'hypothèse de variations gaussiennes est négligeable.

de 99 %, la valeur du portefeuille ne baissera pas de plus de 2,326 fois l'écart-type. Par conséquent, sur un portefeuille de 10 millions d'euros d'actions Sanofi, la VaR à 99 % (à un jour) est :

$$2{,}326 \times 200\,000 = 465\,300 \ \text{€}$$

Si N = 10, la VaR est égale à :

$$\sqrt{10} \times 465\,300 = 1\,471\,300 \ \text{€}$$

Considérons maintenant un portefeuille de 5 millions d'euros d'actions Renault, dont la volatilité journalière est 1 %. Les mêmes calculs conduisent à une VaR à un jour égale à :

$$2{,}326 \times 0{,}01 \times 5\,000\,000 = 116\,300 \ \text{€}$$

La VaR à dix jours est, quant à elle, égale à :

$$\sqrt{10} \times 116\,000 = 367\,800 \ \text{€}$$

Le cas de deux actifs

Que se passe-t-il pour un portefeuille qui contient simultanément 10 millions d'euros d'actions Sanofi et 5 millions d'euros d'actions Renault, si la corrélation des rentabilités des deux titres est ρ = 0,3 ? On sait que la variance de la somme de deux variables aléatoires X et Y s'écrit :

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y$$

L'application de ce résultat au portefeuille, en assimilant X à l'action Sanofi et Y à l'action Renault, donne un écart-type de variation de valeur du portefeuille égal à :

$$\sqrt{200\,000^2 + 50\,000^2 + 2 \times 0{,}3 \times 200\,000 \times 50\,000} = 220\,200 \ \text{€}$$

La VaR à un jour du portefeuille est donc :

$$2{,}326 \times 220\,200 = 512\,300 \ \text{€}$$

et la VaR à dix jours est égale à $512\,300 \times \sqrt{10} = 1\,620\,100$ € .

Les bénéfices de la diversification

Dans l'exemple considéré ci-dessus, on a donc :

1. La VaR à dix jours au seuil de 99 % de Sanofi est 1 471 300 € ;
2. La VaR à dix jours au seuil de 99 % de Renault est 367 800 € ;
3. La VaR à dix jours au seuil de 99 % pour le portefeuille de deux titres vaut 1 620 100 €.

Le montant :

$$1\,471\,300 + 367\,800 - 1\,620\,100 = 219\,000 \ \text{€}$$

représente le gain de diversification. Si les deux rentabilités étaient parfaitement (positivement) corrélées, la VaR du portefeuille serait égale à la somme des VaR des deux

titres individuels. Dès que cette corrélation n'est pas parfaite, il existe des gains de diversification [5].

Calcul de l'ES

Quand la perte est ditribuée selon une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on peut montrer que l'ES au niveau de significativité X s'écrit :

$$ES = \mu + \sigma \frac{\mathrm{e}^{-Y^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1-X)} \tag{22.1}$$

où Y est le $X^{\text{ème}}$ percentile de la loi normale centrée réduite (c'est-à-dire la valeur qui a une probabilité $1-X$ d'être dépassée par une variable qui suit une loi normale centrée réduite). On constate que lorsque $\mu = 0$, la VaR et l'ES sont proportionnels à l'écart-type.

Cette formule montre que dans notre exemple, l'ES à 10 jours du portefeuille d'actions Sanofi au seuil $X = 99\ \%$ ($Y = 2{,}326$) est égal à 1 687 000 €. Le portefeuille d'actions Renault a, quant à lui, un ES à 10 jours de 421 400 €. Le portefeuille diversifié des deux titres a un ES à 10 jours égal à 1 856 100 € du fait de la diversification.

22.4 Le modèle linéaire

Les exemples qui viennent d'être traités sont de simples illustrations de l'utilisation d'un modèle linéaire pour calculer la VaR. De manière générale, considérons un portefeuille P composé de n actifs avec des montants α_i, $1 \leq i \leq n$ investis dans ces actifs. Notons Δx_i la rentabilité journalière de l'actif i. La variation journalière de valeur du portefeuille, notée ΔP, s'écrit :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \tag{22.2}$$

Dans l'exemple de la section précédente, nous avions, en millions d'euros, α_1 = 10 et α_2 = 5 correspondant aux montants investis dans Sanofi et Renault. On peut donc écrire :

$$\Delta P = 10\,\Delta x_1 + 5\,\Delta x_2$$

Si les Δx_i de l'équation (22.2) suivent une loi jointe gaussienne, alors ΔP est normalement distribuée. Pour calculer la VaR, il suffit donc de calculer l'écart-type de ΔP. De plus, comme nous l'avons déjà mentionné, il est d'usage de supposer que $E(\Delta x_i)$ = 0 pour tout i, ce qui entraîne$E(\Delta P)$ = 0. Notons donc σ_i l'écart-type de la variation journalière de i et ρ_{ij} la corrélation entre Δx_i et Δx_j. La variance de ΔP, notée σ_P^2, est alors définie par :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j$$

5. Harry Markowitz fut l'un des premiers à étudier les bénéfices de la diversification. Il fut lauréat du prix Nobel d'économie en 1990 pour ses travaux. Voir H. Markowitz, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7 (1), mars 1952, 77-91.

Cette équation peut encore s'écrire :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \leq i} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \tag{22.3}$$

L'écart-type de ΔP sur N jours vaut alors $\sigma_P \sqrt{N}$ et la VaR à 99 % du portefeuille est égale à $2{,}326 \times \sigma_P \sqrt{N}$.

Dans l'exemple de la section précédente, σ_1 = 0,02, σ_2 = 0,01 et ρ_{12} = 0,3 ; comme α_1 = 10 et α_2 = 5, on peut écrire :

$$\sigma_P^2 = 10^2 \times 0{,}02^2 + 5^2 \times 0{,}01^2 + 2 \times 10 \times 5 \times 0{,}3 \times 0{,}02 \times 0{,}01 = 0{,}0485$$

d'où l'on déduit σ_P =22 %. Cette quantité est l'écart-type en millions d'euros de la variation de valeur journalière du portefeuille. La VaR à 99 % à 10 jours vaut donc $2{,}326 \times \sqrt{10} \times 0{,}22 = 1{,}62$ million d'euros. C'est, bien sûr, le résultat trouvé précédemment.

Matrices de corrélation et de covariance

Une matrice de corrélation contient le coefficient de corrélation ρ_{ij} entre les variables i et j à la ligne i et à la colonne j (voir tableau 22.5).

Tableau 22.5 : Matrice de corrélation : ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les variables i et j

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \cdots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Comme une variable est toujours parfaitement corrélée avec elle-même, la diagonale de la matrice compte uniquement des 1. De plus, comme $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, la matrice est symétrique. La matrice de corrélation et les écarts-types journaliers des variables permettent de calculer la variance du portefeuille en utilisant l'équation (22.3).

Au lieu de travailler avec des corrélations et des volatilités, les analystes utilisent fréquemment des variances et des covariances. La variance journalière var_i de la variable i est égale au carré de la volatilité journalière :

$$\text{var}_i = \sigma_i^2$$

La covariance cov_{ij} entre les variables i et j est le produit des volatilités journalières des variables i et j et de la corrélation entre i et j :

$$\text{cov}_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

La variance du portefeuille décrite à l'équation (22.3) peut alors s'écrire :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \text{cov}_{ij} \alpha_i \alpha_j \tag{22.4}$$

Dans une matrice de covariance, le terme de la ligne i et de la colonne j correspond à la covariance entre les variables i et j. La covariance d'une variable avec elle-même est sa variance ; c'est pourquoi la diagonale de cette matrice compte les variances (voir tableau 22.6). La matrice de covariance est de ce fait parfois appelée matrice variance-covariance. Cette matrice est également symétrique. En adoptant une notation matricielle, la variance du portefeuille devient :

$$\sigma_P^2 = \alpha^T C \alpha$$

avec α le vecteur (colonne) dont l'élément i est α_i, C est la matrice variance-covariance et α^T correspond au vecteur transposé de α.

Tableau 22.6 : Matrice variance-covariance : cov_{ij} est la covariance entre les variables i et j ; les variances sont en diagonale et $\text{var}_i = \text{cov}_{ii}$

$$\begin{bmatrix} \text{var}_1 & \text{cov}_{12} & \text{cov}_{13} & \cdots & \text{cov}_{1n} \\ \text{cov}_{21} & \text{var}_2 & \text{cov}_{23} & \cdots & \text{cov}_{2n} \\ \text{cov}_{31} & \text{cov}_{32} & \text{var}_3 & \cdots & \text{cov}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}_{n1} & \text{cov}_{n2} & \text{cov}_{n3} & \cdots & \text{var}_n \end{bmatrix}$$

Les variances et les covariances sont généralement calculées à partir de données historiques. Nous illustrerons ce calcul à la section 23.8, avec les données de l'exemple à quatre indices de la section 22.2.

Le cas des instruments de taux

Il est évidemment hors de question de définir une variable de marché pour chaque obligation ou chaque taux d'intérêt ; des simplifications sont nécessaires. Un moyen simple consiste à envisager uniquement des déplacements parallèles de la courbe des taux. Dans ce cas, une seule variable de marché est nécessaire, à savoir l'amplitude Δy de ce déplacement. La variation de valeur du portefeuille considéré s'écrit dans ce cas :

$$\Delta P = -DP\Delta y$$

où D désigne la duration modifiée du portefeuille.

Cette approche n'est cependant pas suffisamment précise. La procédure suivie habituellement consiste plutôt à choisir, comme variables de marché, quelques prix d'obligations zéro-coupon avec des maturités usuelles : trois mois, six mois, un an, deux ans, cinq ans, sept ans, dix ans, trente ans. Les flux engendrés par le portefeuille sont alors transformés en flux équivalents reçus aux dates d'échéance des ZC de référence. Considérons

un portefeuille de 1 million d'euros d'obligations d'État, payant des coupons semestriels au taux annuel de 6 %, et d'échéance 1,2 an. Les coupons sont donc payés dans 0,2 an et 0,7 an ; de plus, le principal et le dernier coupon sont payés dans 1,2 an. Ces différents flux vont être remplacés par un portefeuille de ZC à un mois, trois mois, six mois, un an et deux ans, selon les principes suivants.

Le flux de 30 000 € à recevoir dans 0,2 an est équivalent à un portefeuille de ZC à un mois et trois mois. Le flux de 30 000 € à recevoir dans 0,7 an est équivalent à un portefeuille de ZC à six mois et un an. Enfin, le flux de 1 030 000 € à recevoir dans un 1,2 an est équivalent à un portefeuille de ZC à un an et deux ans. En définitive, l'obligation à coupons est équivalente à un portefeuille contenant des ZC pour les cinq échéances un mois, trois mois, six mois, un an et deux ans. La procédure de mise en œuvre de cette méthode, qualifiée de *cash-flow mapping*, est explicitée dans la note technique n° 25 sur le site www.pearson.fr.

Les applications du modèle linéaire

Le modèle linéaire s'applique de manière naturelle aux portefeuilles ne contenant pas d'actifs dérivés, c'est-à-dire aux portefeuilles d'actions, d'obligations, de devises et de matières premières. Il est par ailleurs bon de remarquer que, pour le calcul de la VaR, toutes les valeurs sont exprimées en devise domestique. Si une banque française retient la valeur du Nikkei 225 et celles d'obligations d'État britanniques comme variables de marché, les deux seront exprimées en euros.

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 4, l'actualisation aux taux OIS est utilisée régulièrement dans l'évaluation des contrats dérivés. Il faut donc s'assurer que dans le cash-flow mapping, les flux soient équivalents aux flux du contrat dérivé, en tenant compte de ce mode d'actualisation. Par exemple, un contrat forward sur devise d'échéance T est un actif dérivé qui peut être vu comme l'échange d'une obligation étrangère d'échéance T contre une obligation domestique de même échéance. Dans le calcul de la VaR ou de l'ES, ce contrat est donc équivalent à une position longue sur l'obligation étrangère, combinée à une position courte sur l'obligation domestique. De plus, comme nous l'avons montré précédemment, chaque obligation peut être transformée en utilisant le cash-flow mapping.

Considérons maintenant un swap de taux pour lequel le taux OIS est échangé contre un taux fixe ; au chapitre 7, nous avons vu qu'un tel swap pouvait s'interpréter comme l'échange d'une obligation à taux variable OIS contre une obligation à taux fixe. L'obligation à taux fixe est une obligation classique à coupons, et l'obligation à taux variable cote au pair juste après chaque date de paiement. Le swap se réduit donc à un échange d'obligations zéro-coupon. Si le taux variable est le LIBOR, on peut supposer que le spread futur entre LIBOR et OIS est égal au spread forward observé aujourd'hui. Il suffit alors d'ôter ce spread forward de la jambe fixe pour que le swap puisse être traité comme un swap OIS contre taux fixe.

Modèle linéaire et options

Que se passe-t-il quand le portefeuille analysé comporte des options ? Imaginons un portefeuille contenant des options sur un sous-jacent unique coté S aujourd'hui, et notons δ le delta de la position [6] (voir chapitre 19).

Comme δ est le taux de variation de la valeur du portefeuille par rapport à S, on peut écrire, en première approximation :

$$\delta = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

ou encore :

$$\Delta P = \delta \, \Delta S \tag{22.5}$$

Si $\Delta S = S \, \Delta x$, on a :

$$\Delta P = \delta \, S \, \Delta x$$

Quand une position dépendant de plusieurs variables de marché contient des options, on obtient une relation linéaire approximative sous la forme :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i \tag{22.6}$$

où S_i est la valeur de la i-ème variable de marché et δ_i est le delta du portefeuille par rapport à cette variable. Cette relation correspond à l'équation (22.2) :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$$

où $\alpha_i = S_i \delta_i$. Les équations (22.3) et (22.4) peuvent alors être utilisées pour calculer l'écart-type de ΔP.

■ **Exemple 22.1** Un portefeuille contient des options sur Sanofi et sur Renault, et ΔP désigne la variation de valeur de ce portefeuille. Les options sur Sanofi et sur Renault ont toutes deux un delta global égal à 6 000. Si Sanofi cote 20 € et Renault vaut 100 €, l'équation (22.6) permet, en première approximation, d'écrire :

$$\Delta P = 20 \times 6\,000 \, \Delta x_1 + 100 \times 6\,000 \, \Delta x_2$$

ou encore :

$$\Delta P = 120\,000 \, \Delta x_1 + 600\,000 \, \Delta x_2$$

où Δx_1 et Δx_2 sont ici les rentabilités journalières des deux actions considérées. Dans ce contexte, le portefeuille d'options est considéré équivalent à un investissement de 120 000 € dans Sanofi et de 600 000 € dans Renault. La volatilité journalière

6. Normalement le delta et le gamma d'un portefeuille sont notés avec des lettres grecques majuscules. Au cours de cette section, nous utilisons des minuscules pour éviter les confusions, Δ étant déjà utilisé à d'autres fins.

est de 2 % pour Sanofi et de 1 % pour Renault, et la corrélation entre les deux est 0,3. Dans ces conditions, l'écart-type de ΔP (en milliers d'euros) est donné par :

$$\sqrt{(120 \times 0{,}02)^2 + (600 \times 0{,}01)^2 + 2 \times 120 \times 0{,}02 \times 600 \times 0{,}01 \times 0{,}3} = 7{,}099$$

Si l'on souhaite ensuite calculer la VaR à 5 jours au seuil de 95 %, on obtient :

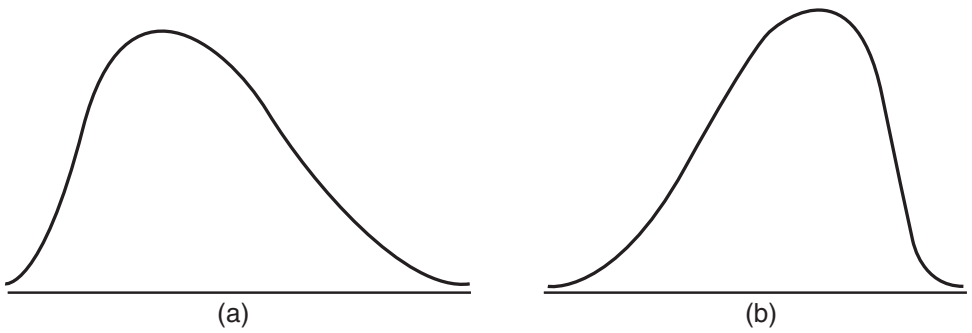
$$1{,}645 \times \sqrt{5} \times 7\,099 = 26\,110 \text{ €}$$

car la probabilité qu'une variable normale centrée-réduite soit inférieure à $-1{,}645$ est égale à 5 %.

22.5 Le modèle quadratique

Quand un portefeuille comporte des options, le modèle linéaire est très approximatif. En particulier, il ne tient pas compte du gamma du portefeuille. Nous l'avons déjà mentionné au chapitre 19, le delta du portefeuille mesure le taux de variation du portefeuille par rapport à une variable de marché (le prix d'une action par exemple), et le gamma mesure le taux de variation du delta par rapport à cette même variable. Le gamma caractérise donc la courbure de la fonction qui lie la valeur du portefeuille à la valeur de la variable de marché considérée.

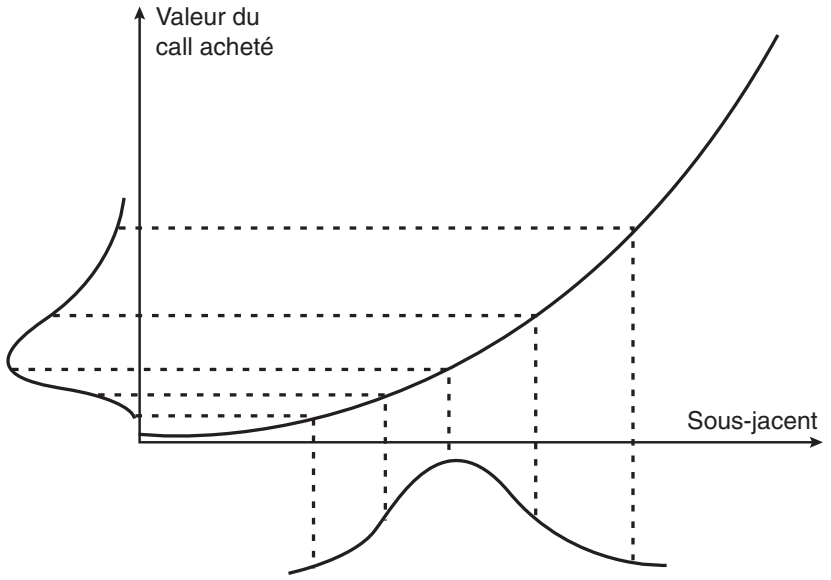
Le graphique 22.4 montre l'impact d'un gamma non nul sur la distribution de probabilité de la valeur du portefeuille. Quand le gamma est positif (négatif), cette distribution a une skewness positive (négative).



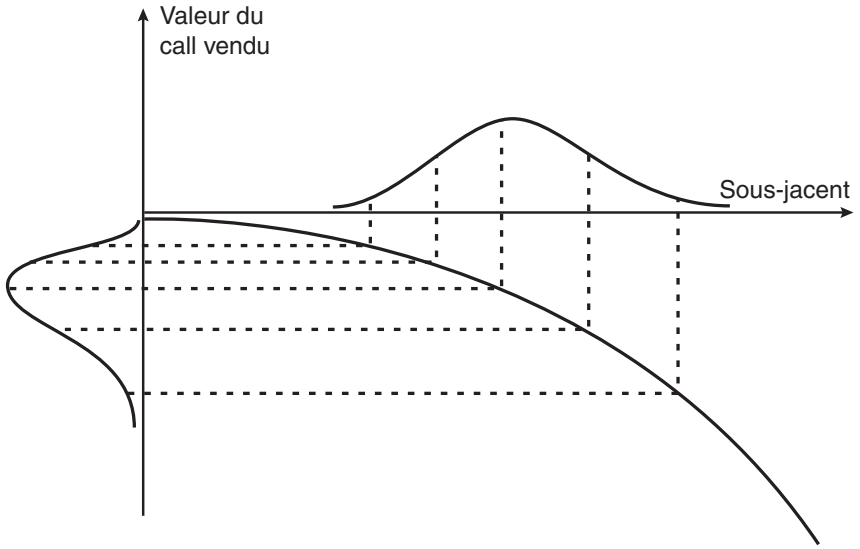
Graphique 22.4 : Distribution de la valeur du portefeuille pour (a) gamma positif et (b) gamma négatif

Les graphiques 22.5 et 22.6 justifient cette remarque. Le graphique 22.5 montre l'évolution du prix d'un call en fonction du prix du support. L'achat de call est la position la plus simple ayant un gamma positif. Le graphique montre que si la loi du prix est log-normale, celle du prix du call a une skewness positive [7]. Le graphique 22.6, quant à lui, illustre la relation entre la valeur d'une position courte sur un call et la valeur du support. Cette position a un gamma négatif et l'on constate que la loi du prix du call a une skewness négative.

7. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la note 4, la distribution log-normale est très proche de la distribution normale sur un horizon court.



Graphique 22.5 : Transformation de la distribution normale pour le prix du support en la distribution de la valeur d'un call acheté



Graphique 22.6 : Transformation de la distribution normale pour le prix du support en la distribution de la valeur d'un call vendu

La VaR ou l'ES d'une position dépend de manière cruciale de la queue gauche de la distribution de probabilité de la valeur du portefeuille considéré. Par exemple, au seuil de 99 %, la VaR est définie comme la valeur V telle que Prob $(P < -V) = 0{,}01$. Comme on peut le voir dans les graphiques 22.4a et 22.5, un gamma positif est associé à une queue de distribution plus fine à gauche. Si la loi est normale, la VaR calculée sera surévaluée. Dans les graphiques 22.4b et 22.6, le gamma est négatif et la queue de distribution est plus épaisse à gauche. Une approximation gaussienne aura tendance, dans ce cas, à sous-évaluer la VaR.

Pour améliorer l'estimation, on peut utiliser à la fois le delta et le gamma du portefeuille pour relier ΔP aux Δx_i. Considérons pour simplifier un portefeuille dépendant d'un seul actif dont le prix est noté S ; notons aussi δ et γ les delta et gamma du portefeuille [8]. On peut alors écrire :

$$\Delta P = \theta \Delta t + \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma \left(\Delta S\right)^2$$

En posant :

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

cette relation devient :

$$\Delta P = S\delta \Delta x + \frac{1}{2}S^2\gamma \left(\Delta x\right)^2 \tag{22.7}$$

Pour un portefeuille dépendant de n variables de marché, et où chaque instrument financier du portefeuille ne dépend que d'une seule variable, l'équation (22.7) s'écrit :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} S_i^2 \gamma_i \left(\Delta x_i\right)^2$$

où S_i est la valeur de la i-ème variable de marché, δ_i et γ_i désignant les coefficients delta et gamma correspondant à cette variable. Quand les actifs composant le portefeuille peuvent dépendre simultanément de plusieurs variables de marché, cette équation prend la forme plus générale :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{22.8}$$

où γ_{ij} est un gamma « croisé » c'est-à-dire :

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}$$

L'équation (22.8) est moins simple à manipuler que l'équation (22.2), mais elle est utile pour calculer les moments de ΔP. Un résultat connu en statistique sous le nom de « développement de Cornish-Fisher » fournit une relation entre les moments d'une distribution et ses centiles [9].

---

8. De l'annexe du chapitre 19, on déduit :

$$\Delta P = \delta \Delta S + \tfrac{1}{2}\gamma \left(\Delta S\right)^2$$

Il s'agit donc d'une amélioration par rapport à l'équation (22.5) quand les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport à Δt sont négligés. En pratique, le terme $\theta \Delta t$ est très faible, il est donc négligé lui aussi.

9. Voir la note technique n° 10 sur le site www.pearson.fr pour les détails du calcul des moments et l'utilisation du développement de Cornish-Fisher. Quand il y a une seule variable sous-jacente, on a $E(\Delta P) = 0{,}5S^2\gamma\sigma^2$; $E(\Delta P^2) = S^2\delta^2\sigma^2 + 0{,}75S^4\gamma^2\sigma^4$ et $E(\Delta P^3) = 4{,}5S^4\delta^2\gamma\sigma^4 + 1{,}875S^6\gamma^3\sigma^6$ où S est la valeur de la variable sous-jacente et σ la volatilité journalière. L'exemple E du développeur d'applications de DerivaGem met en œuvre ce développement de Cornish-Fisher.

22.6 La simulation de Monte-Carlo

L'approche de construction de modèle (ou de variance-covariance) peut être une alternative aux méthodes décrites précédemment ; la distribution de probabilité de ΔP peut en effet être simulée par une méthode de Monte-Carlo. Supposons que nous souhaitions calculer la VaR à un jour d'un portefeuille. La procédure se déroule ainsi :

1. Évaluer le portefeuille aujourd'hui avec les valeurs observées des variables de marché ;
2. Tirer un échantillon de la loi jointe [10] des Δx_i ;
3. Utiliser les valeurs obtenues en (2) pour calculer les valeurs de fin de journée des variables de marché ;
4. Réévaluer le portefeuille en fin de journée avec ces nouvelles valeurs ;
5. Soustraire de la valeur du portefeuille ainsi calculée la valeur calculée dans l'étape 1 pour disposer d'une simulation de ΔP ;
6. Répéter les étapes 2 à 5 un grand nombre de fois pour estimer la distribution de probabilité de ΔP.

La VaR est ensuite calculée au seuil de confiance souhaité. Considérons un échantillon de 5 000 valeurs de ΔP, obtenu par la méthode décrite ci-dessus. La VaR à un jour au seuil de 99 % correspond à la 50^e valeur la plus défavorable de ΔP ; de même, la VaR à 95 % correspond à la 250^e valeur la plus défavorable, et ainsi de suite [11]. La VaR à N jours s'obtient ici encore en multipliant la VaR à un jour par $\sqrt{N}$ [12].

L'inconvénient essentiel de la simulation de Monte-Carlo est le temps de calcul nécessaire. Le portefeuille complet d'une banque peut contenir des centaines, voire des milliers de titres différents. Il doit être évalué de nombreuses fois dans le cadre de la simulation [13]. Un moyen d'accélérer les calculs consiste à considérer que l'équation (22.8) décrit la relation entre ΔP et les Δx_i. On peut alors passer de l'étape 2 à l'étape 5 directement et éviter une réévaluation complète du portefeuille à chaque étape. Cette méthode est parfois appelée « simulation partielle ».

22.7 Comparaison des différentes approches

Nous avons abordé deux méthodes de calcul de la VaR : la simulation historique et l'approche variance-covariance. Les avantages de cette dernière résident dans la rapidité d'obtention des résultats et dans la possibilité de mettre à jour les structures de volatilité. L'inconvénient principal est l'hypothèse de normalité du vecteur des variables

10. Une façon de réaliser ce tirage est décrite à la section 21.6.

11. Comme dans le cas de la simulation historique, la théorie des valeurs extrêmes permet de lisser les queues de distribution pour mieux estimer les centiles extrêmes de la loi de ΔP.

12. Ceci n'est vrai que de manière approchée quand le portefeuille contient des options, mais c'est l'hypothèse faite habituellement par les praticiens.

13. Jamshidian et Zhu proposent une méthode permettant de réduire le nombre d'évaluations du portefeuille ; voir F. Jamshidian et Y. Zhu, "Scenario Simulation Model: Theory and Methodology", *Finance and Stochastics*, 1, 1997, 43-67.

de marché. En pratique, les variations journalières des variables de marché ne suivent pas une loi normale (voir tableau 20.1).

La simulation historique a l'avantage d'estimer la distribution jointe des variables de marché à partir des observations passées. Elle évite aussi le recours au cash-flow mapping. À l'inverse, cette méthode nécessite de longs calculs et ne permet pas de faire varier facilement la structure des volatilités [14].

22.8 Stress tests et *back-testing*

Quelle que soit la méthode retenue pour calculer la VaR, il est important d'opérer des vérifications *a posteriori* (*back-testing*). Elles consistent à s'assurer que les estimations de VaR ne sont pas trop fréquemment dépassées. Dans le cadre d'une VaR à un jour au seuil de 99 %, il faut vérifier que la VaR calculée n'est pas dépassée dans plus de 1 % des cas. Si des dépassements surviennent, par exemple, sept jours sur cent, c'est le signe que la méthodologie et/ou les hypothèses retenues sont inadaptées. Malheureusement le *back-testing* est beaucoup plus compliqué pour l'ES.

22.9 L'analyse en composantes principales (ACP)

Une des approches permettant de tenir compte de corrélations non négligeables entre variables de marché est l'analyse en composantes principales. Lorsque de nombreuses variables (les taux d'intérêt par exemple) sont corrélées, il est plus intéressant de construire, par combinaison linéaire des variables initiales, un faible nombre de variables non corrélées qui pourront servir de variables de marché dans le calcul de la VaR. Il s'agit donc de synthétiser l'information contenue dans l'ensemble des (nombreuses) variables initiales corrélées entre elles.

Pour illustrer brièvement cette méthode, considérons un ensemble de taux de swaps de maturités variant de un à trente ans. Les tableaux 22.7 et 22.8 donnent les résultats obtenus sur 2 780 observations journalières de ces taux entre 2000 et 2011.

La première colonne du tableau 22.7 indique les maturités considérées. Les dix colonnes suivantes donnent les corrélations (appelées aussi saturations, mais plus couramment *loadings*) entre les différentes variables de marché et les facteurs, c'est-à-dire les variables synthétiques construites par l'ACP, notées PC1 à PC8, de façon à résumer l'information contenue dans le tableau de données initial.

On constate que les loadings sur le premier facteur sont tous positifs ; cela signifie qu'une variation positive de ce facteur implique une hausse de tous les taux considérés. Si les taux sont mesurés en points de base, une augmentation d'une unité du premier facteur entraîne une hausse de 0,216 point de base du taux à un an, de 0,331 point de base du taux à deux ans, et ainsi de suite. Le second facteur a une interprétation différente. Les

14. Pour une adaptation de la méthode de simulation historique permettant d'intégrer une mise à jour de la volatilité, voir J. C. Hull et A. White, "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk", *Journal of Risk*, 1 (1), 1998, 5-19.

loadings des taux de court et moyen terme (jusqu'à quatre ans) sont négatifs alors qu'ils deviennent positifs pour les maturités plus longues. Par conséquent, une augmentation de ce facteur entraîne une baisse des taux courts et une hausse des taux longs, c'est-à-dire un accroissement de la pente de la courbe des taux. De ce fait, le deuxième facteur est appelé facteur de pente alors que le premier est appelé facteur de niveau. Quant au troisième facteur, les loadings sont positifs pour les taux courts et longs, et négatifs pour les taux de maturité moyenne. Ce troisième facteur caractérise la courbure de la structure par termes des taux d'intérêt[15]. Dans l'exemple traité ici, il y a dix facteurs et dix variables ; les variations de taux s'expriment donc parfaitement comme des combinaisons linéaires de ces huit facteurs. Il suffit de résoudre huit équations à huit inconnues. Cependant, nous n'avons rien gagné si dix facteurs sont conservés. Il faut donc mesurer leur capacité à restituer la dispersion des taux et garder ceux dont le pouvoir de restitution est le plus élevé.

Tableau 22.7 : Loadings pour les taux de swap US

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8
1 an	0,216	−0,501	0,627	−0,487	0,122	0,237	0,011	−0,034
2 ans	0,331	−0,429	0,129	0,354	−0,212	−0,674	−0,100	0,236
3 ans	0,372	−0,267	−0,157	0,414	−0,096	0,311	0,413	−0,564
4 ans	0,392	−0,110	−0,256	0,174	−0,019	0,551	−0,416	0,512
5 ans	0,404	0,019	−0,355	−0,269	0,595	−0,278	−0,316	−0,327
7 ans	0,394	0,194	−0,195	−0,336	0,007	−0,100	0,685	0,422
10 ans	0,376	0,371	0,068	−0,305	−0,684	−0,039	−0,278	−0,279
30 ans	0,305	0,554	0,575	0,398	0,331	0,022	0,007	0,032

Tableau 22.8 : Écart-type des composantes principales

PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8
17,55	4,77	2,08	1,29	0,91	0,73	0,56	0,53

Pour comprendre de quoi il s'agit, supposez que vous souhaitiez donner rendez-vous à un ami sur les Champs-Élysées. Cette avenue peut être vue comme un rectangle (c'est-à-dire un morceau de plan) dont la longueur est beaucoup plus grande que la largeur. Pour être précis sur le lieu du rendez-vous, il faudrait spécifier deux coordonnées, l'une sur la longueur (à 300 mètres de l'Arc de Triomphe) et l'autre sur la largeur (à 3 mètres des façades situées à gauche en descendant l'avenue). Il est évident que la deuxième information est de peu d'utilité par rapport à la première. On peut résumer le lieu

15. Pour chaque facteur, la somme des carrés des loadings est égale à 1.

de rendez-vous à la distance par rapport à l'Arc de Triomphe, en ayant sacrifié peu d'informations, tout en ayant économisé une donnée.

C'est ce que fait l'analyse en composantes principales. Les 2 780 observations des variations des huit taux de swap peuvent être vues comme un nuage de points dans un espace à huit dimensions. Le premier axe factoriel correspondra à la direction d'allongement maximal de ce nuage. Le deuxième sera, parmi les axes orthogonaux (non corrélés) au premier, celui qui traduit la dispersion maximale du nuage le long de cet axe, et ainsi de suite.

On appelle composantes principales les variables obtenues par combinaison linéaire des variables initiales selon le principe que nous venons de décrire. L'écart-type (ou la variance) de chaque composante principale mesure son importance en termes de restitution de l'information contenue dans les données initiales. Les résultats pour les dix facteurs, en points de base, apparaissent dans le tableau 22.8.

Par exemple, une variation sur la première composante principale d'un écart-type entraîne une variation du taux à un an égale à $17{,}55 \times 0{,}216 = 3{,}78$ points de base, et du taux à deux ans de $17{,}55 \times 0{,}331 = 5{,}81$ points de base, et ainsi de suite.

Les détails de la détermination des axes factoriels ne sont pas précisés ici. Mentionnons simplement que les variances des composantes principales (qui ne sont pas corrélées par construction) sont égales aux valeurs propres de la matrice de variance-covariance des variables initiales, et que la somme de ces variances est égale à la somme des variances des variables de marché (cette somme est appelée inertie). Dans notre exemple, l'inertie du nuage de points représentant les variations de taux est donnée par :

$$17{,}55^2 + 4{,}77^2 + \cdots + 0{,}53^2 = 338{,}8$$

Par conséquent, le pourcentage d'inertie expliqué par le premier axe est égal à :

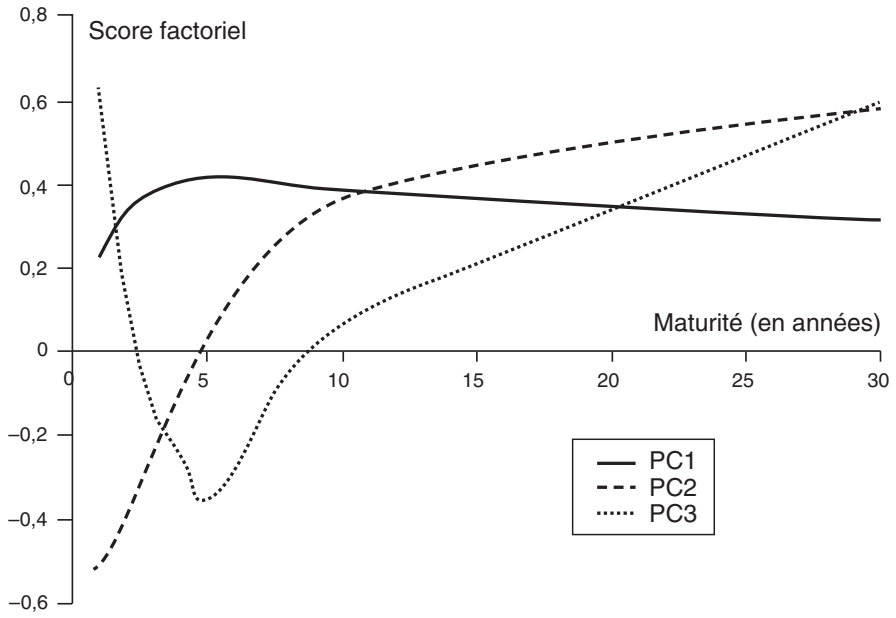
$$\frac{17{,}55^2}{338{,}8} = 90{,}9\ \%$$

De même, les deux premiers axes expliquent $\frac{17{,}55^2+4{,}77^2}{338{,}8} = 97{,}7\ \%$ de l'inertie, et le troisième axe environ 1,3 %. Ces calculs montrent que trois facteurs, voire deux, sont suffisants pour rendre compte de l'information contenue dans les variations des 8 taux d'intérêt. Par conséquent, l'évaluation du risque d'une position sensible à l'évolution des taux ne nécessite pas forcément la prise en compte de toutes les maturités mais simplement celle des trois facteurs les plus significatifs. Le graphique 22.7 représente les données du tableau 22.7 pour les trois premiers axes factoriels [16].

L'utilisation de l'ACP pour le calcul de la VaR

Supposons que nous souhaitions calculer la VaR pour le portefeuille dont l'exposition au risque de taux est décrite dans le tableau 22.9.

16. Des résultats analogues à ceux décrits ici peuvent être obtenus sur n'importe quelle courbe de taux dans n'importe quel pays, du moins en ce qui concerne les trois premiers axes, essentiels pour l'explication des mouvements de taux.



Graphique 22.7 : Les trois facteurs les plus importants régissant la courbe des taux

Tableau 22.9 : Variation de valeur du portefeuille (en millions d'euros) pour une hausse d'un point de base du taux

Taux 3 ans	Taux 4 ans	Taux 5 ans	Taux 7 ans	Taux 10 ans
+10	$+4$	-8	-7	$+2$

Un changement d'un point de base dans le taux d'intérêt à un an entraîne une hausse de 10 millions d'euros de la valeur du portefeuille ; la même hausse du taux à deux ans entraîne une augmentation de 4 millions, et ainsi de suite. Les deux premiers facteurs de l'ACP sont utilisés ici pour modéliser les variations de taux (plus de 90 % des variations de taux sont expliquées par ces deux facteurs). En utilisant les données du tableau 22.7, l'exposition au premier facteur s'écrit :

$$10 \times 0{,}372 + 4 \times 0{,}392 - 8 \times 0{,}404 - 7 \times 0{,}394 + 2 \times 0{,}376 = -0{,}05$$

alors que l'exposition au second facteur vaut :

$$10 \times (-0{,}267) + 4 \times (-0{,}110) - 8 \times 0{,}019 - 7 \times 0{,}194 + 2 \times 0{,}37 = -3{,}88$$

Si f_1 et f_2 désignent les valeurs des deux premières composantes principales pour un jour donné, la variation de valeur du portefeuille s'écrit, pour le jour en question :

$$\Delta P = -0{,}05 f_1 - 3{,}88 f_2$$

Comme les composantes principales ne sont pas corrélées, l'écart-type de ΔP s'écrit :

$$\sqrt{0{,}05^2 \times 17{,}55^2 + 3{,}88^2 \times 4{,}77^2} = 18{,}48$$

La VaR du portefeuille à un jour au seuil de 99 % est donc égale à 18,48 × 2,326 = 43,08.

Il est important de remarquer que les données du tableau 22.9 correspondent à une forte exposition au facteur de pente (le second facteur). Il apparaît que si seul le premier facteur était utilisé, caractérisant le niveau des taux, la VaR calculée serait largement sous-évaluée (voir problème 22.11). La méthode de duration, mentionnée à la section 22.4, sous-évaluerait de même la VaR, du fait de l'hypothèse implicite d'un déplacement parallèle de la courbe des taux dans cette approche, correspondant à peu de chose près à l'exposition au premier facteur de l'ACP.

L'ACP peut, en théorie, être utilisée pour d'autres variables de marché que les taux d'intérêt. Considérons par exemple une banque dont le portefeuille est exposé au risque d'évolution de plusieurs indices. Une analyse en composantes principales peut alors servir à déterminer un nombre réduit de facteurs gouvernant l'évolution de l'ensemble des indices considérés. L'efficacité de cette méthode dépend en fait des corrélations entre les variations des divers indices.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la VaR est habituellement calculée en reliant les changements de valeur d'un portefeuille aux variations de variables de marché (les Δx_i) exprimées en pourcentage. De ce fait, l'ACP est le plus souvent réalisée sur ces variations en pourcentage (rentabilités d'indices par exemple) plutôt que sur les variations absolues.

Résumé

L'objectif d'un calcul de VaR est de pouvoir assurer qu'au seuil de X %, la perte sur un portefeuille ne dépassera pas un montant V dans les N prochains jours. La variable V est la VaR, X est le seuil de confiance et N est l'horizon temporel. L'ES est la perte moyenne conditionnellement à une perte supérieure à la VaR.

La première approche pour calculer la VaR ou l'ES est la simulation historique. Elle suppose la constitution d'une base de données regroupant les variations passées des variables de marché sur une période suffisamment longue. La simulation consiste alors à considérer que le premier tirage correspond à la première variation des variables présentes dans la base ; le deuxième tirage correspond à la deuxième variation, et ainsi de suite. Pour chaque tirage, la variation de valeur du portefeuille est calculée. La VaR est évaluée comme le centile approprié de la distribution obtenue pour ΔP. L'ES est la moyenne des observations qui dépassent le niveau de la VaR.

Une approche alternative est la méthode de variance-covariance, ou méthode de construction de modèle. Elle est très simple si deux hypothèses sont posées :

1. Les variations de valeur du portefeuille (en pourcentage) varient linéairement avec les variations (en pourcentage) des variables de marché ;
2. Les variations en pourcentage des variables de marché sont gaussiennes.

Sous ces hypothèses, la variation de valeur du portefeuille peut aussi être supposée gaussienne. Des formules analytiques relient alors l'écart-type de ΔP à la matrice de variance-covariance des variables de marché. La VaR et l'ES se déduisent donc presque immédiatement de la lecture d'une table statistique de loi normale.

Quand un portefeuille contient des options, ΔP n'est pas une fonction linéaire des variables de marché. En connaissant le gamma du portefeuille, on peut toutefois obtenir une approximation quadratique, et la VaR peut alors être estimée soit par une simulation de Monte-Carlo, soit par le développement de Cornish-Fisher.

Au chapitre suivant, nous verrons comment volatilités et corrélations peuvent être estimées dans le cadre de l'approche variance-covariance.

Références complémentaires

Artzner P., F. Delbaen, J. M. Eber et D. Heath, "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, 9, 1999, 203-228.

Basak S. et A. Shapiro, "Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices", *Review of Financial Studies*, 14 (2), 2001, 371-405.

Boudoukh J., M. Richardson et R. Whitelaw, "The Best of Both Worlds", *RISK*, mai 1998, 64-67.

Dowd K., *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, Wiley, New York, 1998.

Duffie D. et J. Pan, "An Overview of Value at Risk", *Journal of Derivatives*, 4 (3), printemps 1997, 7-49.

Embrechts P., C. Kluppelberg et T. Mikosch, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New York, 1997.

Hull J. C. et A. White, "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk", *Journal of Risk*, 1 (1), 1998, 5-19.

Hull J. C. et A. White, "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed", *Journal of Derivatives*, 5, printemps 1998, 9-19.

Jackson P., D. J. Maude et W. Perraudin, "Bank Capital and Value at Risk", *Journal of Derivatives*, 4 (3), printemps 1997, 73-90.

Jamshidian F. et Y. Zhu, "Scenario Simulation Model, Theory and Methodology", *Finance and Stochastics*, 1, 1997, 43-67.

Jorion P., *Value at Risk*, 2nd ed., McGraw Hill, New York, 2001.

Longin F., "Beyond the VaR", *Journal of Derivatives*, 8 (4), été 2001, 36-48.

Marshall C. et M. Siegel, "Value at Risk: Implementing a risk measurement Standard", *Journal of Derivatives*, 4 (3), printemps 1997, 91-111.

Neftci S. N., "Value at Risk Calculations, Extreme Events and Tails Estimation", *Journal of Derivatives*, 7 (3), printemps 2000, 23-28.

Rich D., "Second Generation VaR and Risk-Adjusted Return on Capital", *Journal of Derivatives*, 10 (4), été 2003, 51-61.

Problèmes et exercices

22.1 Considérons un portefeuille constitué de 100 000 € investis dans l'actif A et 100 000 € dans l'actif B. Les volatilités journalières de A et B sont égales à 1 %, et le coefficient de corrélation entre les deux est de 0,3. Quelle est la VaR à 5 jours au seuil de 99 % de ce portefeuille ?

22.2 Décrivez trois méthodes pour modéliser le comportement des instruments dépendant des taux d'intérêt quand l'approche de construction de modèle est retenue pour le calcul de la VaR. Comment feriez-vous pour traiter ces mêmes instruments dans la méthode de simulation historique ?

22.3 Une banque américaine possède un portefeuille d'options sur la livre sterling (GBP). Le delta du portefeuille est de 56, alors que le taux de change est de 1,5000 $/£. Donnez une approximation linéaire de la relation entre les variations de valeur du portefeuille et les variations (en pourcentage) du taux de change. Si la volatilité journalière du taux de change est de 0,7 %, quelle est la VaR à 10 jours du portefeuille au seuil de 99 % ?

22.4 On suppose que le gamma du portefeuille de l'exercice précédent est 16,2. En quoi cette information modifie-t-elle votre estimation de la relation entre variation de valeur du portefeuille et variation en pourcentage du taux de change ?

22.5 Supposons que la variation journalière de valeur d'un portefeuille dépende linéairement de deux facteurs, déduits d'une ACP. Les deltas du portefeuille par rapport à chacun de ces facteurs sont respectivement 6 et -4. Les écarts-types des facteurs sont 20 et 8. Quelle est la VaR à 5 jours du portefeuille au seuil de 90 % ?

22.6 Le portefeuille d'une entreprise comporte des actions, des obligations, des devises et des matières premières, mais pas d'actifs dérivés. Quelles sont les hypothèses sous-jacentes (a) au modèle linéaire, (b) au modèle fondé sur la simulation historique pour le calcul de la VaR ?

22.7 Pour le calcul de la VaR, expliquez comment un swap de taux peut être assimilé à un portefeuille d'obligations zéro-coupon aux maturités bien choisies.

22.8 Expliquez la différence entre VaR et ES.

22.9 Expliquez pourquoi le modèle linéaire ne peut donner que des résultats approximatifs dans le calcul de la VaR lorsque le portefeuille considéré contient des options.

22.10 Il y a quelques mois, une entreprise a conclu un contrat forward à 6 mois l'engageant à acheter 1 million de livres sterling contre paiement de 1,5 million de dollars US. Les volatilités journalières des ZC à 6 mois en sterling (mais exprimés en dollars) et des ZC à 6 mois en dollars sont respectivement 0,06 % et 0,05 %. La corrélation des rentabilités de ces deux titres est de 0,8 et le taux de change aujourd'hui est à 1,53 $/£. Quel est l'écart-type de la variation journalière (en dollars) du contrat forward ? Quelle est la VaR à 10 jours au seuil de 99 % du contrat ? Les taux à 6 mois, en composition annuelle, sont supposés égaux à 5 % dans les deux pays.

22.11 Dans l'exemple du calcul de VaR effectué avec les données du tableau 22.9, quels seraient les changements si on considérait (a) un seul facteur et (b) trois facteurs ?

22.12 Une banque détient un portefeuille d'options sur un actif sous-jacent. Le delta des options est -30 et le gamma est -5. Quelle est l'interprétation de ces deux nombres ? Le sous-jacent est coté 20 et sa volatilité journalière est 1 %. En adaptant l'application E du développeur de DerivaGem, calculez la VaR à 1 jour au seuil de 99 %.

22.13 Dans le problème 22.12, supposez que le vega du portefeuille soit égal à -2 pour chaque hausse de 1 % de la volatilité journalière. Construisez un modèle reliant la variation journalière de valeur du portefeuille à delta, gamma et vega. Expliquez, sans entrer dans le détail des calculs, comment vous utiliseriez ce modèle dans un calcul de VaR.

22.14 La VaR à un jour au seuil de 99 % calculée sur les données de la section 22.2 était de 253 385 $. En utilisant les données du site www.pearson.fr, calculez (a) la VaR à un jour au seuil de 95 % et (b) la VaR à un jour au seuil de 9 %.

22.15 En utilisant les données du site www.pearson.fr, calculez la VaR à un jour au seuil de 99 % en supposant que le portefeuille de la section 22.2 soit également réparti entre les quatre indices.

Questions complémentaires

22.16 Une entreprise a un portefeuille d'obligations valant 6 millions d'euros, dont la duration modifiée est de 5,2 ans. Seuls des déplacements parallèles de la courbe des taux sont envisagés. La volatilité journalière du taux actuariel est 0,09 %. Utilisez la duration pour estimer la VaR à 20 jours au seuil de 90 % du portefeuille. Expliquez précisément les faiblesses de cette approche dans le cadre du calcul de VaR. Indiquez deux approches alternatives qui amélioreraient les résultats.

22.17 Un portefeuille comporte 300 000 € investis en or et 500 000 € investis en argent ; les volatilités journalières de ces deux actifs sont 1,8 % et 1,2 %, et la corrélation entre les deux 0,6. Quelle est la VaR du portefeuille à 10 jours au seuil de 97,5 % ? De combien la diversification réduit-elle la VaR ?

22.18 Considérons un portefeuille d'options sur un actif sous-jacent ; le delta du portefeuille est 12, le sous-jacent vaut 10 € ; sa volatilité journalière est 2 %. Quelle est la VaR à 1 jour du portefeuille au seuil de 95 % ? Le gamma du portefeuille est égal à $-2{,}6$. Donnez une relation quadratique entre les variations journalières du portefeuille et du sous-jacent. Comment utiliseriez-vous cette relation dans une simulation de Monte-Carlo ?

22.19 Une entreprise possède un portefeuille consistant en une position longue sur une obligation à 2 ans, une position longue sur une obligation à 3 ans et une position courte sur une obligation à 5 ans. Chaque obligation a un nominal de 100 € et un taux de coupon de 5 %. Évaluez l'exposition au risque par rapport à chacun des taux ZC des maturités 1 à 5 ans. Utilisez les données des tableaux 22.7 et 22.8 pour calculer la VaR à 20 jours au seuil de 95 %, sous l'hypothèse que les variations de taux sont expliquées par (a) un facteur, (b) deux facteurs et (c) trois facteurs. La courbe des taux ZC est supposée plate à 5 %.

22.20 Une banque a vendu un call sur une action A et un put sur une autre action B. L'action A cote 50 €, le prix d'exercice du call est 51 €, la volatilité annuelle 28 % et la maturité de l'option 9 mois. Les données correspondantes pour le put sont un prix du sous-jacent B de 20 €, un prix d'exercice à 19 €, une volatilité annuelle de 25 % et une maturité d'un an. Ces actions ne paient pas de dividendes pendant la durée de vie des options, et le taux sans risque est

de 6 % par an. La corrélation des rentabilités est 0,4. Calculez la VaR à 10 jours au seuil de 99 % dans les conditions suivantes :

a. en utilisant seulement le delta ;

b. en utilisant delta, gamma, et les deux premiers moments de la distribution des variations de valeur du portefeuille ;

c. mêmes éléments qu'au point (b) plus le troisième moment.

22.21 Utilisez l'équation (22.1) pour montrer que lorsque la distribution de la perte est gaussienne, la VaR au seuil de 99 % est approximativement égale à l'ES au seuil de 97,5 %.

22.22 En utilisant les données du site www.pearson.fr, calculez la VaR à un jour et l'ES correspondant au seuil de 99 %, en supposant que le portefeuille de la section 22.2 est réparti entre les quatre indices de la manière suivante : 1 million de dollars US dans le CAC40 et 3 millions dans chacun des trois autres indices.

Chapitre 23

L'estimation des volatilités et des corrélations

Ce chapitre est consacré aux méthodes d'estimation des niveaux actuels et anticipés des volatilités et corrélations. Il est donc utile, à la fois pour les calculs de Valeur-à-Risque (VaR) dans le cadre de l'approche variance-covariance et pour l'évaluation des produits dérivés. Pour le calcul de la VaR, ce sont plutôt les niveaux actuels des volatilités et corrélations qui importent puisque, dans ce contexte, il s'agit de déterminer les variations possibles de la valeur d'un portefeuille sur une très courte période. L'évaluation des produits dérivés, quant à elle, nécessite plutôt le recours à des volatilités et corrélations anticipées pour la durée de vie des contrats à évaluer.

Ce chapitre est consacré à la présentation de modèles portant les noms impressionnants de moyenne mobile à pondération exponentielle (*Exponentially Weighted Moving Average*, EWMA), hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, ARCH) et hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, GARCH). Ces modèles n'imposent pas la constance de la volatilité ou des corrélations, et c'est là leur caractéristique distinctive. Les volatilités et corrélations d'un actif particulier peuvent en effet être tantôt faibles sur certaines périodes et tantôt élevées sur d'autres. Ces modèles constituent autant de tentatives de mesure de ces variations temporelles de la volatilité et des corrélations.

23.1 L'estimation de la volatilité

Notons σ_n la volatilité d'une variable de marché pour la journée n, estimée à la fin de la journée $n-1$. Le carré de la volatilité pour la journée n, σ_n^2, est le *taux de variance*. Nous avons présenté l'approche standard d'estimation de σ_n à partir de données historiques à la section 15.4. Notons S_i la valeur de la variable de marché à la fin de la journée i. La variable u_i est définie comme la rentabilité composée en continu du jour i (entre la

fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i) :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Une estimation sans biais du taux de variance quotidien, σ_n^2, à partir des m observations les plus récentes, est donnée par :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2 \tag{23.1}$$

où $\bar{u}$ est la moyenne des u_i :

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}$$

Dans l'optique du calcul de la VaR, la formule de l'équation (23.1) est généralement modifiée de la sorte :

1. u_i est défini[1] comme le pourcentage de variation de la variable de marché entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i :

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \tag{23.2}$$

2. $\bar{u}$ est supposé nul[2] ;
3. $m-1$ est remplacé par m[3].

Ces trois modifications, tout en n'engendrant que de faibles écarts dans les estimations de variance, permettent de simplifier la formule du taux de variance ainsi :

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2 \tag{23.3}$$

les u_i étant donnés par l'équation (23.2)[4].

---

1. Cette modification est cohérente avec la définition de la volatilité présentée pour les calculs de la VaR à la section 22.3.

2. Comme nous l'avons expliqué à la section 22.3, il s'agit d'une hypothèse raisonnable dans la mesure où la variation quotidienne espérée de la valeur d'une variable est très petite en comparaison de l'écart-type des variations.

3. Le passage de $m-1$ à m fait passer d'une estimation sans biais à une estimation du maximum de vraisemblance. Ces estimations sont présentées plus loin dans ce chapitre.

4. Les u de ce chapitre jouent le même rôle que les Δx du chapitre 22. Tous deux représentent le pourcentage de variation des variables de marché. Dans le cas des u, l'indice se rapporte aux différentes journées pour lesquelles la variation est mesurée pour la même variable de marché. Dans le cas des Δx, l'indice se rapporte aux différentes variables de marché pour lesquelles la variation relative est mesurée sur une même journée. Les exposants utilisés pour les σ suivent la même logique de différenciation entre les deux chapitres. Dans ce chapitre, les exposants font référence aux journées, alors qu'au chapitre 22, ils faisaient référence aux différentes variables de marché.

Schémas de pondération

L'équation (23.3) accorde un poids égal à tous les u_i^2. Dans la mesure où notre objectif est d'estimer le niveau actuel de volatilité, σ_n, il paraît pertinent de pondérer plus fortement les données les plus récentes. Le modèle suivant permet ce type de pondération :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{23.4}$$

où α_i est le poids attribué à la variation observée i jours auparavant. Les α sont positifs et, s'ils sont choisis tels que $\alpha_i < \alpha_j$ pour $i > j$, alors un poids plus faible est affecté aux observations plus anciennes. Enfin, la somme des pondérations doit être égale à l'unité :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Une extension du principe sous-tendant l'équation (23.4) consiste à supposer qu'il existe un taux de variance moyen de long terme auquel il convient d'attribuer un certain poids. Cela conduit à un modèle de la forme :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{23.5}$$

où V_L est le taux de variance de long terme et γ le poids attribué à V_L. Comme la somme de l'ensemble des pondérations doit être égale à l'unité :

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Cette formulation est connue sous le nom de modèle ARCH(m), proposé initialement par Engle [5]. L'estimation de la variance repose sur la variance moyenne de long terme et m observations dont le poids respectif diminue avec l'ancienneté. En notant $\omega = \gamma V_L$, le modèle de l'équation (23.5) peut être réécrit :

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{23.6}$$

Dans les deux sections suivantes, nous présentons successivement deux approches de suivi de la volatilité qui reposent sur les principes sous-tendant les équations (23.4) et (23.5).

5. Voir R. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation", *Econometrica*, 50, 1982, 987-1008. R. Engle s'est vu attribuer le prix Nobel d'économie 2003 « pour des méthodes d'analyse de séries temporelles économiques avec volatilité saisonnière (les modèles ARCH) ».

23.2 Le modèle de moyenne mobile à pondération exponentielle

Le modèle de moyenne mobile à pondération exponentielle (EWMA) est un cas particulier de l'équation (23.4) dans lequel les pondérations, α_i, diminuent exponentiellement à mesure qu'on remonte dans le temps. Plus précisément, $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, où λ est une constante comprise entre 0 et 1.

Ce schéma de pondération conduit en fait à une formule particulièrement simple de mise à jour des estimations de volatilité, à savoir :

$$\sigma_n^2 = \lambda\,\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)\;u_{n-1}^2 \tag{23.7}$$

L'estimation σ_n de la volatilité d'une variable donnée pour le jour n (effectuée à la fin de la journée $n-1$) est obtenue à partir de σ_{n-1} (l'estimation de la volatilité du jour $n-1$ qui a été calculée à la fin de la journée $n-2$) et de u_{n-1} (la variation relative quotidienne la plus récente de la variable de marché).

Pour comprendre en quoi l'équation (23.7) correspond à des poids qui diminuent exponentiellement, il suffit de remplacer σ_{n-1}^2 par sa valeur pour obtenir :

$$\sigma_n^2 = \lambda\left[\lambda\,\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)\;u_{n-2}^2\right] + (1-\lambda)\;u_{n-1}^2$$

ou encore :

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\left(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2\right) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$$

En substituant de la même façon σ_{n-2}^2, on obtient :

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\left(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2\right) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

En continuant de la sorte, on aboutit à :

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2$$

Pour m suffisamment grand, le terme $\lambda^m\sigma_{n-m}^2$ est suffisamment petit pour être ignoré, de sorte que l'équation (23.7) est équivalente à l'équation (23.4) avec $\alpha_i = (1-\lambda)\,\lambda^{i-1}$. Les pondérations des u_i diminuent au taux λ à mesure que l'on remonte dans le temps. Chaque poids vaut λ fois le poids précédent.

■ **Exemple 23.1** Supposons que λ soit égal à 0,90, que la volatilité estimée pour la variable de marché pour la journée $n-1$ soit de 1 % par jour et que, pendant la journée $n-1$, la variable de marché augmente de 2 %. Nous avons donc $\sigma_{n-1}^2 = 0{,}01^2 = 0{,}0001$ et $u_{n-1}^2 = 0{,}02^2 = 0{,}0004$. L'équation (23.7) donne :

$$\sigma_n^2 = 0{,}9 \times 0{,}0001 + 0{,}1 \times 0{,}0004 = 0{,}00013$$

L'estimation de la volatilité pour la journée n, σ_n, est donc $\sqrt{0{,}00013}$, soit 1,14 % par jour, et la valeur espérée de u_{n-1}^2 est σ_{n-1}^2 ou 0,0001. Dans cet exemple, la valeur observée de u_{n-1}^2 est supérieure à cette espérance, aussi la volatilité estimée augmente-t-elle. Si la valeur observée de u_{n-1}^2 avait été inférieure à son espérance, la volatilité estimée aurait diminué.

Le modèle EWMA ne nécessite le stockage que d'une quantité réduite de données. À tout moment, il faut simplement garder en mémoire l'estimation actuelle du taux de variance et la dernière valeur de la variable de marché. À la suite d'une nouvelle observation de la valeur de la variable de marché, la nouvelle variation relative peut être calculée et l'équation (23.7) permet de mettre à jour l'estimation du taux de variance. La précédente estimation du taux de variance et l'ancienne valeur de la variable de marché peuvent alors être abandonnées.

Le modèle EWMA est construit de façon à permettre le suivi des évolutions de volatilité. Supposons qu'il se produise une forte modification de la variable de marché sur la journée $n-1$, conduisant à un u_{n-1}^2 important. Cela entraîne alors une hausse de l'estimation de la volatilité actuelle observable dans l'équation (23.7). La valeur de λ détermine la sensibilité de la volatilité quotidienne à la dernière variation en pourcentage. Un λ faible octroie une forte pondération à u_{n-1}^2 dans le calcul de σ_n. Dans ce cas, les estimations successives de la volatilité quotidienne sont elles-mêmes hautement volatiles. Un λ élevé (c'est-à-dire d'une valeur proche de 1) conduit à des estimations de la volatilité quotidienne intégrant lentement les nouvelles informations apportées par la variation quotidienne en pourcentage.

La base de données RiskMetrics, créée par J. P. Morgan, et accessible depuis 1994, utilisait le modèle EWMA avec $\lambda = 0{,}94$ pour la mise à jour des estimations de la volatilité quotidienne. La société a en effet trouvé que cette valeur spécifique de λ, pour un ensemble de variables de marché distinctes, produit les estimations du taux de variance anticipé les plus proches du taux de variance effectivement réalisé [6]. Pour ces comparaisons, le taux de variance réalisé pour un jour donné était calculé comme la moyenne simple des u_i^2 observés sur les 25 jours suivants. (Le problème 23.19 reprend ce point.)

23.3 Le modèle GARCH(1,1)

Passons maintenant au modèle connu sous le nom de GARCH(1,1), développé par Bollerslev [7] en 1986. La différence entre les modèles GARCH(1,1) et EWMA est analogue à la différence existant entre les équations (23.4) et (23.5). Dans un GARCH(1,1), σ_n^2 est calculé non seulement à partir de σ_{n-1} et de u_{n-1}, mais aussi du taux de variance moyen de long terme, V_L. Un GARCH(1,1) s'écrit :

$$\sigma_n^2 = \gamma\, V_L + \alpha\, u_{n-1}^2 + \beta\, \sigma_{n-1}^2 \tag{23.8}$$

où γ est le poids attribué à V_L, α celui attribué à u_{n-1}^2, et β celui attribué à σ_{n-1}^2. Comme la somme des pondérations doit être égale à l'unité, on a :

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

6. Voir à ce propos J. P. Morgan, *RiskMetrics Monitor*, quatrième trimestre 1995. Une approche alternative d'estimation des paramètres (le maximum de vraisemblance) est exposée plus loin dans ce chapitre.

7. Voir T. Bollerslev, "General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 1986, 307-327.

Le modèle EWMA est en fait un cas particulier du modèle GARCH(1,1) dans lequel $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = \lambda$.

Les deux « 1 » de GARCH(1,1) signifient que le calcul de σ_n^2 est effectué sur la base de la dernière observation de u^2 et de l'estimation la plus récente du taux de variance. Le modèle GARCH(p,q), plus général, calcule σ_n^2 en utilisant les p dernières observations de u^2 et les q estimations les plus récentes du taux de variance [8]. Toutefois, le GARCH(1,1) est de loin le plus populaire des modèles GARCH.

En posant $\omega = \gamma V_L$, on peut réécrire le modèle GARCH(1,1) sous la forme :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha\, u_{n-1}^2 + \beta\, \sigma_{n-1}^2 \tag{23.9}$$

C'est cette forme du modèle qui est généralement utilisée pour l'estimation des paramètres. Une fois ω, α et β estimés, on peut en déduire γ qui vaut $1 - \alpha - \beta$. La variance de long terme V_L est alors donnée par ω/γ. Afin d'assurer la stabilité du processus GARCH(1,1), il faut imposer $\alpha + \beta < 1$. Dans le cas contraire, la variance de long terme est affectée d'une pondération négative.

■ **Exemple 23.2** Supposons qu'un modèle GARCH(1,1) ait été estimé à partir de données quotidiennes comme :

$$\sigma_n^2 = 0{,}000002 + 0{,}13\, u_{n-1}^2 + 0{,}86\, \sigma_{n-1}^2$$

Cela correspond à $\alpha = 0{,}13$, $\beta = 0{,}86$ et $\omega = 0{,}000002$. Comme $\gamma = 1 - \alpha - \beta$, nous avons $\gamma = 0{,}01$. De plus, $\omega = \gamma V_L$ implique que $V_L = 0{,}0002$. En d'autres termes, la variance moyenne de long terme impliquée par le modèle est de 0,0002 par jour, ce qui correspond à une volatilité quotidienne de $\sqrt{0{,}0002} = 0{,}014$, soit 1,4 %.
Si la volatilité quotidienne pour la journée $n - 1$ est de 1,6 % :

$$\sigma_{n-1}^2 = 0{,}016^2 = 0{,}000256$$

et si la variable de marché a diminué de 1 % ce jour-là, $u_{n-1}^2 = 0{,}01^2 = 0{,}0001$. Ainsi :

$$\sigma_n^2 = 0{,}000002 + 0{,}13 \times 0{,}0001 + 0{,}86 \times 0{,}000256 = 0{,}00023516$$

La nouvelle estimation de la volatilité quotidienne pour la journée n est alors :

$$\sqrt{0{,}00023516} = 0{,}0153$$

soit 1,53 %.

8. D'autres modèles GARCH, incorporant l'information de manière asymétrique, ont été proposés. Dans ces modèles, σ_n dépend du signe de u_{n-1}. Ces modèles sont sans doute plus appropriés pour les marchés d'actions que le GARCH(1,1). Comme nous l'avons mentionné au chapitre 20, la volatilité du prix d'une action a tendance à être inversement liée à son prix, de sorte qu'un u_{n-1} négatif devrait avoir un effet plus important sur σ_n qu'un u_{n-1} de même valeur, mais positif. Pour une présentation des modèles qui intègrent le caractère asymétrique de l'information, on pourra se référer à D. Nelson, "Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59, 1990, 347-370, ainsi qu'à R. F. Engle et V. Ng, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *Journal of Finance*, 48, 1993, 1749-1778.

Les pondérations

En substituant à σ_{n-1}^2 sa valeur dans l'équation (23.9), on obtient :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \left(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2\right)$$

ou encore :

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2 \sigma_{n-2}^2$$

En procédant de même pour σ_{n-2}^2, on obtient :

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta\omega + \beta^2\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \alpha\beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3 \sigma_{n-3}^2$$

En poursuivant de la sorte, on peut montrer que le poids affecté à u_{n-i}^2 est $\alpha\beta^{i-1}$. Les pondérations diminuent exponentiellement au taux β. Ce paramètre peut être interprété comme un « taux de déclin » tout comme le paramètre λ dans le modèle EWMA. Il représente l'importance relative des différentes observations de u dans la détermination du taux de variance actuel. Ainsi, avec $\beta = 0{,}9$, le poids de u_{n-2}^2 n'est plus que 90 % de celui de u_{n-1}^2, celui de u_{n-3}^2 n'est plus que 81 % de celui de u_{n-1}^2, et ainsi de suite. Le modèle GARCH(1,1) a donc la même propriété de diminution exponentielle des pondérations attribuées aux u^2 que le modèle EWMA, mais à la différence de celui-ci, il accorde un poids positif à la volatilité moyenne de long terme.

Le retour à la moyenne

Le modèle GARCH(1,1) tient compte de la tendance qu'a la variance à revenir vers son niveau moyen de long terme, V_L, auquel est affecté la pondération $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. Le modèle GARCH(1,1) est équivalent à un modèle dans lequel la variance V suit le processus stochastique suivant :

$$dV = a\,(V_L - V)\,dt + \xi\,V\,dz$$

dans lequel le temps est mesuré en journées, $a = 1-\alpha-\beta$, et $\xi = \alpha\sqrt{2}$ (voir à ce sujet le problème 23.14). Il s'agit d'un modèle avec retour à la moyenne, la variance ayant une tendance qui la ramène vers V_L au taux a. La tendance est négative quand $V > V_L$ et positive quand $V < V_L$. Une volatilité ξ est ajoutée à cette tendance. Nous présenterons ce type de modèles plus en détail au chapitre 27.

23.4 Le choix du modèle

En pratique, les taux de variance présentent effectivement une tendance au retour à la moyenne qui est intégrée dans le modèle GARCH(1,1), mais pas dans le modèle EWMA. L'alternative GARCH(1,1) semble donc théoriquement plus adaptée que le modèle EWMA.

Dans la section suivante, nous verrons comment il est possible d'estimer au mieux les paramètres ω, α et β d'un GARCH(1,1), sachant qu'il se réduit à un EWMA pour une valeur nulle du paramètre ω. Dans les cas où la valeur optimale de ω est négative, le modèle GARCH(1,1) n'est pas stable et il convient de basculer sur un modèle EWMA.

23.5 Les méthodes du maximum de vraisemblance

Nous allons maintenant montrer comment les paramètres des modèles considérés dans les sections précédentes peuvent être estimés à partir de données historiques. Nous utilisons ici la *méthode du maximum de vraisemblance*, qui consiste à rechercher la valeur des paramètres maximisant la probabilité d'occurrence des données historiques (leur vraisemblance).

Commençons par une très simple illustration de ce principe. Après la sélection au hasard de dix titres sur une journée particulière, nous observons que seul le prix d'un de ces titres a augmenté pendant la journée, alors que celui des neuf autres a diminué ou est resté stable. Quelle est la meilleure estimation de la probabilité de baisse du prix d'un des dix titres tiré au hasard sur une journée ? La réponse naturelle est 10 %. Voyons maintenant ce qu'on obtient avec la méthode du maximum de vraisemblance.

Notons p la proportion des titres dont le prix baisse. La probabilité qu'un titre particulier voie son prix baisser alors que les autres prix restent stables ou augmentent est égale à $p\,(1-p)^9$. Avec la méthode du maximum de vraisemblance, la meilleure estimation de p est celle qui maximise $p\,(1-p)^9$. En dérivant cette expression par rapport à p et en annulant le résultat, nous trouvons que $p = 0{,}1$ maximise cette expression. Ainsi, l'estimation du maximum de vraisemblance de p est bien 10 %.

L'estimation d'une variance constante

Considérons maintenant le problème de l'estimation, à partir de m observations, de la variance d'une variable X de distribution normale de moyenne nulle par la méthode du maximum de vraisemblance. Notons u_1, u_2, …, u_m les observations dont nous disposons et v la variance. La probabilité d'observer u_i est déterminée par la fonction de densité de X en $X = u_i$, c'est-à-dire, si on note v la variance :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2v}\right)$$

La vraisemblance d'occurrence des m observations dans leur ordre d'apparition est :

$$\prod_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2v}\right)\right] \tag{23.10}$$

Selon la méthode du maximum de vraisemblance, la meilleure estimation de v est la valeur qui maximise cette expression.

La maximisation du logarithme d'une expression est équivalente à la maximisation de l'expression elle-même. On peut donc prendre le logarithme de l'expression (23.10) et ignorer les facteurs multiplicatifs constants. L'expression à maximiser devient alors :

$$\sum_{i=1}^{m} \left[-\ln(v) - \frac{u_i^2}{v}\right] \tag{23.11}$$

ou encore :

$$-m \ln(v) - \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i^2}{v}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de v est alors obtenu en annulant la dérivée par rapport à v de cette expression. Il est égal[9] à :

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_i^2$$

L'estimation des paramètres des modèles EWMA et GARCH(1,1)

Comment utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres d'un modèle EWMA, d'un modèle GARCH(1,1), ou de tout autre procédé de mise à jour de la volatilité ? Notons $v_i = \sigma_i^2$ la variance estimée pour le jour i. La distribution de probabilité de u_i conditionnelle à la variance est supposée normale. En procédant toujours de la même façon, il apparaît que les meilleurs paramètres sont ceux qui maximisent :

$$\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(\frac{-u_i^2}{2v_i}\right)\right]$$

Après un passage aux logarithmes, cela revient à la maximisation de :

$$\sum_{i=1}^{m}\left[-\ln(v_i) - \frac{u_i^2}{v_i}\right] \tag{23.12}$$

À l'exception du remplacement de v par v_i, il s'agit de la même expression que dans l'équation (23.11). La recherche des paramètres du modèle qui maximisent l'expression (23.12) peut être effectuée par itérations successives.

Les calculs permettant la détermination des paramètres du modèle GARCH(1,1) sont détaillés dans le tableau 23.1 dans le cas de l'indice S&P500 pour la période du 18 juillet 2005 au 13 août 2010[10]. La date est donnée dans la première colonne, la deuxième colonne compte les jours, et la valeur du S&P500 à la clôture de la journée i, S_i, est renseigné dans la troisième colonne. La quatrième colonne renvoie la variation relative du S&P500 entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i donnée par $u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$.

Les valeurs candidates pour ω, α et β sont initialement renseignées dans trois cellules de la feuille de calcul. Elles vont être modifiées à l'aide d'une procédure itérative jusqu'à l'obtention d'un optimum. La cinquième colonne rapporte l'estimation du taux de variance pour le jour i, $v_i = \sigma_i^2$, calculée à la fin de la journée $i-1$. À partir du jour 3, la procédure est lancée en fixant le taux de variance à u_2^2, l'équation (23.9) permettant alors de l'ajuster pour les jours suivants. La sixième colonne calcule la mesure de vraisemblance, $-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$. La procédure de recherche itérative[11] sélectionne les

9. Cela confirme bien ce qui avait été avancé dans la note 3.

10. Les données et les calculs sont disponibles sur le site www.pearson.fr.

11. Comme nous le verrons par la suite, un algorithme général d'optimisation comme le solveur de Microsoft Excel peut être utilisé. Le recours à un algorithme plus spécifique, comme celui de Levenberg-Marquardt, constitue une alternative intéressante. On pourra se référer à ce sujet à W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

valeurs de ω, α et β qui maximisent la somme des valeurs rapportées dans la sixième colonne.

Dans notre exemple, les valeurs optimales des paramètres sont :

$$\omega = 0{,}000001366, \quad \alpha = 0{,}083394, \quad \beta = 0{,}910116$$

et la valeur maximale de la fonction de vraisemblance de l'équation (23.12) est 10 228,2349. Les valeurs du tableau 23.1 correspondent à la dernière itération de la recherche des ω, α et β optimaux.

Tableau 23.1 : Estimation des paramètres du modèle GARCH(1,1) pour l'indice S&P500 entre le 18 juillet 2005 et le 13 août 2010

Date	**Jour i**	S_i	u_i	$v_i = \sigma_i^2$	$-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$
18 juil. 2005	1	1 221,13			
19 juil. 2005	2	1 229,35	0,006731		
20 juil. 2005	3	1 235,20	0,004759	0,00004531	9,5022
21 juil. 2005	4	1 227,04	−0,006606	0,00004447	9,0393
22 juil. 2005	5	1 233,68	0,005411	0,00004546	9,3545
25 juil. 2005	6	1 229,03	−0,003769	0,00004517	9,6906
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11 août 2010	1 277	1 089,47	−0,028179	0,00011834	2,3322
12 août 2010	1 278	1 083,61	−0,005379	0,00017527	8,4841
13 août 2010	1 279	1 079,25	−0,004024	0,00016327	8,6209
					10 228,2349

Valeurs candidates des paramètres du modèle GARCH		
ω	α	β
0,000001347	0,08339	0,9101

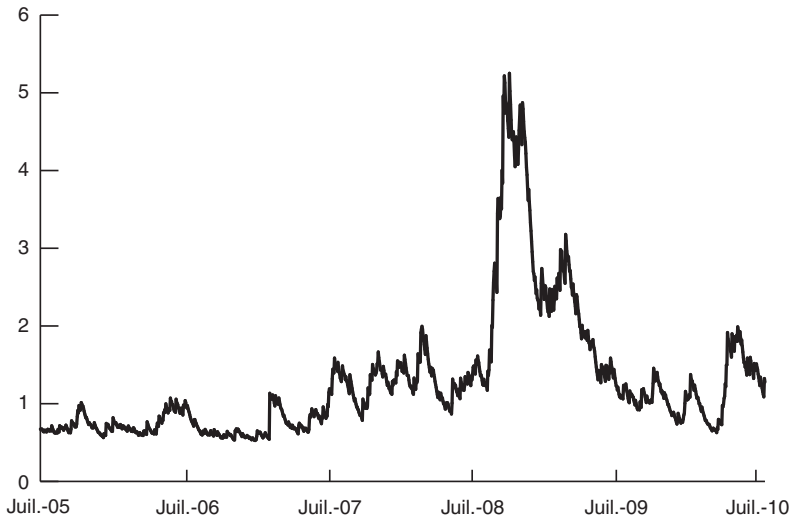
Le taux de variance de long terme, V_L, est dans notre exemple égal à :

$$\frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0{,}000001366}{0{,}006490} = 0{,}0002075$$

La volatilité de long terme est donc $\sqrt{0{,}0002075}$, soit 1,4404 % par jour.

Les graphiques 23.1 et 23.2 représentent respectivement l'évolution de la valeur de l'indice S&P500 et celle de sa volatilité estimée avec le modèle GARCH(1,1) sur la période de cinq ans couverte par les données. La volatilité quotidienne est généralement restée à des niveaux inférieurs à 2 %, mais on observe tout de même des pics de volatilité autour de 5 % au moment de la crise du crédit. (Ces hauts niveaux de volatilité se retrouvent aussi dans les valeurs de l'indice VIX que nous avons présenté à la section 15.11.)

Graphique 23.1 : Valeur du S&P500 du 18 juillet 2005 au 13 août 2010



Graphique 23.2 : Volatilité journalière du S&P500 du 18 juillet 2005 au 13 août 2010

Une alternative, parfois plus robuste, pour l'estimation des paramètres des modèles GARCH(1,1) est connue sous le nom de ciblage de la variance (*variance targeting*[12]). Cette méthode consiste à prendre la variance de l'échantillon (ou toute autre valeur jugée raisonnable) comme taux de variance moyen de long terme, V_L. La valeur de ω est alors $V_L(1-\alpha-\beta)$, et il ne reste plus que deux paramètres (α et β) à estimer. Dans le cas des données du tableau 23.1, la variance de l'échantillon est égale à 0,0002412, ce qui correspond à une volatilité quotidienne de 1,5531 %. En prenant la variance de l'échantillon comme valeur de V_L, les valeurs de α et β qui maximisent la fonction objectif donnée par l'équation (23.12) sont respectivement 0,08445 et 0,9101. La valeur maximale de la fonction objectif est égale à 10 228,1941, ce qui n'est que très légèrement inférieur aux 10 228,2349 obtenus avec la procédure précédente.

12. Voir R. Engle et J. Mezrich, "GARCH for Groups", *RISK*, août 1996, 36-40.

Dans le cas d'un recours au modèle EWMA, la procédure d'estimation est relativement simple. Il convient de fixer $\omega = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = \lambda$, aussi ne reste-t-il plus qu'un seul paramètre à estimer. Avec les données du tableau 23.1, la valeur de λ qui maximise la fonction objectif donnée par l'équation (23.12) est égale à 0,9374 pour une valeur maximale de la fonction objectif de 10 192,5104.

Le solveur d'Excel peut être utilisé pour la recherche de la valeur des paramètres qui maximisent la fonction de vraisemblance tant du modèle GARCH(1,1) que du modèle EWMA. Le programme fonctionne bien pour peu que la feuille de calcul soit organisée de façon à ce que les paramètres cherchés aient des valeurs du même ordre de grandeur. Par exemple, dans un modèle GARCH(1,1), on réserverait les cellules A1 à A3 pour les paramètres $10^5\omega$, 10α et β. On pose alors B1 = A1/100 000, B2 = A2/10 et B3 = A3. On utiliserait alors B1, B2 et B3 pour calculer la fonction de vraisemblance et le solveur déterminerait les valeurs de A1, A2 et A3 qui maximisent cette fonction. Il peut être judicieux de tester différentes valeurs initiales car le solveur stoppe parfois les itérations lorsqu'un maximum local est atteint.

Quelle est la qualité du modèle ?

L'hypothèse sous-jacente au modèle GARCH est que le niveau de volatilité change au cours du temps. Alors que la volatilité est relativement élevée pendant certaines périodes, elle est relativement faible pendant d'autres. Autrement dit, quand u_i^2 est élevé, u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, ... ont tendance à être élevés. Et quand u_i^2 est faible, u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, ... ont aussi tendance à être faibles. L'examen de la structure d'autocorrélation des u_i^2 permet de vérifier à quel point c'est effectivement le cas.

Supposons que les u_i^2 soient effectivement autocorrélés. Si le modèle GARCH fonctionne bien, il devrait faire disparaître cette autocorrélation. On peut le tester en étudiant la structure d'autocorrélation des variables u_i^2/σ_i^2. Si l'on ne retrouve qu'une très faible autocorrélation, le modèle retenu pour σ_i a bien permis d'expliquer les autocorrélations des u_i^2.

Le tableau 23.2 donne les résultats dans le cas des données du S&P500 présentées précédemment. Les décalages considérés pour le calcul de l'autocorrélation sont dans la première colonne. Les autocorrélations [13] pour les u_i^2 et les u_i^2/σ_i^2 apparaissent dans les deuxième et troisième colonnes. Le tableau montre que les autocorrélations entre les u_i^2 sont positives pour tous les décalages compris entre 1 et 15. Dans le cas de u_i^2/σ_i^2, certaines autocorrélations sont positives et d'autres sont négatives. Elles sont toutes largement inférieures aux autocorrélations mesurées pour les u_i^2.

Le modèle GARCH semble avoir bien expliqué les données. La statistique connue sous le nom de Ljung-Box offre la possibilité d'effectuer un test plus spécifique [14]. Pour une

13. Pour une série x_i, l'autocorrélation avec un décalage k est le coefficient de corrélation entre x_i et x_{i+k}.

14. Voir G. M. Ljung et G. E. P. Box, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models", *Biometrica*, 65, 1978, 297-303.

série composée de m observations, la statistique de Ljung-Box est :

$$m \sum_{k=1}^{K} \omega_k \eta_k^2$$

avec η_k l'autocorrélation pour le décalage k, K le nombre de décalages considérés et

$$\omega_k = \frac{m+2}{m-k}$$

Pour $K = 15$, l'absence de corrélation peut être rejetée au seuil de 5 % si la statistique de Ljung-Box est supérieure à 25.

Tableau 23.2 : Autocorrélations avant et après l'utilisation d'un modèle GARCH pour l'indice S&P500

Décalage	Autocorrélation pour u_i^2	Autocorrélation pour u_i^2/σ_i^2
1	0,183	0,063
2	0,385	−0,004
3	0,160	−0,007
4	0,301	0,022
5	0,339	0,014
6	0,308	−0,011
7	0,329	0,026
8	0,207	0,038
9	0,324	0,041
10	0,269	0,083
11	0,431	−0,007
12	0,286	0,006
13	0,224	0,001
14	0,121	0,017
15	0,222	−0,031

La statistique de Ljung-Box calculée à partir de la série des u_i^2 du tableau 23.2, d'une valeur proche de 1 566, indique une autocorrélation manifeste. Pour la série des u_i^2/σ_i^2, la statistique de Ljung-Box vaut 21,7, ce qui laisse penser que l'autocorrélation a été largement atténuée par le modèle GARCH.

23.6 L'utilisation du GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future

Le taux de variance estimé à la fin de la journée $n-1$ pour la journée n devient, avec un modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta)\, V_L + \alpha\, u_{n-1}^2 + \beta\, \sigma_{n-1}^2$$

ce qui donne :

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha\left(u_{n-1}^2 - V_L\right) + \beta\left(\sigma_{n-1}^2 - V_L\right)$$

Pour la journée $n + t$ à venir, nous avons :

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha\left(u_{n+t-1}^2 - V_L\right) + \beta\left(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L\right)$$

L'espérance de u_{n+t-1}^2 est σ_{n+t-1}^2, ce qui permet d'écrire :

$$E\left(\sigma_{n+t}^2 - V_L\right) = (\alpha + \beta)\ E\left(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L\right)$$

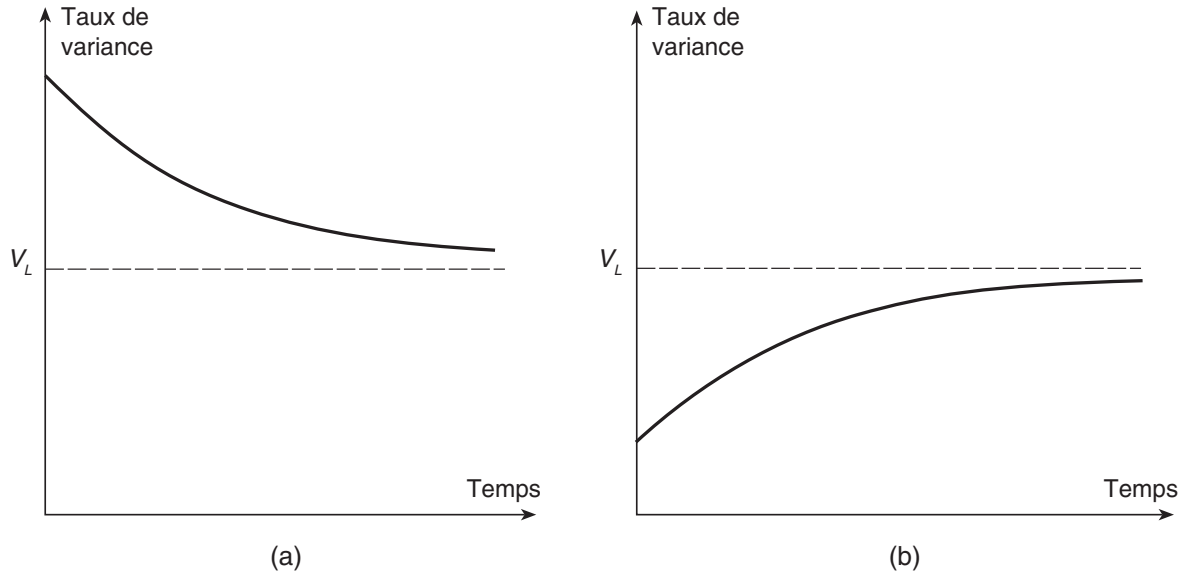
où E représente l'espérance mathématique. L'utilisation répétée de cette équation nous conduit à :

$$E\left(\sigma_{n+t}^2 - V_L\right) = (\alpha + \beta)^t\left(\sigma_n^2 - V_L\right)$$

ou encore :

$$E\left(\sigma_{n+t}^2\right) = V_L + (\alpha + \beta)^t\left(\sigma_n^2 - V_L\right) \tag{23.13}$$

Cette équation nous donne une prévision de la volatilité pour la journée $n + t$ à partir des seules informations disponibles à la fin de la journée $n-1$. Dans le modèle EWMA, $\alpha + \beta = 1$, aussi, comme on peut le voir dans l'équation (23.13), le taux de variance espéré futur est égal au taux de variance actuel. Quand $\alpha + \beta < 1$, le dernier terme de l'équation diminue à mesure que t augmente. Le graphique 23.3 montre la trajectoire suivie par le taux de variance quand sa valeur actuelle est différente de V_L.



Graphique 23.3 : Trajectoire espérée du taux de variance pour
(a) un taux de variance actuel supérieur au taux de variance de long terme,
(b) un taux de variance actuel inférieur au taux de variance de long terme

Comme nous l'avons déjà mentionné, le taux de variance montre une tendance au retour à la moyenne, avec un niveau de retour V_L et un taux de retour de $1 - \alpha - \beta$. Plus nous nous projetons dans le futur et plus les prévisions du taux de variance tendent vers V_L. Tout cela souligne qu'il faut $\alpha + \beta < 1$ pour que le processus GARCH(1,1) soit stable. Quand $\alpha + \beta > 1$, le poids attribué à la variance moyenne de long terme est négatif

et le processus est alors un processus « d'éloignement de la moyenne » plutôt qu'un processus de « retour à la moyenne ».

Dans le cas de l'indice S&P500 traité précédemment, nous avions $\alpha + \beta = 0{,}9935$ et $V_L = 0{,}0002075$. Supposons que nous ayons estimé le taux de variance actuel à 0,0003 par jour. (Cela correspond à une volatilité de 1,732 % par jour.) Le taux de variance espéré dans 10 jours est :

$$0{,}0002075 + 0{,}9935^{10}(0{,}0003 - 0{,}0002075) = 0{,}0002942$$

La volatilité espérée par jour est de 1,72 %, ce qui reste bien supérieur au niveau de long terme de la volatilité, qui est de 1,44 %. Toutefois, le taux de variance espéré dans 500 jours est :

$$0{,}0002075 + 0{,}9935^{500}(0{,}0003 - 0{,}0002075) = 0{,}0002110$$

La volatilité espérée par jour est alors de 1,45 %, soit un niveau très proche de celui de la volatilité de long terme.

Les structures par termes des volatilités

Plaçons-nous au jour n. On a :

$$V(t) = E\left(\sigma_{n+t}^2\right)$$

Posons maintenant :

$$a = \ln\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)$$

L'équation (23.13) devient :

$$V(t) = V_L + \mathrm{e}^{-at}\left[V(0) - V_L\right]$$

Ici, $V(t)$ est une estimation du taux de variance instantanée dans t jours. Le taux de variance moyen entre aujourd'hui et la date T est alors :

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt = V_L + \frac{1 - \mathrm{e}^{-aT}}{aT}\left[V(0) - V_L\right]$$

Plus l'option a une échéance éloignée, plus cette expression est proche de V_L. Notons $\sigma(T)$ la volatilité en base annuelle qui devrait être utilisée pour évaluer une option d'échéance T sous l'hypothèse d'un processus GARCH(1,1). En supposant qu'il y a 252 jours de cotation par an, $\sigma(T)^2$ vaut 252 fois le taux de variance moyen journalier, et on a donc :

$$\sigma\left(T\right)^2 = 252\left(V_L + \frac{1 - \mathrm{e}^{-aT}}{aT}\left[V(0) - V_L\right]\right) \tag{23.14}$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 20, les primes des différents contrats d'options sur un même actif sous-jacent sont souvent utilisées pour extraire une ***structure par termes des volatilités***. Il s'agit de la relation existant entre les volatilités implicites des options et leurs maturités. On peut s'appuyer sur l'équation (23.14) pour estimer une structure

par termes des volatilités à partir d'un modèle GARCH(1,1). La structure par termes des volatilités estimée est généralement différente de la structure par termes actuelle. Toutefois, comme nous allons le voir, elle sert souvent à prévoir la façon dont la structure par termes va répondre aux variations de volatilité.

Quand la volatilité courante est supérieure à la volatilité de long terme, le modèle GARCH(1,1) conduit à l'estimation d'une structure par termes des volatilités décroissante. Inversement, quand la volatilité courante est inférieure à la volatilité de long terme, la structure par termes des volatilités estimée est croissante. Dans le cas de l'indice S&P500, on a $a = \ln(1/0{,}99351) = 0{,}006511$ et $V_L = 0{,}0002075$. Supposons aussi que le taux de variance courant quotidien, $V(0)$, ait été estimé à 0,0003. On déduit de l'équation (23.14) :

$$\sigma(T)^2 = 252\left(0{,}0002075 + \frac{1-\mathrm{e}^{-0{,}006511\,T}}{0{,}006511\,T}(0{,}0003 - 0{,}0002075)\right)$$

où T est mesuré en jours. Le tableau 23.3 rapporte la volatilité en base annuelle pour différentes valeurs de T.

Tableau 23.3 : Structure par termes des volatilités de l'indice S&P500 construite avec un GARCH(1,1)

Durée de vie de l'option (jours)	10	30	50	100	500
Accroissement de volatilité (% annuel)	27,36	27,10	26,87	26,35	24,32

L'impact des changements de volatilité

L'équation (23.14) peut être écrite :

$$\sigma(T)^2 = 252\left[V_L + \frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{aT}\left(\frac{\sigma(0)^2}{252} - V_L\right)\right]$$

Quand $\sigma(0)$ subit une variation $\Delta\sigma(0)$, $\sigma(T)$ varie approximativement de :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{aT}\frac{\sigma(0)}{\sigma(T)}\Delta\sigma(0) \tag{23.15}$$

Le tableau 23.4 illustre l'effet d'une modification de la volatilité sur des options d'échéances diverses, dans le cas de notre exemple relatif à l'indice S&P500. Comme précédemment, nous supposons $V(0)$ égal à 0,0003 par jour, de sorte que :

$$\sigma(0) = \sqrt{252} \times \sqrt{0{,}0003} = 27{,}5\ \%$$

Nous envisageons dans ce tableau une variation de 100 points de base de la volatilité instantanée, qui passe de 27,5 % à 28,5 %, en base annuelle, soit une variation $\Delta\sigma(0) = 0{,}01$ ou 1 %.

Tableau 23.4 : Impact d'une augmentation de 1 % de la volatilité instantanée prédit par un GARCH(1,1)

Durée de vie de l'option (jours)	10	30	50	100	500
Volatilité de l'option (% annuel)	0,97	0,92	0,87	0,77	0,33

De nombreuses institutions financières se fondent sur des analyses semblables pour déterminer l'exposition de leurs positions aux variations de volatilité. Plutôt que de considérer une hausse uniforme, de 1 %, de la volatilité implicite pour le calcul du vega, la pratique consiste à utiliser l'augmentation de volatilité correspondant à l'échéance de l'option considérée. Sur la base du tableau 23.4, il conviendrait d'appliquer une hausse de volatilité de 0,97 % pour une option à 10 jours, une hausse de 0,92 % pour une option à 30 jours, une hausse de 0,87 % pour une option à 50 jours, et ainsi de suite.

23.7 Les corrélations

Nous nous sommes jusqu'ici concentré sur l'estimation et la prévision de la volatilité. Comme nous l'avons indiqué au chapitre 22, les corrélations jouent un rôle clé dans le calcul de la VaR. Nous allons montrer dans cette section comment les estimations des corrélations peuvent être actualisées selon une procédure analogue à celle employée dans les estimations de la volatilité.

La corrélation entre deux variables X et Y est définie par :

$$\frac{\text{cov}\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

où σ_X et σ_Y représentent les écarts-types respectifs de X et de Y, et cov(X,Y) la covariance entre X et Y. La covariance entre X et Y est donnée par :

$$E\left[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y)\right]$$

avec μ_X et μ_Y les moyennes respectives de X et de Y, et E l'opérateur d'espérance mathématique. Bien que les interprétations possibles des corrélations soient plus intuitives que celles des covariances, nous nous fonderons sur ces dernières pour mener l'analyse [15].

Notons x_i et y_i les variations relatives de X et de Y entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i :

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}} \qquad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

avec X_i et Y_i les valeurs de X et de Y à la fin de la journée i.

15. Nous pouvons ici faire une analogie avec la première partie de ce chapitre, dans laquelle nous avons mené l'analyse des modèles EWMA et GARCH en nous fondant sur les taux de variance, alors même que les volatilités sont plus faciles à comprendre.

Notons aussi :

$\sigma_{x,n}$: la volatilité quotidienne de la variable X, estimée pour le jour n ;

$\sigma_{y,n}$: la volatilité quotidienne de la variable Y, estimée pour le jour n ;

cov_n : l'estimation de la covariance entre les variations quotidiennes de X et de Y calculée le jour n.

On estime la corrélation entre X et Y pour le jour n par :

$$\frac{\text{cov}_n}{\sigma_{x,n}\sigma_{y,n}}$$

Si on pondère également l'ensemble des observations et qu'on suppose des moyennes nulles pour x_i et y_i, l'équation (23.3) donne l'estimation suivante des taux de variance de X et de Y à partir des m dernières observations :

$$\sigma_{x,n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}^2, \quad \sigma_{y,n}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{n-i}^2$$

Avec les mêmes hypothèses, un estimateur de la covariance entre X et Y est donné par :

$$\text{cov}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}\, y_{n-i} \tag{23.16}$$

Un modèle EWMA semblable à celui de l'équation (23.7) peut constituer une alternative intéressante. Dans ce cas, la formule d'actualisation des estimations de la covariance est :

$$\text{cov}_n = \lambda\, \text{cov}_{n-1} + (1-\lambda)\, x_{n-1}\, y_{n-1}$$

Une analyse semblable à celle développée pour le modèle de volatilité EWMA permet de montrer que les pondérations attribuées aux observations des $x_i y_i$ diminuent à mesure qu'on remonte dans le temps. En outre, plus la valeur de λ est faible, plus les pondérations associées aux observations récentes sont élevées.

■ **Exemple 23.3** Supposons que $\lambda = 0{,}95$ et que l'estimation de la corrélation entre deux variables X et Y soit égale à 0,6 pour la journée $n-1$. Supposons de plus que les volatilités de X et Y soient estimées à 1 % et 2 % pour ce même jour. On peut déduire l'estimation de la covariance entre X et Y pour la journée $n-1$ de la relation liant corrélation et covariance. Cela donne :

$$0{,}6 \times 0{,}01 \times 0{,}02 = 0{,}00012$$

Si les variations relatives de X et Y sur la journée $n-1$ sont respectivement 0,5 % et 2,5 %, les variances et la covariance valables pour la journée n devront être modifiées ainsi :

$$\sigma_{x,n}^2 = 0{,}95 \times 0{,}01^2 + 0{,}05 \times 0{,}005^2 = 0{,}00009625$$
$$\sigma_{y,n}^2 = 0{,}95 \times 0{,}02^2 + 0{,}05 \times 0{,}025^2 = 0{,}00041125$$
$$\text{cov}_n = 0{,}95 \times 0{,}00012 + 0{,}05 \times 0{,}005 \times 0{,}025 = 0{,}00012025$$

Les valeurs mises à jour des volatilités sont $\sqrt{0{,}00009625} = 0{,}981\,\%$ pour X et $\sqrt{0{,}00041125} = 2{,}028\,\%$ pour Y. Enfin, le nouveau coefficient de corrélation entre X et Y est :

$$\frac{0{,}00012025}{0{,}00981 \times 0{,}02028} = 0{,}6044$$

Les modèles GARCH peuvent aussi être employés à des fins de mise à jour des estimations de covariances et de prévisions de leurs niveaux futurs. Ainsi, le modèle GARCH(1,1) de mise à jour de la covariance s'écrit :

$$\text{cov}_n = \omega + \alpha\, x_{n-1} y_{n-1} + \beta\, \text{cov}_{n-1}$$

et la covariance moyenne de long terme est $\omega/(1-\alpha-\beta)$. Des formules semblables à celles des équations (23.13) et (23.14) peuvent être développées pour la prévision des covariances futures et le calcul de la covariance moyenne pour la durée de vie de l'option [16].

La condition de cohérence pour les covariances

Une fois les variances et covariances calculées, la matrice de variance-covariance peut être construite. L'élément $(i,\, j)$ de la matrice correspond à la covariance entre la variable i et la variable j, pour $i \neq j$, et à la variance de la variable i, pour $i = j$.

Toutes les matrices de variance-covariance Ω n'ont pas nécessairement de cohérence interne. La condition pour que ce soit le cas est que :

$$w^{\text{T}}\, \Omega\, w \geq 0 \tag{23.17}$$

pour l'ensemble des vecteurs w (de taille $N \times 1$), où w^{T} est le transposé de w. Une matrice qui satisfait cette propriété est dite ***semi-définie positive.***

Pour comprendre pourquoi la propriété (23.17) doit être satisfaite, notons

$$w^{\text{T}} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

L'expression $w^{\text{T}}\Omega w$ représente la variance de $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$ où x_i est la valeur de la variable i. En tant que variance, cette expression doit être positive ou nulle.

Pour s'assurer qu'on construit effectivement une matrice semi-définie positive, il convient de calculer les variances et covariances de façon cohérente. Si, par exemple, les variances sont calculées en attribuant un poids identique aux m dernières observations, il doit en être de même pour le calcul des covariances. Si les variances sont actualisées avec un modèle EWMA paramétré avec $\lambda = 0{,}94$, ce doit aussi être le cas pour les covariances.

16. Les modèles GARCH multivariés, dans lesquels la totalité de la matrice de variance-covariance est actualisée d'une façon cohérente, offrent une extension aux idées développées dans ce chapitre. Pour une étude des approches alternatives, on pourra se référer à R. Engle et J. Mezrich, "GARCH for Groups", *RISK*, août 1996, 36-40.

Par exemple, la matrice suivante n'est pas semi-définie positive :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 1 \end{bmatrix}$$

La variance de chaque variable est 1,0 ; dès lors, les covariances sont aussi des coefficients de corrélation. La première variable est fortement corrélée avec la troisième variable, ce qui est aussi le cas de la deuxième variable. Toutefois, il n'y a aucune corrélation entre la première et la deuxième variable, ce qui semble très étrange. En fixant w à $(1, 1, -1)$, on trouve que la condition posée dans l'équation (23.17) n'est pas vérifiée, prouvant par là même que la matrice n'est pas semi-définie positive [17].

23.8 Une application du modèle EWMA à un cas à quatre indices

Revenons maintenant à l'exemple présenté à la section 22.2, concernant un portefeuille de 10 millions de dollars US investi à 40 % dans le Dow Jones Industrial Average, 30 % dans le FTSE 100, 10 % dans le CAC 40 et 20 % dans le Nikkei 225. Nous travaillons sur la base des 500 dernières rentabilités quotidiennes observées au 25 septembre 2008 [18].

Le tableau 23.5 rapporte la matrice de corrélations obtenue pour le 25 septembre 2008 en accordant un poids égal aux 500 dernières rentabilités. Les indices FTSE 100 et CAC 40 sont très fortement corrélés positivement. Le DJIA est modérément corrélé positivement avec les indices FTSE 100 et CAC 40. Les corrélations de l'indice Nikkei avec les autres indices sont plus faibles.

Tableau 23.5 : Matrice des corrélations pour le 25 septembre 2008, calculée à partir des 500 dernières rentabilités quotidiennes équipondérées (la variable 1 est l'indice DJIA, la variable 2 le FTSE 100, la variable 3 le CAC 40 et la variable 4 le Nikkei 225)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}489 & 0{,}496 & -0{,}062 \\ 0{,}489 & 1 & 0{,}918 & 0{,}201 \\ 0{,}496 & 0{,}918 & 1 & 0{,}211 \\ -0{,}062 & 0{,}201 & 0{,}211 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de variance-covariance estimée avec les rentabilités équipondérées est rapportée dans le tableau 23.6. D'après l'équation (22.4), la variance des pertes du portefeuille (mesurées en milliers de dollars US) donnée par la matrice est de 8 761,833, ce qui correspond à un écart-type de 93,60. La VaR à 99 % à 1 jour (toujours en milliers de dollars US) est donc égale à $2{,}33 \times 93{,}60 = 217{,}757$, alors que l'équation (23.17) donne

17. On peut montrer qu'une matrice de corrélation de taille 3×3 est semi-définie positive si on a : $\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} \leq 1$ où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les variables i et j.

18. Les données utilisées dans cette section sont disponibles sur le site www.pearson.fr.

l'ES à 99 % à 1 jour égal à 249,476. Cela donne donc une VaR de 217 757 $ et un ES de 249 476 $, à comparer respectivement avec les 253 385 $ et 327 181 $ calculés selon l'approche de simulation historique à la section 22.2.

Tableau 23.6 : Matrice de variance-covariance pour le 25 septembre 2008, calculée à partir des 500 dernières rentabilités quotidiennes équipondérées (la variable 1 est l'indice DJIA, la variable 2 le FTSE 100, la variable 3 le CAC 40 et la variable 4 le Nikkei 225)

$$\begin{bmatrix} 0{,}0001227 & 0{,}0000768 & 0{,}0000767 & -0{,}0000095 \\ 0{,}0000768 & 0{,}0002010 & 0{,}0001817 & 0{,}0000394 \\ 0{,}0000767 & 0{,}0001817 & 0{,}0001950 & 0{,}0000407 \\ -0{,}0000095 & 0{,}0000394 & 0{,}0000407 & 0{,}0001909 \end{bmatrix}$$

La matrice de variance-covariance du tableau 23.7 est calculée à partir du modèle EWMA [19] avec $\lambda = 0{,}94$ plutôt qu'en équipondérant les rentabilités observées. D'après l'équation (22.4), la variance des pertes du portefeuille (mesurées en milliers de dollars US) donnée par la matrice est de 40 995,765, ce qui correspond à un écart-type de 202,474. La VaR à 99 % à un jour est donc de :

$$2{,}33 \times 202{,}474 = 471{,}025$$

Tableau 23.7 : Matrice de variance-covariance pour le 25 septembre 2008, calculée à partir du modèle EWMA avec $\lambda = 0{,}94$ (la variable 1 est l'indice DJIA, la variable 2 le FTSE 100, la variable 3 le CAC 40 et la variable 4 le Nikkei 225)

$$\begin{bmatrix} 0{,}0004801 & 0{,}0004303 & 0{,}0004257 & -0{,}0000396 \\ 0{,}0004303 & 0{,}0010314 & 0{,}0009630 & 0{,}0002095 \\ 0{,}0004257 & 0{,}0009630 & 0{,}0009535 & 0{,}0001681 \\ -0{,}0000396 & 0{,}0002095 & 0{,}0001681 & 0{,}0002541 \end{bmatrix}$$

Cela donne une VaR de 471 025 $ quand l'ES calculé avec l'équation (22.1) est de 539 637 $. Ces valeurs sont plus de deux fois plus importantes que celles que nous avions obtenues avec les rentabilités équipondérées. On peut expliquer cet écart à partir des tableaux 23.8 et 23.9. L'écart-type des rentabilités d'un portefeuille constitué de positions longues dans des actifs financiers augmente non seulement avec l'écart-type des rentabilités des différents actifs financiers, mais aussi avec les corrélations entre les rentabilités de ces actifs. Le tableau 23.8 montre que les estimations quotidiennes des écart-types des rentabilités sont beaucoup plus élevées pour le modèle EWMA que

19. Pour démarrer les calculs du modèle EWMA, la variance est initialement fixée au niveau de celle de l'échantillon. Nous aurions pu aussi les démarrer avec le carré de la première rentabilité, comme dans le tableau 23.7. Ces deux approches produisent la même variance finale, qui est tout ce qui nous intéresse ici.

lorsque les rentabilités sont équipondérées. Cela s'explique par le niveau élevé des volatilités dans la période précédant le 25 septembre 2008, comparativement au reste de l'échantillon. La comparaison des tableaux 23.5 et 23.9 illustre l'augmentation similaire des corrélations [20].

Tableau 23.8 : Niveaux quotidiens de volatilités (%), calculés par équipondération des rentabilités et par le modèle EWMA

	DJIA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
Équipondération	1,11	1,42	1,40	1,38
EWMA	2,19	3,21	3,09	1,59

Tableau 23.9 : Matrice des corrélations pour le 25 septembre 2008, calculée à partir du modèle EWMA (la variable 1 est l'indice DJIA, la variable 2 le FTSE 100, la variable 3 le CAC 40 et la variable 4 le Nikkei 225)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}611 & 0{,}629 & -0{,}113 \\ 0{,}611 & 1 & 0{,}971 & 0{,}409 \\ 0{,}629 & 0{,}971 & 1 & 0{,}342 \\ -0{,}113 & 0{,}409 & 0{,}342 & 1 \end{bmatrix}$$

Résumé

Les modèles d'évaluation d'options les plus utilisés, comme celui de Black-Scholes, supposent que la volatilité de l'actif sous-jacent est constante. Cette hypothèse est loin d'être vérifiée, et en pratique, la volatilité d'un actif, comme le prix d'une action, suit un processus stochastique. À la différence du prix de l'actif, elle n'est pas directement observable et ce chapitre était consacré aux procédures permettant de modéliser les évolutions du niveau de volatilité.

La variation relative d'une variable de marché entre la fin de la journée $i-1$ et la fin de la journée i est notée u_i. Le taux de variance de la variable de marché (qui est le carré de sa volatilité) est calculé comme une moyenne pondérée des u_i^2. Le trait caractéristique des schémas de pondération présentés ici est qu'ils n'attribuent pas un poids égal à toutes les observations de u_i^2. Plus une observation est récente, plus le poids qui lui est attribué est important. Dans les modèles EWMA et GARCH(1,1), les pondérations diminuent exponentiellement à mesure que les observations deviennent plus anciennes. Le modèle GARCH diffère toutefois du modèle EWMA en ce sens qu'il affecte aussi

20. Il s'agit là d'une illustration du phénomène de tendance à l'augmentation des corrélations sur les marchés baissiers.

un certain poids au taux de variance moyen de long terme. Les modèles EWMA et GARCH(1,1) ont tous deux une structure permettant une prévision relativement aisée des niveaux futurs des taux de variance.

L'estimation des paramètres des modèles EWMA, GARCH ou des modèles analogues se fait sur la base des données historiques et, généralement, à l'aide des méthodes du maximum de vraisemblance. Ces dernières nécessitent le recours à une procédure itérative pour déterminer la valeur des paramètres qui maximise la probabilité d'occurrence, ou vraisemblance, des données historiques. Une fois ces paramètres déterminés, il est possible de juger de la qualité d'un modèle GARCH(1,1) en vérifiant à quel point il supprime l'autocorrélation des u_i^2.

Il est possible de développer un modèle de suivi des covariances correspondant à chacun des modèles développés pour suivre les évolutions de la variance. Les procédures détaillées ici peuvent ainsi être employées pour mettre à jour dans son intégralité la matrice de variance-covariance utilisée dans les calculs de la VaR.

Références complémentaires

Bollerslev T., "General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 1986, 307-327.

Cumby R., S. Figlewski et J. Hasbrouck, "Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models", *Journal of Derivatives*, 1, 1993, 51-63.

Engle R. F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation", *Econometrica*, 50, 1982, 987-1008.

Engle R. F. et J. Mezrich, "Grappling with GARCH", *RISK*, septembre 1995, 112-117.

Engle R. F. et J. Mezrich, "GARCH for Groups", *RISK*, août 1996, 36-40.

Engle R. F. et V. K. Ng, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *Journal of Finance*, 48, 1993, 1749-1778.

Nelson D., "Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59, 1990, 347-370.

Noh J., R. F. Engle et A. Kane, "Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P500 Index", *Journal of Derivatives*, 2, 1994, 17-30.

Problèmes et exercices

23.1 Expliquez le fonctionnement du modèle EWMA d'estimation de la volatilité à partir de données historiques.

23.2 Quelle différence y a-t-il entre les modèles EWMA et GARCH(1,1) pour la mise à jour des volatilités ?

23.3 L'estimation la plus récente de la volatilité quotidienne est de 1,5 % et le prix de l'actif à la clôture de la veille était de 30 €. Le paramètre λ du modèle EWMA est fixé à 0,94. Supposez que le prix de l'actif aujourd'hui à la clôture soit de 30,50 €. Quel effet cela aura-t-il sur la nouvelle valeur de la volatilité dans le modèle EWMA ?

23.4 Une société utilise un modèle EWMA pour prévoir la volatilité. Elle décide de changer son paramètre λ en le faisant passer de 0,95 à 0,85. Quelles vont être les conséquences vraisemblables de cette modification sur les prévisions ?

23.5 La volatilité annuelle d'une variable de marché est de 30 %. Calculez un intervalle de confiance à 99 % pour la variation relative quotidienne de cette variable.

23.6 Une société utilise un modèle GARCH(1,1) pour suivre les variations de volatilité. Les trois paramètres sont ω, α et β. Décrivez les effets d'une légère augmentation de la valeur de chacun des paramètres quand les autres restent constants.

23.7 La plus récente estimation de la volatilité quotidienne du taux de change dollar US/ livre sterling est 0,6 %, et le taux de change était de 1,5000 la veille à 16 h. Le paramètre λ du modèle EWMA est fixé à 0,9. Supposez que le taux de change soit égal à 1,4950 aujourd'hui à la même heure. Quel est le nouveau niveau de volatilité ?

23.8 Supposez que l'indice CAC 40 ait clôturé hier soir à 3 263,78 points et que la volatilité quotidienne de cet indice soit à ce moment-là estimée à 1 %. Les paramètres du modèle GARCH(1,1) sont $\omega = 0{,}000002$, $\alpha = 0{,}06$ et $\beta = 0{,}92$. Si l'indice clôture aujourd'hui à 3 230,64 points, quelle sera la nouvelle estimation de la volatilité ?

23.9 Prenons deux actifs A et B dont les volatilités quotidiennes respectives sont actuellement 1,6 % et 2,5 %. La veille, à la clôture, les prix de ces actifs étaient 20 € et 40 €, et l'estimation du coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux actifs était de 0,25. Le paramètre λ du modèle EWMA est fixé à 0,95.

a. Calculez le niveau estimé de la covariance entre les actifs.

b. Mettez à jour l'estimation de la corrélation en supposant que les prix des actifs aujourd'hui à la clôture sont respectivement 20,50 € et 40,50 €.

23.10 L'estimation des paramètres d'un GARCH(1,1) donne $\omega = 0{,}000004$, $\alpha = 0{,}05$ et $\beta = 0{,}92$. Quelle est, dans ce cas, la volatilité moyenne de long terme ? Déterminez l'équation qui régit le retour du taux de variance vers son niveau moyen de long terme. Pour un niveau actuel de volatilité de 20 % par an, quelle est la volatilité espérée à 20 jours ?

23.11 Prenons deux actifs X et Y dont les volatilités quotidiennes sont actuellement égales à 1,0 % et 1,2 %. La veille, à la clôture, les prix de ces actifs étaient 30 € et 50 €, et l'estimation du coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux actifs est 0,50. Corrélations et volatilités sont mises à jour sur la base d'un modèle GARCH(1,1). Les paramètres ont été estimés avec pour résultats $\alpha = 0{,}04$ et $\beta = 0{,}94$. Pour la corrélation, on a $\omega = 0{,}000001$, et pour les volatilités, $\omega = 0{,}000003$. Si aujourd'hui, à la clôture, les prix des deux actifs sont 31 € et 51 €, comment l'estimation de la volatilité doit-elle être modifiée ?

23.12 Supposons que la volatilité quotidienne de l'indice FTSE 100 (mesuré en livres sterling) soit de 1,8 % et que la volatilité quotidienne du taux de change dollar US/livre sterling soit de 0,9 %. Supposons en outre que la corrélation entre l'indice FTSE 100 et le taux de change dollar US/livre sterling soit égale à 0,4. Quelle est la volatilité de l'indice FTSE 100 quand il est exprimé en dollars US ? Supposez pour cela que le taux de change dollar US/livre sterling est donné en

quantité de dollars US par livre sterling. (Indication : quand $Z = XY$, la variation relative de Z est à peu de choses près égale à la somme des variations relatives de X et Y.)

23.13 En reprenant les données du problème 23.12, supposons maintenant que la corrélation entre l'indice S&P500 (mesuré en dollars US) et l'indice FTSE 100 (mesuré en livres sterling) vaille 0,7, que la corrélation entre l'indice S&P500 (mesuré en dollars US) et le taux de change dollar US/livre sterling soit de 0,3, et enfin que la volatilité de l'indice S&P500 soit de 1,6 %. Quelle est la corrélation entre l'indice S&P500 (mesuré en dollars US) et l'indice FTSE 100 quand celui-ci est aussi exprimé en dollars US ? (Indication : pour trois variables X, Y et Z, la covariance entre $X + Y$ et Z est égale à la somme des covariances entre X et Z et entre Y et Z.)

23.14 Montrez l'équivalence entre l'équation (23.9) du modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha\, u_{n-1}^2 + \beta\, \sigma_{n-1}^2$$

et le modèle à volatilité stochastique :

$$dV = a\,(V_L - V)\,dt + \xi\, V\, dz$$

dans lequel le temps est mesuré en jours, V représente le carré de la volatilité du prix de l'actif et :

$$a = 1 - \alpha - \beta \quad ; \quad V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad ; \quad \xi = \alpha\sqrt{2}$$

Quel est le modèle à volatilité stochastique correspondant quand le temps est mesuré en années ? (Indication : si u_{n-1} est la rentabilité de l'actif sur la période Δt et suit une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type σ_{n-1}, les moyennes de u_{n-1}^2 et de u_{n-1}^4 sont respectivement égales à σ_{n-1}^2 et $3\sigma_{n-1}^4$.)

23.15 Dans l'application à quatre indices de la section 23.8, la VaR et l'ES sont calculés à l'aide de l'approche de construction de modèle. Que deviendraient la VaR et l'ES pour un investissement réparti de façon égale dans les quatre indices ? Reproduisez les calculs avec (a) des volatilités et des corrélations estimées à partir des rentabilités équipondérées et (b) des volatilités et des corrélations estimées à partir du modèle EWMA avec $\lambda = 0{,}94$. Vous pouvez utiliser les feuilles de calcul Excel disponibles sur le site www.pearson.fr.

23.16 Quel est l'impact sur les estimations du modèle EWMA de la fin de section 23.8 d'un changement de la valeur de λ de 0,94 à 0,97 ? Vous pouvez utiliser les feuilles de calcul Excel disponibles sur le site www.pearson.fr.

Questions complémentaires

23.17 Supposons que le prix au comptant de l'or la veille à la clôture ait été de 600 \$ l'once et que sa volatilité soit estimée à 1,3 % par jour. Le prix de clôture est aujourd'hui de 596 \$. Ajustez l'estimation de la volatilité en vous fondant sur :

a. un modèle EWMA avec $\lambda = 0{,}94$;

b. un modèle GARCH(1,1) avec $\omega = 0{,}000002$, $\alpha = 0{,}04$ et $\beta = 0{,}94$.

23.18 Reprenez les données du problème 23.17 et supposez en outre que l'argent s'échangeait à 16 $ l'once hier soir à la clôture des échanges, que sa volatilité quotidienne était alors estimée à 1,5 % et que sa corrélation avec le prix de l'or était estimée à 0,8. Le prix de l'argent est aujourd'hui resté inchangé. Ajustez la volatilité du prix de l'argent et la corrélation entre les prix de l'or et de l'argent en vous fondant sur les deux modèles proposés dans le problème 23.17. Dans la réalité, pensez-vous que le paramètre ω est le même pour l'or et l'argent ?

23.19 Une feuille de calcul Excel constituée de 900 valeurs quotidiennes de différents taux de change et indices boursiers peut être téléchargée sur le site web www.pearson.fr.

Choisissez un taux de change et un indice boursier. Déterminez la valeur du λ du modèle EWMA qui minimise la valeur de :

$$\sum_i (v_i - \beta_i)^2$$

avec v_i la prévision de la variance effectuée à la fin de la journée $i-1$ et β_i la variance des données observée entre la journée i et la journée $i+25$. Utilisez pour cela le solveur d'Excel et prenez pour prévision de la variance à la fin de la première journée le carré de la rentabilité observée ce jour-là pour lancer les calculs du modèle EWMA.

23.20 Prenons un modèle GARCH(1,1) avec les paramètres $\alpha = 0{,}03$, $\beta = 0{,}95$ et $\omega = 0{,}000002$.

a. Quel est le niveau moyen de volatilité de long terme ?

b. Si la volatilité est actuellement de 1,5 % par jour, quelle est votre estimation de la volatilité à 20, 40 et 60 jours ?

c. Quelle volatilité devrait être utilisée pour évaluer des contrats d'options d'échéance 20, 40 et 60 jours ?

d. Supposez qu'un événement induise une augmentation de la volatilité actuelle de 0,5 %, la faisant passer à 2 % par jour. Estimez l'effet de cette volatilité dans 20, 40 et 60 jours.

e. Dans quelles proportions l'événement s'étant produit aujourd'hui va-t-il se répercuter sur la volatilité utilisée pour évaluer les options d'échéance 20, 40 et 60 jours ?

23.21 Calculez la VaR et l'ES dans le cas de l'exemple à quatre indices de la section 23.8, avec des investissements respectifs dans les indices DJIA, FTSE 100, CAC 40 et Nikkei 250 de 3 millions de dollars US, 3 millions de dollars US, 1 million de dollars US et 3 millions de dollars US. Reproduisez les calculs avec (a) des volatilités et des corrélations estimées à partir des rentabilités équipondérées et (b) des volatilités et des corrélations estimées à partir du modèle EWMA. Quel est l'impact sur les estimations du modèle EWMA d'un changement de la valeur de λ de 0,94 à 0,90 ? Vous pouvez utiliser les feuilles de calcul Excel disponibles sur le site www.pearson.fr.

23.22 Estimez les paramètres des modèles d'estimation EWMA et GARCH(1,1) à partir des données de taux de change euro-dollar US du 27 juillet 2005 au 27 juillet 2010. Ces données sont disponibles sur le site www.pearson.fr.

Chapitre 24

Le risque de crédit

La quasi-totalité des actifs dérivés étudiés jusqu'à présent portaient sur le risque de marché. Dans ce chapitre, nous abordons un autre type de risque très important dans les institutions financières, à savoir le risque de crédit. La plupart des institutions financières consacrent des ressources considérables à la mesure et à la gestion de ce risque. De plus, les autorités de contrôle exigent des capitaux propres suffisants pour faire face à ces risques (ces capitaux viennent s'ajouter au capital dévolu à la couverture du risque de marché).

La possibilité de défaut de la part des emprunteurs, des contreparties dans les transactions d'actifs dérivés et des émetteurs d'obligations met les banques et les institutions financières face à un risque de crédit significatif. Dans ce chapitre, nous tentons de quantifier ce risque. Nous décrivons d'abord les principales méthodes d'estimation des probabilités de défaut. Nous insistons sur la différence entre probabilités réelles et probabilités risque-neutre de défaut, et nous examinons la nature du risque de crédit sur le marché de gré à gré (OTC) des actifs dérivés, ainsi que les clauses de ces contrats autorisant une réduction de ce type de risque. Enfin, nous présentons le phénomène de corrélation des défauts, les copules gaussiennes et la VaR de crédit.

Au chapitre 25, nous présenterons les dérivés de crédit ; les idées développées dans le présent chapitre seront très utiles pour évaluer ces dérivés de crédit.

24.1 Les notations

Les agences de rating comme Moody's, Fitch ou Standard & Poor's sont spécialisées dans la notation des obligations émises par les entreprises. Dans le système élaboré par Moody's, la meilleure note est Aaa ; les obligations qui reçoivent cette note sont considérées comme ayant une probabilité de défaut quasi nulle. Les ratings suivants sont Aa, A, Baa, Ba, B et Caa. Seules les obligations dont la note est supérieure à Baa sont considérées comme relativement sûres (*investment grade*). Les ratings correspondants chez S&P et Fitch sont AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC. Les catégories de notes, aussi bien chez Moody's que chez S&P ou Fitch, font l'objet de diverses subdivisions. Par exemple,

Aa est divisée en Aa1, Aa2 et Aa3 chez Moody's, A est divisée en A1, A2, A3 chez S&P et Fitch, etc. Seules les catégories Aaa et AAA ne font pas l'objet de subdivisions.

24.2 Les probabilités de défaut historiques

Le tableau 24.1 est caractéristique des données fournies par les agences de rating. Il montre l'évolution des taux de défaut en fonction de l'horizon pour une entreprise située à un niveau de note donné. Par exemple, une société notée Baa a une probabilité de 0,185 % de faire défaut dans l'année, une probabilité de 0,480 % de faire défaut dans les deux ans, etc. On peut déduire de ce tableau la probabilité qu'une société fasse défaut une année donnée. La probabilité qu'une entreprise notée Baa fasse défaut la deuxième année est d'environ 0,480 % − 0,185 % = 0,295 %.

Tableau 24.1 : Probabilités de défaut cumulées (en %), 1970-2015

Maturité	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0,000	0,011	0,011	0,031	0,087	0,198	0,396	0,725	0,849
Aa	0,022	0,061	0,112	0,196	0,305	0,540	0,807	1,394	2,266
A	0,056	0,170	0,357	0,555	0,794	1,345	2,313	4,050	6,087
Baa	0,185	0,480	0,831	1,252	1,668	2,525	4,033	7,273	10,734
Ba	0,959	2,587	4,501	6,538	8,442	11,788	16,455	23,930	30,164
B	3,632	8,529	13,515	17,999	22,071	29,028	36,298	43,368	48,071
Caa–C	10,671	18,857	25,639	31,075	35,638	41,812	47,843	50,601	51,319

Source : Moody's

Le tableau 24.1 montre que, pour la catégorie investissement, la probabilité de défaut tend à être une fonction croissante de l'horizon (les probabilités qu'une société notée A fasse défaut pendant les années 0-5, 5-10, 10-15, 15-20 sont respectivement de 0,794 %, 1,519 %, 1,737 % et 2,037 %). Cela vient du fait que l'emprunteur est considéré initialement comme peu risqué et qu'au fur et à mesure que le temps passe, la possibilité de voir sa solvabilité se dégrader augmente. En revanche, pour les obligations risquées à la date initiale, la probabilité de défaut est souvent une fonction décroissante de l'horizon. Par exemple, une société notée Caa a des probabilités de défaillance pendant les années 0-5, 5-10, 10-15, 15-20 respectivement égales à 22,071 %, 14,227 %, 7,070 % et 4,703 %. Cela s'explique par le fait que pour ce type d'entreprise l'année ou les deux années à venir sont critiques. Si elles se passent sans encombre, la situation s'améliore ensuite dans la plupart des cas.

L'intensité de défaut

Du tableau 24.1, on peut déduire la probabilité qu'une obligation notée Caa fasse défaut pendant la troisième année sous la forme 25,639 − 18,857 = 6,782 %. Cette quantité sera appelée « probabilité non conditionnelle de défaut » C'est la probabilité de défaut la

troisième année, vue de la date 0. Mais la probabilité que la société survive jusqu'à la fin de l'année 2 est égale à $100\ \% - \ 18{,}857\ \% = \ 81{,}143\ \%$. En conséquence, la probabilité que le défaut survienne au cours de la troisième année, sachant que l'entreprise n'a pas fait défaut avant, est égale à $0{,}06782\ \% \,/\, 0{,}81143\ \% \ = \ 8{,}36\ \%$. Ces probabilités conditionnelles sont appelées ***taux d'intensité du défaut*** (***hazard rate*** ou ***default intensity***). Le taux de 8,36 % qui vient d'être calculé concerne une année. Supposons qu'on souhaite une mesure de même nature sur un intervalle de longueur Δt. L'intensité du défaut, notée $\lambda(t)$, à la date t est définie de sorte que le produit $\lambda(t)\Delta t$ soit la probabilité de défaut dans l'intervalle compris entre t et $t + \Delta t$, conditionnelle à l'absence de défaut avant t. Si $V(t)$ est la probabilité de survie cumulée jusqu'à la date t, c'est-à-dire la probabilité que le défaut ne survienne pas avant la date t, on a :

$$V(t + \Delta t) - V(t) = -\lambda(t)\, V(t)\, \Delta t$$

En passant à la limite, on peut écrire :

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda(t)\, V(t)$$

On en déduit alors :

$$V(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right)$$

Notons $Q(t)$ la probabilité de défaut jusqu'à la date t. On peut écrire :

$$Q(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right) = 1 - \exp\left(-\bar{\lambda}(t)\, t\right) \tag{24.1}$$

où $\bar{\lambda}(t)$ est l'intensité de défaut moyenne entre 0 et t.

24.3 Les taux de recouvrement

Les créanciers d'une entreprise qui fait défaut vont chercher à récupérer les sommes qui leur sont dues, éventuellement par des moyens judiciaires[1]. Dans certains cas, l'entreprise fait l'objet d'une restructuration et les créanciers acceptent de ne récupérer qu'une partie de ce qu'ils ont prêté. Dans d'autres situations, l'entreprise est liquidée, les actifs sont vendus et les montants retirés de la vente sont utilisés pour rembourser tout ou partie des créanciers. Toutes les créances n'ont pas le même ordre de priorité et certaines sont remboursées avant d'autres. Les salariés et le fisc passent avant les obligataires.

Le taux de recouvrement pour une obligation est normalement défini comme la valeur de l'obligation juste après le défaut ; il est exprimé en pourcentage de la valeur faciale. Le tableau 24.2 présente des exemples de ces taux de recouvrement selon l'ordre de priorité de la dette considérée. Il montre que les prêts de première catégorie (ayant priorité sur les actifs de l'entreprise) ont le taux de recouvrement le plus élevé. Les obligations senior garanties (appelées 1*st lien bonds*) ont un taux de recouvrement moyen de 53,4 %, alors que les obligations junior subordonnées ne donnent qu'un taux de 24,2 %.

1. Aux États-Unis, les détenteurs d'obligations sont en droit de réclamer la valeur faciale de l'obligation plus le coupon couru.

Tableau 24.2 : Taux de recouvrement des obligations corporate et prêts bancaires en pourcentage de la valeur faciale, 1983-2015

Classe	Taux de recouvrement moyen (en %)
Obligation senior garantie (1st lien bond)	53,4
Obligation senior garantie (2nd lien bond)	49,7
Obligation senior non garantie	37,6
Obligation senior subordonnée	31,1
Obligation subordonnée	31,9
Obligation junior subordonnée	24,2

Source : Moody's

La relation entre taux de défaut et taux de recouvrement

Au chapitre 8, nous avons vu qu'une des leçons de la crise du crédit de 2007 est la corrélation négative entre les taux de défaut sur les emprunts immobiliers et le taux de recouvrement sur ces emprunts. Quand le taux de défaut augmente, le nombre de maisons offertes à la vente augmente, ce qui baisse les prix et diminue le taux de recouvrement. Les taux de recouvrement des obligations du secteur privé présentent aussi une corrélation négative significative avec les taux de défaut [2]. Une mauvaise année, avec des taux de défaut élevés, sera en général doublement mauvaise, car les taux de recouvrement seront faibles.

24.4 L'estimation des probabilités de défaut à partir des prix d'obligations

Le tableau 24.1 donne une méthode d'estimation des probabilités de défaut. Une autre approche consiste à déduire ces probabilités des spreads de taux. La probabilité de défaut d'une entreprise peut être estimée à partir des obligations qu'elle a émises. L'hypothèse sous-jacente est que la seule raison pour qu'une obligation d'entreprise cote un prix moins élevé qu'une obligation d'État est liée à la possibilité du défaut [3]. Considérons tout d'abord un raisonnement approximatif. Supposons que le taux actuariel d'une obligation corporate soit supérieur de 200 points de base (ce spread est noté $s(T)$ si la maturité est de T années) au taux de l'obligation sans risque (de défaut) correspondante, et que le taux de recouvrement R attendu en cas de défaut soit de 40 %. Le détenteur de l'obligation corporate doit s'attendre à perdre 200 bp (ou 2 % par an) du fait des défauts possibles. Cela donne une estimation de la probabilité de défaut une

2. E. I. Altman, B. Brady, A. Resti et A. Sironi, "The link between Default and Recovery Rates : Theory, Empirical Evidence and Implications", *Journal of Business*, 78 (6), 2005, 2203-2228.

3. C'est une approximation puisque certains arguments, comme les différences de liquidité, peuvent aussi être à l'origine d'une différence de prix.

année donnée, conditionnelle à l'absence de défaut préalable, égale à :

$$\bar{\lambda} = \frac{s(T)}{1-R} \tag{24.2}$$

où $\bar{\lambda}$ est l'intensité annuelle de défaut. Dans notre exemple, cela donne :

$$\bar{\lambda} = 2\ \%/(1-0{,}4) = 3{,}33\ \%$$

■ **Exemple 24.1** Supposons que des obligations à 1 an, 2 ans et 3 ans soient émises par une entreprise, avec des spreads respectifs de 150, 180 et 195 bp par rapport au taux sans risque. Si le taux de recouvrement est de 40 %, l'intensité de défaut pour la première année est donnée par l'équation (24.2). On a $0{,}0150/(1-0{,}4) = 0{,}025$ soit 2,5 % par an. De même, l'intensité de défaut pour la période couvrant les années 1 et 2 vaut $0{,}0180/(1-0{,}4) = 0{,}030$, soit 3 % par an, et l'intensité de défaut pour la période de trois ans vaut $0{,}0195\,(1-0{,}4) = 0{,}0325$, soit 3,25 %. Ces résultats impliquent que pour l'année 2, on a une intensité de défaut égale à $2\times 0{,}03 - 1\times 0{,}025 = 3{,}5\ \%$ et pour l'année 3, elle vaut $3\times 0{,}0325 - 2\times 0{,}03 = 0{,}0375$, soit 3,75 %.

Calcul à partir des prix d'obligations

Pour un calcul plus précis, on peut choisir les taux d'intensité de défaut qui permettent de retrouver les prix des obligations. L'approche est similaire à celle du bootstrap de la section 4.7 pour calculer la courbe des taux zéro-coupon. Considérons des obligations de maturités t_i, avec $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ La maturité la plus courte permet de déterminer l'intensité de défaut jusqu'à t_1. La maturité suivante permet de calculer l'intensité de défaut entre t_1 et t_2, etc.

■ **Exemple 24.2** Considérons un taux sans risque continu de 5 % par an pour toutes les maturités et des obligations à 1, 2 et 3 ans avec des taux actuariels respectifs (continus) de 6,5 %, 6,8 % et 6,95 %. Ces taux sont cohérents avec les données de l'exemple 24.1. On suppose que chaque obligation a un nominal de 100 $ et un taux de coupon annuel de 8 %, payé semestriellement. Un coupon vient d'être payé. Les prix des obligations (cohérents avec les taux actuariels) sont respectivement 101,33 $, 101,99 $ et 102,47 $. Si ces obligations étaient sans risque, les prix seraient égaux à 102,83 $, 105,52 $ et 108,08 $. Cela signifie que la valeur actuelle espérée des pertes en cas de défaut est de 1,50 $ pour la première, et de 3,53 $ et 5,61 $ pour les deux autres. Notons λ_i l'intensité de défaut pour l'année i et supposons que le taux de recouvrement est de 40 % en cas de défaut. Pour l'obligation à un an, la probabilité de défaut dans les six premiers mois est égale à $1 - \mathrm{e}^{-0{,}5\lambda_i}$ et la probabilité de défaut dans les six mois suivants est $\mathrm{e}^{-0{,}5\lambda_i} - \mathrm{e}^{-\lambda_i}$. On suppose, pour simplifier, que les défauts ne peuvent survenir qu'au milieu des périodes de 6 mois. Les dates de défaut possibles sont donc dans 3 mois ou dans 9 mois. La valeur (forward) sans risque de cette obligation dans 3 mois est :

$$4\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}25} + 104\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}75} = 104{,}12\ \$$$

La définition du taux de recouvrement donnée dans la section précédente implique que si une obligation fait défaut, elle vaudra 40. Par conséquent, la valeur actuelle de la perte en cas de défaut dans 3 mois est égale à :

$$(104{,}12 - 40)\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}25} = 63{,}33\ \$$$

La valeur sans risque de l'obligation dans 9 mois est $104\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}25} = 102{,}71$ \$. De ce fait, la valeur actuelle en cas de défaut à cette date est :

$$(102{,}71 - 40)\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}75} = 60{,}40\ \$$$

Le taux d'intensité de défaut satisfait donc l'équation :

$$(1 - \mathrm{e}^{-0{,}5\lambda_1}) \times 63{,}33 + (\mathrm{e}^{-0{,}5\lambda_1} - \mathrm{e}^{\lambda_1}) \times 60{,}40 = 1{,}50$$

En utilisant le solveur d'Excel, on trouve $\lambda_1 = 2{,}46\ \%$ comme solution.

On traite ensuite le cas de l'obligation à deux ans. Les probabilités de défaut aux dates 3 mois et 9 mois sont connues par l'analyse précédente. Le taux d'intensité de défaut pour la seconde année est calculé de sorte à ce que la valeur actuelle espérée de la perte soit 3,53 \$. On traite de même le cas de l'obligation à trois ans. On obtient des taux d'intensité de défaut pour les années 2 et 3 égaux respectivement à 3,48 % et 3,74 %. Remarquez que ces taux sont très proches de ceux obtenus dans l'exemple 24.1 en utilisant l'équation (24.2). Une feuille de calcul montrant l'ensemble des calculs est disponible sur le site de l'auteur.

Le taux sans risque

Quand on s'appuie sur des prix d'obligations pour déterminer les probabilités de défaut, un des points essentiels est le concept de taux sans risque ou celui d'obligation sans risque. Dans l'équation (24.2), le spread s est l'écart de taux actuariel entre l'obligation corporate et l'obligation sans risque. Dans le tableau 24.3, la valeur de l'obligation sans risque doit être calculée en utilisant le taux sans risque. En pratique, ce sont les obligations d'État qui servent de référence aux traders d'obligations pour déterminer les taux sans risque pertinents dans le problème traité ici (par exemple, la cotation d'une obligation corporate peut être faite directement en spread par rapport à l'obligation d'État de référence).

Comme nous l'avons évoqué à la section 4.3, les traders n'utilisent cependant pas les taux d'État comme référence, car ils sont le plus souvent trop faibles. Les CDS ou *credit default swaps*, brièvement présentés à la section 7.11 et analysés plus en détail au chapitre 25, peuvent aussi être utilisés pour exprimer un spread indépendant du taux sans risque. Un certain nombre de chercheurs ont essayé de déduire les taux sans risque en comparant les taux actuariels d'obligations aux spreads des CDS. En général, on constate que ce taux est de l'ordre de LIBOR – 10 bp [4], ou est très proche du taux OIS.

4. Voir J. C. Hull, M. Predescu et A. White, "The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields and Credit Rating Announcements", *Journal of Banking and Finance*, 28, novembre 2004, 2789-2811.

Tableau 24.3 : Intensité moyenne de défaut (en % par an)

Rating	Intensité de défaut (données historiques)	Intensité de défaut (prix d'obligations)	Ratio	Différence
Aaa	0,028	0,596	21,0	0,568
Aa	0,077	0,728	9,4	0,651
A	0,193	1,145	5,9	0,952
Baa	0,365	2,126	5,8	1,761
Ba	1,792	4,671	2,6	2,879
B	4,898	8,017	1,6	3,119
Caa	7,736	18,395	2,4	10,659

Les swaps d'actifs (*asset swaps*)

En pratique, les cotations des swaps d'actifs sont souvent utilisées par les traders pour extraire des prix d'obligations les probabilités de défaut, sous l'hypothèse que la courbe LIBOR/swap est la courbe sans risque.

Pour montrer comment fonctionnent ces swaps, considérons le cas d'un *asset swap* qui affiche un spread de 150 bp. Trois situations sont envisageables.

1. L'obligation cote sa valeur faciale, par exemple 100. Le swap met en jeu une entreprise, notée A, qui paie le coupon, et une autre, notée B, qui paie LIBOR + 150 bp. Notez que ce sont les coupons attendus qui sont échangés. Les échanges ont lieu indépendamment de la survenance d'un défaut.
2. L'obligation cote moins que sa valeur faciale, par exemple 95. Le swap est alors construit de sorte que, en plus des coupons, l'entreprise A paie 5 $ par tranche de 100 $ de nominal. L'entreprise B paie LIBOR + 150 bp.
3. L'obligation cote plus que sa valeur faciale, par exemple 108. L'entreprise B devrait alors payer 8 $ de principal par tranche de 100 $ de nominal, en plus de LIBOR + 150 bp. L'entreprise A paie les coupons.

Le résultat de tout ceci est que la valeur actuelle liée au spread du swap d'actifs correspond à la différence de prix entre une obligation sans risque et l'obligation risquée de mêmes caractéristiques. Ici, le taux sans risque est supposé égal au taux LIBOR/swap (voir exercice 24.20). Ce résultat est utile pour les calculs tels que ceux effectués dans l'exemple 24.2.

24.5 La comparaison des estimations de probabilités de défaut

Les probabilités de défaut estimées à partir d'historiques de données sont plus faibles que celles déduites des prix d'obligations. La différence était particulièrement élevée pendant la crise de 2007 à cause du phénomène de « fuite vers la qualité », tous les investisseurs recherchant des actifs moins risqués. La conséquence directe fut une baisse

des prix des obligations du secteur privé et donc une hausse de leurs taux actuariels et des spreads de crédit. L'équation (24.2) montre alors que cela entraîne une forte hausse de l'estimation des probabilités de défaut. Nous allons maintenant montrer que ces probabilités de défaut calculées à partir des prix d'obligations étaient bien plus élevées qu'avant la crise de 2007.

Calculons tout d'abord les probabilités de défaut historiques à partir du tableau 24.1 (nous considérons ici le cas des obligations à sept ans, pour des raisons expliquées plus loin). Le calcul des intensités de défaut sur données historiques est fondé sur l'équation (24.1) et sur le tableau 24.1. De l'équation (24.1), on déduit :

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7}\ln\left[1 - Q(7)\right]$$

où $\bar{\lambda}(t)$ désigne l'intensité moyenne du défaut à la date t et $Q(t)$ est la probabilité cumulée de défaut jusqu'à la date t. Les valeurs de $Q(7)$ sont obtenues directement dans le tableau 24.1. Par exemple, pour une entreprise notée A, on a $Q(7)$ = 0,01345. L'intensité moyenne du défaut est alors :

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7}\ln\left(1 - 0{,}01345\right) = 0{,}00193$$

Les calculs fondés sur les prix d'obligations sont déduits de l'équation (24.2) et des taux actuariels et apparaissent dans la troisième colonne du tableau 24.3. Les résultats indiqués ici sont des moyennes sur la période allant de décembre 1996 à juin 2007. Nous nous centrons sur la maturité de sept ans car c'est la durée de vie moyenne des obligations utilisées par Merril Lynch.

Le taux de recouvrement est supposé égal à 40 % et, pour les raisons évoquées dans la section précédente, le taux sans risque considéré est le taux de swap à 7 ans moins 10 bp. Par exemple, pour les obligations notées A, le taux donné par Merrill Lynch est de 5,995 %. Le taux de swap moyen est de 5,408 %, si bien que le taux sans risque retenu est de 5,308 %. Cela conduit à une intensité moyenne du défaut égale à :

$$\frac{0{,}05995 - 0{,}05308}{1 - 0{,}4} = 0{,}0115 = 1{,}15\ \%$$

Le tableau 24.3 montre que le ratio des probabilités calculées selon les deux méthodes tend à décroître quand le rating des entreprises devient moins bon mais que ce ratio est très élevé pour les entreprises les mieux notées. En revanche, la différence des probabilités est une fonction décroissante du rating [5].

Le tableau 24.4 propose une autre approche pour interpréter ces résultats. Il donne les excès de rentabilité (par rapport au taux sans risque défini précédemment) exigés sur les différentes catégories d'obligations. Si on examine à nouveau les obligations notées A, on observe un spread de 111 bp. Ces 111 bp se décomposent en 42 bp constituant la différence entre les obligations d'État et le taux sans risque (taux LIBOR/swap moins

5. Les résultats des tableaux 24.3 et 24.4 sont des actualisations des résultats obtenus dans J. C. Hull, M. Predescu et A. White, "Bond Prices, Default Probabilities and Risk Premiums", *Journal of Credit Risk*, 1 (2), printemps 2005, 53-60.

10 bp), 12 bp couvrant les défauts attendus (ils viennent de la probabilité de défaut calculée à partir des données historiques) et 57 bp représentant l'excès de rentabilité exigé compte tenu du risque.

Tableau 24.4 : Rentabilités en excès du taux sans risque (en bp)

Rating	Spread sur obligations du Trésor	Spread obligations du Trésor et taux sans risque	Spread sur données historiques	Excès de rentabilité
Aaa	78	42	2	34
Aa	86	42	5	39
A	111	42	12	57
Baa	169	42	22	105
Ba	322	42	108	172
B	523	42	294	187
Caa	1 146	42	464	640

Les tableaux 24.3 et 24.4 montrent que des écarts importants entre les probabilités de défaut conduisent en définitive à des écarts assez faibles en termes d'excès de rentabilité lié au risque de défaut perçu. Cet excès de rentabilité tend toutefois à augmenter quand la qualité du crédit diminue [6]. De plus, il n'est pas constant dans le temps. Les spreads de crédit et les excès de rentabilité étaient élevés en 2001, 2002 et jusqu'au milieu de 2003. Ils ont ensuite beaucoup baissé jusqu'au début de la crise, en 2007.

Univers risque-neutre *versus* univers réel

Les probabilités de défaut déduites des spreads de crédit sont des probabilités risque-neutre. Elles peuvent être utilisées pour calculer les cash-flows espérés dans l'univers risque-neutre lorsqu'il y a du risque de crédit. Ils sont ensuite actualisés au taux sans risque. L'exemple 24.2 illustre cette démarche. Plusieurs autres applications de ces principes seront développées au chapitre 25.

Les probabilités de défaut déduites des historiques de données sont des probabilités réelles (parfois qualifiées de « physiques » ou « historiques »). Le tableau 24.3 montre qu'elles sont moins élevées que les probabilités risque-neutre correspondantes. L'excès de rentabilité calculé dans la dernière colonne du tableau 24.4 provient ainsi directement de la différence entre univers risque-neutre et univers réel.

Pourquoi observe-t-on de telles différences entre les probabilités de défaut dans les deux univers ? C'est un peu comme si on se demandait pourquoi les obligations corporate ont un taux actuariel plus élevé que les obligations d'État. On peut évoquer plusieurs arguments.

6. Le résultat des sociétés notées B va cependant à l'encontre de la tendance générale.

Les obligations corporate sont moins liquides que les obligations d'État. C'est donc un facteur de risque supplémentaire, mais les travaux de recherche montrent que c'est insuffisant pour expliquer les résultats du tableau 24.4[7]. Une autre explication possible est que les probabilités de défaut subjectives estimées par les opérateurs de marché peuvent être plus élevées que celles fournies par le tableau 24.1. Celles-ci peuvent en effet intégrer des scénarios extrêmes qui n'apparaissent pas dans les données historiques. Toutefois, cet argument est, lui aussi, insuffisant pour expliquer l'amplitude du spread.

Les défauts ne sont pas indépendants d'une entreprise à l'autre (effet sectoriel, par exemple). C'est la raison essentielle justifiant les résultats des tableaux 24.3 et 24.4. Il existe des périodes où les taux de défaut dans leur ensemble sont importants et d'autres où ils sont faibles. Pour s'en convaincre, il suffit de consulter les données sur plusieurs années. Les statistiques de Moody's montrent qu'entre 1970 et 2009, le taux de défaut a varié de 0,09 % en 1979 à 3,97 % en 2001 et jusqu'à 5,35 % en 2009. Ces variations et ces corrélations impliquent l'existence d'un risque systématique (c'est-à-dire qui ne peut être diversifié), et celui-ci doit être rémunéré (c'est un peu la même logique que celle du CAPM pour les actions – voir annexe du chapitre 3). La variation des taux de défaut dans le temps est aussi due à l'évolution des conditions économiques générales, et des phénomènes de contagion sont susceptibles d'apparaître, le défaut d'une entreprise pouvant entraîner le défaut d'autres entreprises en relation avec elle.

Au-delà du risque systématique, le risque spécifique a, ici aussi, son importance. Avec des actions, on peut l'éliminer par la diversification. Pour des obligations, c'est plus compliqué. En effet, les distributions de probabilité des rentabilités obligataires sont très asymétriques, avec une borne supérieure relativement bien identifiée (par exemple, la rentabilité est de 7 % avec une probabilité de 99,75 % et une rentabilité de -60 % avec une probabilité de 0,025 % correspondant au défaut). Il est ainsi plus difficile de diversifier les risques d'un portefeuille obligataire que ceux d'un portefeuille actions[8]. Cela nécessite la détention d'un très grand nombre d'obligations ; en pratique, les portefeuilles détenus sont très imparfaitement diversifiés. Cela peut conduire les intervenants à exiger une rentabilité supplémentaire pour détenir ces titres.

Quel estimateur de la probabilité de défaut retenir ?

À ce stade de la réflexion, il est naturel de se demander s'il vaut mieux utiliser les probabilités estimées sur données historiques ou les probabilités risque-neutre. La réponse est : cela dépend ! Selon l'objectif de l'analyse, le choix peut être différent. Les probabilités risque-neutre seront utilisées pour l'évaluation des dérivés de crédit et pour étudier l'impact du risque de crédit sur le prix de ces instruments financiers. Quand on cherchera à évaluer les pertes potentielles dans divers scénarios, on utilisera plutôt les probabilités historiques.

7. Voir par exemple J. Dick-Nielsen, P. Feldhütter et D. Lando, "Corporate Bond Liquidity before and after the Onset of the Subprime Crisis", *Working Paper*, Copenhagen Business School, 2010. Ces auteurs utilisent de nombreuses mesures de liquidité sur une base de données très large d'obligations. Ils montrent que la part du spread due à l'illiquidité est relativement faible.

8. Voir J. D. Amato et E. M. Remolona, "The Credit Spread Puzzle", *BIS Quaterly Review*, 5, décembre 2003, 51-63.

24.6 L'utilisation du prix des actions pour estimer les probabilités de défaut

Les approches précédentes sont essentiellement fondées sur le rating des entreprises (tableau 24.1), mais ceux-ci ne sont modifiés qu'épisodiquement. Certains analystes ont cependant fait remarquer que les prix des actions pouvaient fournir des informations pertinentes sur les probabilités de défaut. En 1974, Merton a proposé un modèle dans lequel les actions sont en fait vues comme des options sur les actifs de la société [9]. Pour simplifier, on considère dans ce modèle que la dette de l'entreprise est composée d'une seule obligation zéro-coupon de maturité T. Notons :

V_0 : valeur des actifs de l'entreprise aujourd'hui ;

V_T : valeur des actifs à la date T ;

E_0 : valeur des actions aujourd'hui ;

E_T : valeur des actions en T ;

D : montant de dette (intérêt et principal) à rembourser en date T ;

σ_V : volatilité des actifs ;

σ_E : volatilité des actions.

Si $V_T < D$, il est rationnel pour l'entreprise (du moins en théorie) de faire défaut sur la dette à la date T ; la valeur des actions est nulle dans ce cas. En revanche, si $V_T > D$, l'entreprise rembourse sa dette en T ; la valeur des actions s'écrit donc :

$$E_T = \max(V_T - D\,;0)$$

Les actions sont donc un call sur la valeur des actifs avec un prix d'exercice égal à la valeur de la dette à la date T. La formule de Black et Scholes donne alors la valeur des actions en date 0 :

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2) \tag{24.3}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(V_0/D\right) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)\,T}{\sigma_V\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T}$$

$N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite calculée en x.

La valeur de la dette est aujourd'hui égale à $V_0 - E_0$.

Dans ces conditions, la probabilité que l'entreprise fasse défaut est égale à $N(-d_2)$; en effet :

$$P(V_T < D) = 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$

9. Voir R. Merton, "On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 29, 1974, 449-470.

Le calcul de cette probabilité nécessite V_0 et σ_V, qui ne sont pas directement observables. En revanche, si la société est cotée, E_0 est connue et σ_E peut être estimé. De plus, le lemme d'Itô implique :

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V}\,\sigma_V\,V_0$$

Comme $\frac{\partial E}{\partial V} = N(d_1)$, on a :

$$\sigma_E E_0 = N(d_1)\,\sigma_V\,V_0 \tag{24.4}$$

Les équations (24.3) et (24.4) permettent alors d'estimer simultanément[10] V_0 et σ_V.

■ **Exemple 24.3** Les actions d'une entreprise valent 3 millions d'euros et la volatilité de ces actions est 80 %. La dette de 10 millions d'euros sera remboursée dans un an. Le taux sans risque est 5 %. On a donc E_0 = 3, σ_E = 0,8, r = 0,05 et D = 10. La résolution des équations (24.3) et (24.4) donne $V_0 = 12{,}4$ et σ_V = 0,21230. Le paramètre d_2 est alors égal à 1,1408 et la probabilité de défaut est ainsi de 12,7 %. On obtient une valeur de la dette $V_0 - E_0 = 9{,}40$, alors qu'une dette sans risque équivalente vaudrait $10 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 1} = 9{,}51$. L'espérance de perte sur cette dette est donc $\frac{9{,}51-9{,}40}{9{,}51} = 1{,}2\ \%$ de la valeur de la dette sans risque. Le taux de recouvrement espéré R en cas de défaut (voir équation (24.1)) est solution de :

$$0{,}127 = \frac{1-(9{,}40/9{,}51)}{1-R}$$

c'est-à-dire R = 91 %. Ce taux est aussi égal à (12,7 % − 1,2 %)/12,7 %.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la dette était remboursable à une date unique. En pratique, les remboursements peuvent être étalés dans le temps. La relation entre V_0 et E_0 est alors plus complexe, mais il reste possible d'utiliser l'approche optionnelle pour établir cette relation. La probabilité que l'entreprise fasse défaut peut être évaluée pour différentes dates futures.

Quelle est la performance du modèle de Merton dans l'estimation des probabilités de défaut par rapport aux proportions observées ? Les différences sont importantes entre les deux, mais cette méthode peut néanmoins être utile pour estimer les véritables probabilités de défaut. L'introduction de transformations monotones des probabilités de défaut obtenues par le modèle de Merton peut donner une bonne estimation des probabilités réelles et des probabilités risque-neutre de défaut[11]. Il peut paraître étrange de considérer une probabilité risque-neutre de défaut comme $N(-d_2)$ pour estimer une probabilité réelle de défaut, mais le calibrage qui vient d'être évoqué (transformation monotone) montre que ce qui importe, c'est que l'ordre des probabilités risque-neutre soit le même que celui des probabilités réelles.

10. Pour résoudre les équations non linéaires de la forme $F(x,y)$ = 0 et $G(x,y)$ = 0, on peut utiliser le solveur d'Excel en cherchant à minimiser la somme des carrés des deux fonctions.

11. Moody's KMV propose une telle transformation pour estimer les probabilités réelles. Elle est connue sous le sigle EDF pour *expected default frequency*. CreditGrades utilise le modèle de Merton pour estimer les spreads de crédit, ce qui revient implicitement à estimer les probabilités risque-neutre de défaut.

24.7 Le risque de crédit dans les transactions sur actifs dérivés

Dans cette section, nous expliquons comment le risque de crédit peut-être quantifié dans les transactions bilatérales ne passant pas par un processus centralisé (CCP). De telles transactions sont le plus souvent régies par un accord du type *International Swaps and Derivatives Association (ISDA) Master Agreement.* Une clause importante de ces contrats est le netting. Elle stipule que l'ensemble des transactions entre deux contreparties est considéré comme une transaction unique, dès qu'il s'agit de calculer (a) les paiements à réaliser en cas d'évènement de crédit et (b) les garanties (collatéral) à apporter.

Cet accord-cadre définit de manière précise la survenue d'un événement de crédit. Par exemple, quand une des deux parties (appelée A) ne peut faire un paiement sur un contrat d'actif dérivé ou n'est pas en mesure d'apporter les garanties lorsqu'elles sont requises, c'est un évènement de crédit. L'autre partie peut mettre fin immédiatement à toutes les transactions si elle le souhaite. Il y a deux cas particuliers dans lesquels la partie qui ne fait pas de défaut (que nous appellerons B) a toutes les chances de perdre de l'argent :

1. La valeur totale des transactions est positive pour B et plus importante que le montant des garanties déposées par A ;
2. La valeur totale V des transactions est positive pour A et la valeur des garanties déposées par B est supérieure à V.

Dans le cadre de notre discussion, nous ignorons les coûts de bid-ask spreads supportés par B pour le remplacement des contrats conclus avec A.

CVA et DVA

Les concepts CVA et DVA ont été introduits au chapitre 9. Le CVA (*credit value adjustment*) d'une banque par rapport à une contrepartie est la valeur actuelle du coût espéré de défaut de la contrepartie. Réciproquement, le DVA est la valeur actuelle, pour la contrepartie, du coût espéré de défaut de la banque.

La possibilité de défaut de la banque a une valeur positive pour cette dernière, car un défaut signifierait qu'elle ne réaliserait pas certains des paiements liés à des transactions sur des actifs dérivés. Bien sûr, ce montant constitue un coût pour la contrepartie.

La valeur hors défaut des transactions est calculée en supposant qu'aucune des contreparties ne fait défaut (les modèles d'évaluation comme celui de Black-Scholes Merton font cette hypothèse). Si f_{nd} est la valeur hors défaut, pour la banque, de l'ensemble des transactions avec la contrepartie considérée, la valeur tenant compte du défaut est égale à f_{nd} – CVA + DVA ou CVA et DVA sont estimés comme au chapitre 9. Notons T la durée de vie du plus long contrat entre la banque et la contrepartie et supposons que la période allant jusqu'à T est divisée en N sous-intervalles. Notons q_i la probabilité de défaut entre t_{i-1} et t_i. On estime tout d'abord les spreads de crédit pour un ensemble de maturités et on définit $s(t_i)$ le spread pour la maturité t_i (on utilise une interpolation linéaire si nécessaire). L'équation (24.2) indique que l'intensité de défaut moyenne entre 0 et t_i est égale a $s(t_i)/(1-R)$, où R est le taux de recouvrement attendu si la

contrepartie fait défaut. De l'équation (24.1), on déduit que la probabilité d'absence de défaut jusqu'à la date t_i s'écrit :

$$\exp\left(\frac{-s(t_i)\,t_i}{1-R}\right)$$

On en déduit que :

$$q_i = \exp\left(\frac{-s(t_{i-1})\,t_{i-1}}{1-R}\right) - \exp\left(\frac{-s(t_i)\,t_i}{1-R}\right)$$

q_i^* est calculé de la même manière à partir des spreads de crédit de la banque.

Considérons ensuite le calcul de v_i, en supposant l'absence de garanties. Il faut utiliser une simulation de Monte-Carlo, qui est très consommatrice de temps de calcul. On simule les variables de marché qui déterminent la valeur hors défaut entre 0 et T dans l'univers risque-neutre. Pour chaque tirage, on estime l'exposition de la banque au risque de défaut de la contrepartie au milieu de chaque sous-intervalle. L'exposition s'écrit $\max(V;0)$, où V est la valeur agrégée des transactions. La variable v_i est alors estimée comme la moyenne sur l'ensemble des tirages de ces expositions de la banque. On estime v_i^* de la même manière.

Lorsque l'accord entre la banque et la contrepartie comporte des garanties, le calcul de v_i est plus compliqué. Il faut, à chaque tirage de la simulation, estimer, au milieu de chaque sous-période, le montant de garantie déposé par chaque partie en cas de défaut. Dans ce genre de calcul, on suppose le plus souvent que la partie qui va faire défaut cesse de déposer des garanties c jours avant le défaut effectif (c se situe typiquement entre 10 et 20 jours). Pour calculer l'exposition au risque, il faut donc estimer la valeur agrégée des contrats c jours avant. L'exemple ci-dessous explique comment réaliser cette évaluation.

■ **Exemple 24.4** On considère un accord dans lequel chaque contrepartie doit déposer $\max(V;0)$ où V est la valeur agrégée des contrats pour l'autre partie. On suppose que $c = 20$ jours et on note τ le milieu d'une sous-période sur laquelle la banque calcule le CVA.

1. Supposons que pour un tirage donné de la simulation, la valeur des contrats à la date τ soit de 50, alors qu'elle était, 20 jours plus tôt, égale à 45. Dans ce cas, on garde la valeur 45 pour un défaut en date τ. L'exposition de la banque porte sur la valeur résiduelle hors garanties, à savoir $50 - 45 = 5$.
2. Si, sur un tirage donné, la valeur est de 50 alors qu'elle était, 20 jours plus tôt, égale à 55, l'exposition est considérée comme nulle, car la garantie est suffisante.
3. Si, sur un tirage donné, la valeur des contrats à la date τ est de -50, alors qu'elle était, 20 jours plus tôt, égale à -45, on considère que la banque a déposé une garantie insuffisante, et l'exposition est considérée comme nulle.
4. Enfin, si sur un tirage donné, la valeur est de -50 à la date, alors qu'elle était, 20 jours plus tôt, égale à -55, l'exposition de la banque porte sur l'excès de garanties déposé, à savoir 5.

Au-delà du calcul de la CVA, les banques calculent l'exposition maximale au milieu de chaque sous-période. On considère pour cela la queue de distribution des valeurs obtenues sur l'ensemble des tirages (par exemple au seuil de 97,5 %). Sur 10 000 tirages, on retiendra la 250^{e} exposition lorsque celles-ci sont rangées en ordre décroissant. Le pic d'exposition au risque est alors le maximum des expositions au seuil de 97,5 % obtenues sur l'ensemble des sous-périodes considérées.

Les banques stockent les trajectoires simulées des variables de marché, de sorte à pouvoir évaluer très rapidement l'impact d'une nouvelle transaction sur le CVA et le DVA. Si la nouvelle transaction est positivement corrélée aux transactions existantes, on peut s'attendre à une augmentation du CVA et du DVA. Si la corrélation est négative, CVA et DVA devraient diminuer.

La méthode de calcul présentée plus haut suppose que la probabilité de défaut de la contrepartie est indépendante de l'exposition au risque de la banque. C'est une hypothèse raisonnable la plupart du temps. On dira cependant que le risque est dans le mauvais (bon) sens lorsque la probabilité de défaut est corrélée positivement (négativement) à l'exposition au risque de la banque. Il faut alors recourir à des modèles plus compliqués lorsqu'une telle corrélation intervient.

Les banques ont un CVA et un DVA pour chaque contrepartie. Ces quantités sont gérées de la même façon que d'autres contrats dérivés, avec des analyses de scénarios, des calculs de deltas, etc...

24.8 La réduction du risque de crédit

Il existe plusieurs techniques de réduction du risque de crédit dans les transactions bilatérales.

La première technique, déjà mentionnée, est la compensation (encore appelée *netting*). Les clauses de compensation (*netting*) des contrats établis par les institutions financières peuvent compliquer l'estimation des pertes. Ces clauses stipulent en général que si B fait défaut sur un contrat signé avec A, alors B fait défaut sur tous les contrats en cours avec A. Cette clause peut substantiellement réduire le risque de crédit. En effet, supposons que A ait trois contrats en cours avec B. Les valeurs des trois contrats pour A sont respectivement $+10$, $+30$ et -25 millions d'euros. Les valeurs des contrats sont alors pour B -10, -30 et $+25$ millions. En l'absence de netting, B ferait défaut sur les deux premiers contrats et conserverait le troisième. La perte pour A serait alors de 40 millions. Le netting permet de réduire cette perte à $10 + 30 - 25 = 15$ millions [12].

La seconde possibilité de réduction du risque de crédit à envisager est le « nantissement » (*collateralization*). Dans ce cas, la partie B peut être obligée de garantir sa dette par des actifs ou par un tiers ; si la garantie est supérieure à la valeur absolue de la somme des contrats pour B, le risque de défaut est couvert. Dans l'exemple précédent, avec trois contrats de valeur -10, -30 et $+25$ millions pour B, si B dépose des garanties pour un

12. Notez que si le troisième contrat valait -45 millions au lieu de -25 millions, la contrepartie choisirait de ne pas faire défaut et il n'y aurait pas de perte pour l'institution financière.

montant supérieur à 15 millions, le risque de crédit est couvert. Cette technique suppose un modèle commun d'évaluation des contrats pour les deux parties et un accord sur le taux de rémunération des actifs déposés en garantie. De plus, les garanties déposées doivent être ajustées en permanence, avec la possibilité de dénouer le contrat si une des parties ne peut ajuster le niveau des garanties. En fait, ce système fonctionne sur le même principe que le système d'appels de marge des marchés de contrats futures ou d'options.

Enfin, la dernière possibilité réside dans les clauses de fin du contrat, dans le cas d'une dégradation de la note d'une des deux parties (*downgrade triggers*). Le remboursement effectué par le débiteur est alors inscrit au contrat, ou du moins la formule prédéfinie utilisée pour son calcul. Le risque de crédit n'est pourtant pas éliminé par cette clause. Il peut en effet arriver que le défaut survienne très rapidement, même pour une entreprise préalablement bien notée : il n'est alors pas certain que l'entreprise qui fait défaut soit capable de payer le montant prévu au contrat. De plus, les *downgrade triggers* ne fournissent une relativement bonne protection que si on les utilise avec parcimonie. En effet, si une entreprise conclut trop de contrats de ce type avec ses contreparties, ils risquent d'être peu efficaces, comme le montre l'encadré 24.1.

Encadré 24.1 Les downgrade triggers : le cas d'AIG

AIG est un bon exemple du fonctionnement des clauses de dégradation. En 2008, AIG avait de nombreux contrats d'actifs dérivés en portefeuille par lesquels elle assurait la performance des tranches d'ABS-CDO notées AAA (voir le chapitre 8 pour la description des ABS-CDO). La plupart des contrats d'AIG comportaient une clause par laquelle AIG n'avait pas besoin de déposer des garanties tant que sa notation restait au delà de AA. Le 15 septembre 2008, AIG était dégradé en deçà de ce seuil par Moody's, S&P et Fitch. Les tranches dont AIG avait garanti la performance ne se comportaient pas comme anticipé et AIG fut mis en demeure par de nombreuses contreparties de payer des appels de marge immédiatement. C'était impossible pour AIG de faire face à ces exigences et la faillite ne fut évitée que par une intervention massive du gouvernement américain.

Quelques cas particuliers

Nous traitons ci-après les cas où la simulation de Monte-Carlo n'est pas nécessaire pour ajuster les prix des actifs dérivés au risque de crédit. Considérons un actif dérivé dont la valeur hors défaut aujourd'hui est notée f_{nd}. Notons t_1, t_2, …, t_n les dates possibles de défaut, q_i la probabilité risque-neutre de défaut en date t_i, et enfin R le taux de recouvrement espéré. On a alors :

$$\text{CVA} = (1 - R)\, f_{nd} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Dans cette situation, DVA = 0, de sorte que la valeur f de l'actif dérivé intégrant la possibilité de défaut s'écrit :

$$f = f_{nd} - (1 - R)\, f_{nd} \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{24.5}$$

Un actif tombant dans cette seconde catégorie est une obligation zéro-coupon (payant 1 € à la date T) émise par la contrepartie de la transaction. Notons B_{nd} (respectivement B) la valeur de l'obligation sans (avec) risque de défaut. Si on suppose, pour simplifier, que le taux de recouvrement sur l'obligation en pourcentage de B_{nd} est le même que celui sur l'actif dérivé, on a :

$$B = B_{nd} - (1 - R)\, B_{nd} \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{24.6}$$

Des équations (24.5) et (24.6), on déduit :

$$\frac{B}{B_{nd}} = \frac{f}{f_{nd}}$$

Si y_{nd} désigne le taux actuariel du zéro-coupon sans risque et y le taux actuariel du zéro-coupon émis par la contrepartie, alors $B_{nd} = \mathrm{e}^{-y_{nd}T}$ et $B = \mathrm{e}^{-yT}$, de sorte que le prix de l'actif dérivé s'écrit :

$$f = f_{nd}\, \mathrm{e}^{-(y - y_{nd})\, T}$$

Cet exemple montre qu'un actif dérivé payant un flux unique en T peut être évalué en augmentant le taux d'actualisation de la différence entre le taux risqué y^*et le taux sans risque y.

■ **Exemple 24.5** Considérons une option à deux ans négociée sur le marché OTC dont la valeur (en l'absence de défaut) serait de 3 €. Supposons que la firme qui vend l'option paie 1,5 % de plus que le taux sans risque sur ses zéro-coupon à deux ans. La valeur de l'option est alors $3 \times \mathrm{e}^{-0{,}015 \times 2} = 2{,}91$ €.

Un autre cas particulier peut être illustré comme suit. Supposons qu'une banque ait pris une position longue sur un contrat forward, qui l'engage à acheter l'actif sous-jacent au contrat pour un prix K à une date T. On suppose qu'il n'existe pas de collatéral. Le prix forward de l'actif à la date t est noté F_t. Comme nous l'avons mentionné à la section 5.7, la valeur de la position en t s'écrit :

$$(F_t - K)\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

où r est le taux sans risque (supposé constant).

L'exposition au risque de la banque en date t est alors égale à :

$$\max[(F_t - K)\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\ ;\ 0] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \max[(F_t - K)\ ;\ 0]$$

La valeur présente espérée de F_t est F_0 dans l'univers risque-neutre. L'écart-type de $\ln(F_t)$ est $\sigma\sqrt{t}$, où σ est la volatilité de F_t.

De l'équation (15A.1), on déduit que l'exposition au risque à la date t est égale à :

$$w(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}[F_0\, N(d_1(t)) - KN(d_2(t))]$$

où :

$$d_1(t) = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad d_2(t) = d_1(t) - \sigma\sqrt{t}$$

Il s'ensuit que :

$$v_i = w(t_i)\,\mathrm{e}^{-rt_i}(1-R)$$

■ **Exemple 24.6** Supposons qu'une banque ait pris une position longue sur un contrat forward l'engageant à acheter à une compagnie minière 1 million d'onces d'or dans deux ans à un prix de 1 500 $ l'once. Le prix forward du contrat est aujourd'hui de 1 600 $ l'once. La probabilité de défaut de la compagnie pendant la première année est de 2 %, et de 3 % pour la seconde année. Les défauts ont lieu en milieu d'année, le taux sans risque vaut 5 % et le taux de recouvrement anticipé est de 30 % en cas de défaut. On estime la volatilité du prix forward pour un contrat à deux ans à 20 %. Dans ce cas, $q_1 = 0{,}02$, $q_2 = 0{,}03$, $F_0 = 1\,600$, $K = 1\,500$, $\sigma = 0{,}2$, $r = 0{,}05$, $R = 0{,}3$, $t_1 = 0{,}5$, $t_2 = 1{,}5$.

$$d_1(t_1) = \frac{\ln(1\,600/1\,500) + 0{,}2^2 \times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}5271$$
$$d_2(t_1) = d_1(t_1) - 0{,}2\sqrt{0{,}5} = 0{,}3856$$

Par conséquent :

$$w(t_1) = \mathrm{e}^{-0{,}05\times 1{,}5}[1\,600\, N(0{,}5271) - 1\,500\, N(0{,}3856)] = 135{,}73$$

et :

$$v_1 = w(t_1)\,\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}5}(1-0{,}3) = 92{,}67$$

De la même façon, $w(t_2) = 201{,}18$ et $v_2 = 130{,}65$. Le coût espéré du défaut est donc :

$$q_1 v_1 + q_2 v_2 = 0{,}02 \times 92{,}67 + 0{,}03 \times 130{,}65 \;=\; 5{,}77$$

La valeur hors défaut du contrat forward est $(1\,600 - 1\,500)\ \mathrm{e}^{-0{,}05\times 02} = 90{,}48$. La valeur en tenant compte du défaut est de $84{,}71 = 90{,}48 - 5{,}77$. Cette démarche de calcul peut être étendue au cas où les dates possibles de défaut de la compagnie minière sont plus nombreuses (voir exercice 24.29). Le DVA, qui accroît la valeur du contrat dérivé, peut être calculé de la même façon que le CVA (voir exercice 24.30).

24.9 La corrélation des défauts

L'expression *corrélation des défauts* est utilisée pour traduire la tendance pour deux entreprises distinctes à faire toutes deux défaut dans un intervalle de temps réduit. Les raisons de ce phénomène sont multiples. Deux entreprises du même secteur industriel ou de même localisation géographique sont affectées par des événements semblables et peuvent rencontrer des difficultés financières simultanément du fait de l'occurrence de ces événements. Les conditions économiques générales sont aussi un facteur qui

peut introduire une corrélation positive dans les défauts d'un ensemble d'entreprises. En conséquence, la corrélation des défauts signifie que le risque de crédit ne peut être complètement diversifié et que des phénomènes de contagion peuvent survenir. C'est la raison pour laquelle les probabilités risque-neutre de défaut sont plus élevées que les probabilités réelles (voir section 24.5).

On distingue deux types de modèles de corrélation des défauts [13] : les modèles de forme réduite et les modèles structurels. Dans la première catégorie, les taux d'intensité de défaut sont censés suivre des processus stochastiques corrélés à l'évolution de variables macroéconomiques. Quand l'intensité du défaut pour la société A est élevée, celle de l'entreprise B aura aussi tendance à être élevée ; cette relation induit une corrélation positive des défauts des deux entreprises.

Ces modèles présentent l'avantage de lier les corrélations des défauts aux cycles économiques. Ils peuvent être paramétrés de façon à assurer la cohérence avec les données historiques ou les probabilités risque-neutre de défaut estimées à partir de prix d'obligations. À l'inverse, leur inconvénient majeur est de ne pouvoir reproduire qu'une gamme très limitée de structures de corrélations de défauts. Même si la corrélation est parfaite entre les taux d'intensité des défauts, la corrélation correspondante entre les défauts dans n'importe quelle période de temps reste très faible. Cela peut engendrer des problèmes dans certaines situations. Par exemple, quand deux entreprises opèrent dans le même secteur industriel et dans le même pays, la santé financière de l'une est en général étroitement liée à celle de l'autre. Le problème inhérent à cette modélisation peut cependant être résolu en autorisant des discontinuités (sauts) dans les taux d'intensité de défaut.

Les modèles structurels s'appuient sur une idée analogue à celle de Merton développée à la section 24.6 ; une entreprise fait défaut si sa valeur passe en deçà d'un certain seuil. La corrélation des défauts peut être introduite par la spécification des processus stochastiques qui régissent l'évolution de la valeur des actifs des deux entreprises. L'avantage par rapport aux modèles de forme réduite est que des niveaux élevés de corrélation peuvent être atteints par le paramétrage des processus. La contrepartie de cette souplesse est qu'il n'est en général pas possible de restituer les probabilités de défaut historiques et/ou celles déduites des prix d'obligations.

La copule gaussienne pour modéliser la date de défaut

Le modèle de copule gaussienne est devenu courant pour modéliser la date de défaut. C'est en fait un modèle structurel simple. Il suppose que les firmes finissent toujours par faire défaut et cherche à quantifier le lien entre les dates de défaut de deux ou plusieurs d'entre elles. Ce modèle peut être utilisé avec une probabilité réelle ou une probabilité risque-neutre. La queue de distribution gauche de la date de défaut sous la probabilité réelle peut être estimée à partir des données fournies par les agences de rating comme celles du tableau 24.1. La queue de distribution gauche de la date de défaut sous la

13. La note technique n° 26 sur le site www.pearson.fr présente une mesure de corrélation binomiale utilisée par les agences de rating.

probabilité risque-neutre peut, quant à elle, être estimée à partir des prix d'obligations en utilisant l'approche de la section 24.4.

Notons t_1 et t_2 les dates aléatoires de défaut de deux entreprises 1 et 2 ; ces variables ne sont pas gaussiennes, cependant, si l'on peut trouver des variables x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = N^{-1}(Q_1(t_1))$$

et :

$$x_2 = N^{-1}(Q_2(t_2))$$

x_1 et x_2 sont alors normalement distribuées si Q_1 et Q_2 sont les fonctions de répartition de t_1 et t_2 et si N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Par exemple, le centile 5 % de la distribution de t_1 est transformé en $x_1 = -1{,}645$. Par construction, x_1 et x_2 sont distribuées normalement, centrées et réduites. Le modèle suppose que la distribution jointe est normale bivariée. Cette hypothèse traduit la notion de copule gaussienne. Elle est pratique, puisqu'il suffit de caractériser Q_1, Q_2 et un paramètre de corrélation [14]. Elle peut être étendue à un nombre n d'entreprises, en notant t_i la date de défaut de l'entreprise i. On a donc, de manière générale :

$$x_i = N^{-1}(Q_i(t_i))$$

où Q_i est la fonction de répartition de t_i. Le vecteur des x_i est supposé suivre une loi gaussienne multivariée. La corrélation entre des dates de défauts t_i et t_j est alors mesurée par la corrélation entre x_i et x_j. L'intérêt est de pouvoir estimer la structure des corrélations séparément par rapport aux lois marginales.

■ **Exemple 24.7** Supposons que nous souhaitions simuler les défauts de 10 entreprises dans les cinq années à venir. Les corrélations définies à partir des copules sont toutes égales à 0,2. Les probabilités cumulées de défaut pour chaque entreprise et pour les années 1 à 5 sont respectivement 1 %, 3 %, 6 %, 10 % et 15 %. Quand on utilise une copule gaussienne, on tire un échantillon d'une loi jointe gaussienne pour obtenir les x_i, $i = 1, \ldots, 10$ en tenant compte des corrélations. On convertit ensuite ces valeurs en dates de défaut. Quand la valeur tirée est inférieure à $-2{,}33$ (correspondant à une probabilité inférieure à 1 %), le défaut survient dans la première année. Quand cette valeur est comprise entre $-2{,}33$ et $-1{,}88$ (correspondant à une probabilité de 3 %), le défaut survient la deuxième année, et ainsi de suite. Si la valeur tirée est supérieure à $-1{,}04$, liée à une probabilité de 15 %, on suppose qu'il n'y a pas défaut pendant les cinq années.

Facteurs communs dans la définition des structures de corrélation

Pour éviter de définir de manière individuelle les corrélations entre les x_i, on utilise souvent un modèle à un facteur de la forme :

$$x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2}\, Z_i \tag{24.7}$$

14. En première approximation, la copule gaussienne entre t_i et t_j est souvent supposée égale à la corrélation entre les rentabilités des actions des deux sociétés i et j.

F est un facteur commun qui affecte la probabilité de défaut de toutes les entreprises, alors que les Z_i sont des facteurs spécifiques aux différentes entreprises considérées. Ces variables sont supposées indépendantes et normalement distribuées. Les coefficients a_i sont des nombres compris entre -1 et +1 et la corrélation entre x_i et x_j est égale à $a_i a_j$ [15].

Supposons que la probabilité qu'une firme i fasse défaut à la date T soit égale à $Q_i(T)$. En utilisant le modèle de copule gaussienne, le défaut survient si $N(x_i) < Q_i(T)$ ou $x_i < N^{-1}(Q_i(T))$. L'équation (24.7) implique alors :

$$a_i F + \sqrt{1 - a_i^2}\, Z_i < N^{-1}(Q_i(T))$$

ou encore :

$$Z_i < \frac{N^{-1}(Q_i(T)) - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

Conditionnellement à une valeur F du facteur commun, la probabilité de défaut est donnée par :

$$Q_i(T\,|F) = N\left[\frac{N^{-1}(Q_i(T)) - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right] \tag{24.8}$$

Un cas particulier du modèle gaussien à un facteur est celui où les distributions de probabilité du défaut sont identiques pour tout i et où les corrélations entre x_i et x_j sont les mêmes pour tous les couples (i, j). Supposons $Q_i(T) = Q(T)$ pour tout i et notons ρ la corrélation commune de sorte que $a_i = \sqrt{\rho}$ pour tout i. L'équation (24.8) devient :

$$Q(T\,|F) = N\left[\frac{N^{-1}(Q(T)) - \sqrt{\rho} F}{\sqrt{1 - \rho}}\right] \tag{24.9}$$

24.10 La VaR (*Value at Risk*) de crédit

La VaR de crédit est définie comme la VaR de marché du chapitre 22. Le concept de VaR de crédit répond à la question suivante : quel niveau de perte a une probabilité supérieure à X de ne pas être dépassé dans une période de durée T ? L'horizon T est en général plus long pour la VaR de crédit que pour la VaR de marché. Classiquement, la première a un horizon d'un an, alors que la seconde a un horizon habituel de dix jours.

Considérons une banque possédant un large portefeuille de prêts. Supposons en première approximation que les probabilités de défaut soient identiques pour ces prêts et que les corrélations des différents couples soient égales. Quand on utilise le modèle de copule gaussienne, le membre de droite de l'équation (24.9) est approximativement égal au pourcentage de défauts avant la date T, exprimé en fonction de F. Le facteur F suit une loi normale centrée-réduite. Nous savons alors au niveau de confiance X % que sa valeur sera supérieure à $N^{-1}(1 - X) = -N^{-1}(X)$. Au niveau de confiance de X %, le pourcentage de pertes sur T années sur le portefeuille sera inférieur à $V(X,T)$, où :

$$V(X,T) = N\left[\frac{N^{-1}(Q(T)) + \sqrt{\rho}\, N^{-1}(X)}{\sqrt{1 - \rho}}\right] \tag{24.10}$$

15. Le paramètre a_i est parfois considéré comme un proxy de la corrélation entre la rentabilité de l'action de la société i et la rentabilité d'un indice de marché représentant un portefeuille bien diversifié.

Ce résultat est dû à Vasicek [16]. Comme dans l'équation (24.9), $Q(T)$ est la probabilité de défaut jusqu'à la date T et ρ est la corrélation commune des défauts des différents prêts.

Une estimation grossière de la VaR de crédit au niveau X % et à l'horizon T est donnée par $L(1-R)\,V(X,T)$ où L est la valeur du portefeuille de prêts et R le taux de recouvrement. La contribution d'un prêt particulier de montant L_i à la VaR de crédit est alors $L_i(1-R)\,V(X,T)$. Ce modèle est l'approche qui sous-tend les formules établies par les organismes de régulation pour définir les montants de capitaux couvrant les risques de crédit [17].

■ **Exemple 24.8** Supposons qu'une banque ait une exposition au risque de défaut se montant à 100 millions de dollars US. La probabilité moyenne de défaut à un an est de 2 % et le taux de recouvrement espéré est de 60 %. Le coefficient de corrélation de la copule est estimé à 0,1. Dans ce cas, on a :

$$V(0{,}999\,;\,1) = N\left[\frac{N^{-1}\,(0{,}02) + \sqrt{0{,}1}\,N^{-1}(0{,}999)}{\sqrt{1-0{,}1}}\right] = 0{,}128$$

Au seuil de 99,9 %, le taux de défaut maximum est de 12,8 %. La VaR de crédit à un an au seuil de 99,9 % est alors $100 \times 0{,}128 \times (1-0{,}6) = 5{,}13$ millions.

CreditMetrics

J. P. Morgan a développé une méthode d'évaluation de la VaR de crédit, appelée *CreditMetrics*. Cette technique est fondée sur la simulation des changements de rating des différentes contreparties. Supposons que nous souhaitions estimer la distribution des pertes à l'horizon d'un an ; dans chaque simulation, on tire un échantillon de changements de rating de l'ensemble des contreparties, ainsi qu'un échantillon des variations des variables de marché pertinentes pour l'analyse. L'ensemble des contrats est réévalué, afin de déterminer les pertes liées à ces changements.

L'avantage de cette démarche est que toutes les spécificités des contrats en cours peuvent, en théorie, être intégrées dans l'analyse. Considérons par exemple un contrat avec une contrepartie dont le rating passe subitement de A à BBB, ou plus bas encore. La simulation peut tenir compte de cette évolution sur une base mensuelle. Une condition, indiquant qu'une perte est réalisée si, par exemple, le rating passe de A à une situation de défaut, peut être incluse dans le modèle.

Le tableau 24.5 montre un exemple de données historiques pour les probabilités de changement de rating à un an. Ces données peuvent être utilisées pour la simulation de Monte-Carlo. Par exemple, la probabilité qu'une obligation notée A reste dans cette catégorie après un an est égale à 90,85 %. Elle a une probabilité de faire défaut de 0,06 %

16. Voir O. Vasicek, "Probability of Loss on a Loan Portfolio", *Working Paper*, KMV, 1987.

17. Pour plus de détails, voir J. C. Hull, C. Godlewski et M. Merli, *Gestion du risque et institutions financières*, 3e éd., Pearson, Montreuil, 2013.

pendant cette même période et une probabilité de 0,12 % d'être notée B l'année suivante [18].

Tableau 24.5 : Matrice des probabilités de transition à un an des ratings (en %), 1970-2015

Rating initial	Rating dans un an								
	Aaa	**Aa**	**A**	**Baa**	**Ba**	**B**	**Caa**	**Ca-C**	**Défaut**
Aaa	90,85	8,45	0,61	0,06	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
Aa	0,88	89,62	8,89	0,46	0,07	0,04	0,02	0,00	0,02
A	0,06	2,70	90,85	5,63	0,54	0,12	0,05	0,01	0,06
Baa	0,04	0,17	4,53	90,19	3,95	0,73	0,17	0,02	0,19
Ba	0,01	0,05	0,51	6,73	83,02	7,82	0,74	0,14	1,00
B	0,01	0,04	0,17	0,50	5,35	82,24	7,26	0,63	3,82
Caa	0,00	0,01	0,03	0,13	0,49	8,19	77,93	3,28	9,95
Ca-C	0,00	0,00	0,07	0,00	0,82	3,23	12,41	51,90	31,58
Défaut	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

Source : Moody's Investors Service

Dans le tirage des échantillons, les variations de rating ne peuvent être supposées indépendantes. CreditMetrics propose d'utiliser une copule gaussienne pour modéliser la dépendance entre un grand nombre de contreparties. Ce modèle suggère aussi que la corrélation entre les variables transformées gaussiennes de deux contreparties soit supposée égale à la corrélation entre les rentabilités des actions de ces contreparties avec un modèle comme celui de la section 24.8.

Pour illustrer cette méthode, considérons la simulation des changements de rating de deux sociétés, notées au départ Aaa et Baa, en utilisant la matrice de transition du tableau 24.5. La corrélation des rentabilités des actions est égale à 0,2. On note x et y les variables qui déterminent les nouveaux ratings des deux sociétés. De façon analogue, comme :

$$N^{-1}(0{,}9085) = 1{,}3316$$
$$N^{-1}(0{,}9085 + 0{,}0845) = 2{,}4573$$
$$N^{-1}(0{,}9059 + 0{,}0845 + 0{,}0061) = 3{,}1214$$

l'entreprise Aaa reste à ce niveau de rating si $x < 1{,}3316$. Elle devient Aa dès que $1{,}3316 < x < 2{,}4573$, et devient A si $2{,}4573 < x < 3{,}1214$, etc. Les mêmes calculs pour la seconde entreprise montrent que celle-ci devient Aaa si $y < -3{,}3528$, Aa si $-3{,}3528 < y < -2{,}8627$, et ainsi de suite.

18. La note technique n° 11 sur le site www.pearson.fr explique comment un tableau du type du tableau 24.5 peut être utilisé pour calculer des probabilités de transition avec un horizon de plusieurs années.

Résumé

Il existe des approches variées pour déterminer la probabilité de défaut d'une entreprise pendant une période future donnée. L'une s'appuie sur les prix d'obligations, une autre sur les proportions de défaut observées sur données historiques, une troisième sur les prix des actions. Les probabilités de défaut tirées des prix des obligations sont des probabilités risque-neutre, alors que celles qui sont déduites des données historiques sont des probabilités dans l'univers réel. Ces dernières devraient être utilisées pour les analyses de scénarios et le calcul de la VaR de crédit. Les probabilités risque-neutre devraient être réservées à l'évaluation des actifs dérivés de crédit. En général, ces probabilités risque-neutre sont bien plus élevées que les probabilités réelles.

La perte espérée pour une institution financière (le CVA), associée au risque de défaut d'une contrepartie, peut être réduite en utilisant le netting, c'est-à-dire une clause spécifiant que si une contrepartie fait défaut sur un contrat avec l'institution considérée, alors il y a défaut sur l'ensemble des contrats. L'apport de garanties, sous forme de nantissement ou d'arrêt conditionnel en cas de dégradation de la notation d'une contrepartie, est aussi de nature à réduire le risque de crédit. Le calcul des CVA et DVA nécessite le plus souvent une simulation de Monte-Carlo, très consommatrice de ressources de calcul, afin de déterminer les expositions au risque de défaut des deux contreparties d'une transaction.

La VaR de crédit est définie comme la perte qui ne sera pas, avec un niveau de probabilité donné et pendant une période déterminée, dépassée. Cette quantité peut être définie en tenant compte uniquement des pertes liées aux défauts ou en intégrant simultanément les défauts et les changements de rating. Une façon de calculer cette VaR s'appuie sur les copules gaussiennes pour les dates de défaut, et une méthode alternative est Creditmetrics, qui utilise une copule gaussienne pour les changements de rating.

Références complémentaires

Altman E. I., "Measuring Corporate Bond Mortality and Performance", *Journal of Finance*, 44, 1989, 902-922.

Altman E. I., B. Brady, A. Resti et A. Sironi, "The link between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence and Implications ", *Journal of Business*, 78 (6), 2005, 2203-2228.

Duffie D. et K. Singleton, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", *Review of Financial Studies*, 12, 1999, 687-720.

Finger C. C., "A Comparison of Stochastic Default Rate Models", *Risk Metrics Journal*, 1, novembre 2000, 49-73.

Gregory J., *Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment : A Continuing Challenge for Global Financial Markets*, 2nd ed. Wiley, Chichester, 2012.

Hull J., C. Godlewski et M. Merli, *Gestion du risque et institutions financières*, 3e éd., Pearson, Montreuil, 2013.

Hull J., M. Predescu et A. White, "Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements", *Journal of Banking and Finance*, 28, novembre 2004, 2789-2811.

Kealhofer S., "Quantifying Default Risk I: Default Prediction", *Financial Analyst Journal*, 59 (1), 2003, 30-44.

KEALHOFER S., "Quantifying Default Risk II: Debt Valuation", *Financial Analyst Journal*, 59 (3), 2003, 78-92.

LI D. X., "On Default Correlation: A Copula Approach", *Journal of Fixed Income*, mars 2000, 43-54.

MERTON R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 2, 1974, 449-470.

VASICEK O., "Loan Portfolio Value", *RISK*, décembre 2002, 160-162.

Problèmes et exercices

24.1 Le spread entre une obligation corporate zéro-coupon à 3 ans et son équivalent sans risque de défaut est de 50 points de base. Le taux de recouvrement est de 30 %. Estimez l'intensité moyenne de défaut annuelle sur la période de 3 ans.

24.2 Supposez que, dans le problème 24.1, le spread entre le taux à 5 ans sur une obligation émise par la même société et le taux sans risque correspondant soit de 60 points de base, et que le taux de recouvrement soit toujours de 30 %. Estimez l'intensité moyenne de défaut annuelle sur la période de 5 ans. Qu'implique votre résultat sur l'intensité moyenne de défaut dans les années 4 et 5 ?

24.3 Quelle est la différence entre les probabilités de défaut dans l'univers risque-neutre et dans l'univers réel ? Laquelle devrait-on utiliser pour (a) l'évaluation et (b) l'analyse de scénarios ?

24.4 Comment définit-on habituellement les taux de recouvrement ?

24.5 Expliquez la différence entre le taux d'intensité du défaut et la densité de probabilité de défaut (non conditionnelle).

24.6 Vérifiez que (a) les nombres figurant dans la deuxième colonne du tableau 24.3 sont cohérents avec ceux du tableau 24.1 et (b) les nombres de la quatrième colonne du tableau 24.4 sont cohérents avec ceux du tableau 24.3 si le taux de recouvrement est de 40 %.

24.7 Décrivez le fonctionnement du netting. Une banque a déjà un contrat en cours avec un client. Expliquez pourquoi la signature d'un second contrat peut augmenter ou diminuer le risque de crédit par rapport à cette contrepartie.

24.8 « Le DVA peut améliorer le résultat d'une banque quand celle-ci éprouve des difficultés financières. » Expliquez pourquoi cette affirmation est vraie.

24.9 Expliquez les différences entre le modèle de copule gaussienne pour la date de défaut et CreditMetrics à propos de :

a. la définition d'une perte liée au risque de crédit ;

b. la modélisation des corrélations de défauts.

24.10 Supposez que la courbe LIBOR/swap est plate à 6 % en composition continue et qu'une obligation à 5 ans payant 5 % de taux de coupon annuel (avec des paiements semestriels) cote 90,00. Comment peut-on construire un swap d'actifs sur cette obligation ? Quel spread sur ce swap serait calculé dans ce cas ?

24.11 Montrez que la valeur d'une obligation corporate à coupons est la somme des valeurs des zéro-coupons qui la composent quand le montant exigible par les créanciers en cas de défaut est la valeur de l'obligation sans risque équivalente.

Montrez aussi que ce n'est pas le cas quand le montant exigible est la valeur nominale augmentée du coupon couru.

24.12 Supposez que la courbe LIBOR/swap est plate à 3 % en composition continue et qu'une obligation à 4 ans, payant 4 % de taux de coupon annuel (avec des paiements semestriels), a un taux actuariel de 5 %. Supposez encore que les défauts ne peuvent survenir qu'à la fin de chaque année, immédiatement avant le paiement de coupon, et que le taux de recouvrement est de 30 %. Estimez la probabilité risque-neutre de défaut sous l'hypothèse qu'elle est identique chaque année.

24.13 Une société a émis des obligations à 3 et 5 ans avec un taux de coupon de 4 % payable annuellement. Les taux actuariels continus de ces obligations sont respectivement de 4,5 % et 4,75 %. Le taux sans risque est de 3,5 % en composition continue quelle que soit la maturité. Le taux de recouvrement est de 40 %. Les défauts peuvent survenir au milieu de chaque année. Déterminez Q_1 et Q_2 où Q_1 désigne la probabilité de défaut chacune des années 1 à 3 et Q_2 est la probabilité de défaut pour chacune des années 4 et 5.

24.14 Supposez qu'une institution financière ait conclu un swap dépendant du taux de change dollar US/livre sterling avec une contrepartie X et un swap opposé avec une contrepartie Y. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. La valeur actuelle totale des coûts de défaut est la somme des valeurs actuelles des coûts de défaut des deux swaps.

b. L'exposition au risque dans un an sur les deux contrats est la somme des expositions au risque sur chacun des deux contrats.

c. La borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95 % de l'exposition au risque à un an totale est la somme des bornes supérieures des intervalles de confiance à 95 % des expositions au risque de chacun des deux contrats.

24.15 « Une position longue sur un contrat forward sujet au risque de crédit est la combinaison d'une position courte sur un put sans risque de crédit et d'une position longue sur un call sujet au risque de crédit. » Expliquez cette affirmation.

24.16 Expliquez pourquoi l'exposition au risque de crédit sur un couple de contrats forward opposés ressemble à un straddle.

24.17 Expliquez pourquoi l'impact du risque de crédit sur un couple de swaps de taux opposés est en général moins important que celui d'un couple de swaps de devises opposés.

24.18 « Quand une banque négocie un swap de devises, elle devrait s'arranger pour recevoir la devise à taux d'intérêt faible d'une société ayant un risque de crédit faible. » Expliquez cette affirmation.

24.19 La relation de parité call-put est-elle valide en présence de risque de défaut ? Justifiez votre réponse.

24.20 Supposez que, dans un swap d'actifs, B désigne le prix de marché d'une obligation (en pourcentage du nominal). B^* est la valeur correspondante en l'absence de risque de défaut et V est la valeur actuelle du spread du swap d'actifs (en pourcentage du nominal). Montrez que $V = B^* - B$.

24.21 Montrez que dans le modèle de Merton de la section 24.6 le spread de crédit sur un zéro-coupon d'échéance T est donné par $-ln[N(d_2) + N(-d_1)/L]/T$ avec $L = D\,\mathrm{e}^{-rT}/V_0$.

24.22 Supposez que le spread d'une obligation du secteur privé à trois ans soit de 1 % par rapport à l'obligation sans risque de mêmes caractéristiques. De combien le modèle de Black et Scholes surévalue-t-il une option européenne vendue par l'entreprise ?

24.23 Donnez un exemple (a) de risque dans le bon sens et (b) de risque dans le mauvais sens.

Questions complémentaires

24.24 Les spreads de crédit pour les zéro-coupon de maturité 1 à 5 ans sont respectivement 50, 60, 70, 80 et 87 points de base. Le taux de recouvrement est de 35 %. Estimez le taux d'intensité de défaut chaque année.

24.25 La courbe LIBOR/swap est plate à 3 % en composition continue et une obligation payant semestriellement un coupon de 4 % annuel cote 101. Comment un swap d'actifs sur cette obligation serait-il structuré ? Quel serait alors le spread du swap d'actifs ?

24.26 Une obligation corporate à 3 ans paie un taux de coupon de 7 % (coupon payé semestriellement) et a un taux actuariel de 5 % en composition semestrielle. Les taux sans risque pour toutes les maturités sont de 4 % (aussi en composition semestrielle). Les défauts peuvent survenir tous les six mois, juste avant le paiement des coupons, et le taux de recouvrement est de 45 %. Estimez les probabilités de défaut en supposant que (a) les probabilités non conditionnelles sont identiques à chaque date possible de défaut et (b) les probabilités conditionnelles à l'absence de défaut au préalable sont identiques à chaque date possible de défaut.

24.27 Une société a émis des obligations dont les maturités sont de 1 an et 2 ans, chacune payant un coupon de 8 % (payé annuellement). Les taux actuariels continus de ces obligations sont de 6 % et 6,6 %. Les taux sans risque continus sont égaux à 4,5 % pour toutes les maturités et le taux de recouvrement est de 35 %. Les défauts peuvent survenir au milieu de chaque année. Estimez les probabilités risque-neutre de défaut pour chacune des deux années.

24.28 Expliquez en détail la distinction entre les probabilités de défaut dans les univers réel et risque-neutre. Laquelle est la plus élevée ? Une banque conclut un contrat par lequel elle s'engage à payer 100 € à la fin de l'année 1 si le rating d'une société donnée passe de A à Baa ou moins. Le taux sans risque à un an est de 5 %. En utilisant le tableau 24.5, estimez la valeur du contrat. Quelles hypothèses faites-vous pour cette évaluation ? Celles-ci tendent-elles à sous-évaluer ou surévaluer le contrat ?

24.29 Les actions d'une entreprise valent 4 millions d'euros et la rentabilité de ces titres a une volatilité de 60 %. La dette de 15 millions sera remboursée dans deux ans. Le taux sans risque est de 6 % par an. Utilisez le modèle de Merton pour estimer l'espérance de perte due au défaut éventuel, la probabilité de défaut et le taux de recouvrement dans l'hypothèse d'un défaut. Expliquez pourquoi le modèle de Merton produit un taux de recouvrement élevé. (Indication : utilisez le solveur d'Excel pour cette question.)

24.30 Supposez qu'une banque ait une exposition au risque, pour un certain type de risque, d'un montant de 10 millions d'euros. La probabilité de défaut moyenne à un an est de 1 % et le taux de recouvrement moyen est de 40 %. La corrélation déduite de la copule gaussienne est de 0,2. Estimez la VaR de crédit à un an au seuil de 99,5 %.

24.31 Reprenez l'exemple 24.6 et calculez le CVA quand l'événement de crédit peut survenir au milieu de chaque sous-période. Supposez que la probabilité de défaut est de 0,001667 par mois pendant la première année et de 0,0025 par mois pendant la seconde année.

24.32 Calculez le DVA de l'exemple 24.6. Supposez que le défaut peut survenir au milieu de chaque mois. La probabilité de défaut est supposée égale à 0,001 par mois sur la période de 2 ans.

Chapitre 25

Les dérivés de crédit

Les innovations les plus intéressantes sur les marchés d'actifs dérivés depuis la fin des années 1990 ont été les dérivés de crédit. En 2000, ces produits correspondaient déjà à plus de 800 milliards de dollars US de sous-jacent. Avant la crise de 2007, ce montant avait atteint 50 000 milliards, pour revenir á 12 000 milliards en décembre 2015. Les dérivés de crédit sont des actifs dérivés dont les payoffs dépendent du risque de crédit d'une ou plusieurs entreprises, ou d'un ou plusieurs États. Dans ce chapitre, nous décrivons les produits financiers de ce type et nous présentons les méthodes d'évaluation associées.

Les dérivés de crédit permettent aux entreprises de transférer des risques de crédit, comme les dérivés sur actions ou indices sont des moyens de transfert du risque de marché. Comme nous l'illustrons dans l'encadré 25.1, les banques sont les acheteurs essentiels de protection contre ce risque de crédit et les compagnies d'assurance sont les acteurs les plus importants du côté des vendeurs.

On distingue deux catégories de dérivés de crédit, selon que le sous-jacent est une entité unique ou un panier d'entités (entreprises, institutions financières, États souverains). Le produit le plus répandu dans la première catégorie est le swap de défaut ou CDS (*Credit Default Swap*). Le payoff d'un CDS est déterminé par la capacité du sous-jacent à faire face à ses engagements financiers. Les CDO (*Collateralized Debt Obligations*) sont les dérivés les plus populaires de la seconde catégorie. Pour ces instruments, le sous-jacent est un panier d'obligations, mais les payoffs ont une structure assez complexe car un CDO est divisé en plusieurs tranches achetées par des investisseurs différents. Dans le chapitre 8, nous avons décrit ces instruments quand le sous-jacent est un ensemble de prêts immobiliers. Dans le présent chapitre, nous nous focalisons sur des sous-jacents qui sont des paniers d'obligations du secteur privé ou émises par des États souverains.

Nous débutons par une analyse détaillée des swaps de défaut, puis nous abordons les contrats forward et options sur CDS ainsi que les swaps de rentabilité totale. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous traitons les indices de crédit, les CDS sur paniers, les ABS et les CDO. Les techniques utilisées s'appuient sur celles développées au chapitre 24 pour montrer comment un modèle de copule gaussienne des corrélations de défaut peut être utilisé pour évaluer les tranches de CDO.

Encadré 25.1 Qui supporte le risque de crédit ?

Traditionnellement, les banques supportaient le risque de crédit des prêts qu'elles accordaient. Elles sont cependant devenues réticentes à conserver le risque de crédit de leurs clients. Une des raisons est liée à la réglementation prudentielle et aux exigences de capitaux propres formulées par le régulateur. Celles-ci réduisent la marge bénéficiaire des opérations de prêt. Comme nous l'avons montré à la section 8.1, les banques ont créé des ABS pour transférer le risque de crédit aux investisseurs et ont très largement utilisé ces instruments dans les années 1990 et au début des années 2000.

Mais si les banques sont acheteurs nets de protection contre le risque de crédit, qui est vendeur ? Ce sont les compagnies d'assurances, qui ne sont pas soumises au même système de régulation que les banques et qui, dans certains cas, peuvent trouver intéressant de supporter des risques de crédit, si ceux-ci sont suffisamment rémunérés.

Le résultat est que l'institution qui porte le risque de crédit associé à un prêt est souvent différente de celle qui a prêté l'argent. La crise de 2007 a montré que cette démarche peut être dangereuse pour le système financier dans son ensemble.

25.1 Les swaps de défaut

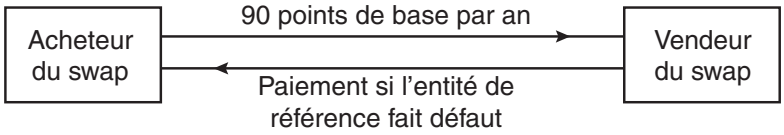
Le dérivé de crédit le plus populaire est le swap de défaut, que nous noterons CDS dans la suite. C'est un contrat qui procure une assurance contre le défaut éventuel d'une entreprise donnée. L'entreprise en question est appelée *entité de référence* et la survenance d'un défaut, *aléa de crédit*. L'acheteur de l'assurance acquiert le droit de vendre une obligation particulière (appelée *obligation de référence*), émise par l'entité de référence, à sa valeur nominale[1] (qualifiée de *principal*) en cas d'occurrence d'un aléa de crédit.

L'acheteur du CDS paie au vendeur des montants convenus, à intervalles réguliers, jusqu'à l'échéance du CDS, ou bien jusqu'à la survenance d'un aléa de crédit. Dans ce dernier cas, un ultime paiement est effectué par l'acheteur. Le swap est alors dénoué, soit par livraison du sous-jacent, soit en cash.

Un exemple aidera le lecteur à comprendre la structure du produit. Supposons que, le 20 mars 2015, deux entreprises signent un contrat de swap de défaut sur un principal de 100 millions d'euros pour cinq ans. L'acheteur s'engage à payer 90 points de base par an, avec des paiements trimestriels, pour être protégé contre le défaut de l'entité de référence. Si celle-ci ne fait pas défaut, l'acheteur ne reçoit rien, mais paie 22,5 bp

1. La valeur nominale (ou valeur faciale) est le montant que l'émetteur rembourse au souscripteur à l'échéance quand il n'y a pas de défaut.

(un quart de 90 bp) de 100 millions d'euros le 20 juin 2015, puis chaque trimestre jusqu'au 20 mars 2020. Ce montant trimestriel est donc de 225 000 €[2]. Le CDS est décrit sur le graphique 25.1.



Graphique 25.1 : Swap de défaut

Si un aléa de crédit survient, l'acheteur reçoit un montant substantiel. Supposons qu'il notifie au vendeur un aléa de crédit le 20 mai 2018 (soit deux mois après le début de la 4^{e} année). Si le contrat spécifie la livraison du sous-jacent, l'acheteur a le droit de livrer 100 millions de nominal de l'obligation de référence et reçoit en échange 100 millions d'euros en cash. S'il est prévu un dénouement en cash et si le prix milieu de fourchette (dans le cadre d'une enchère organisée par l'ISDA) de l'obligation de référence est 35 € pour 100 € de nominal, le vendeur paiera à l'acheteur 65 millions d'euros.

Dans tous les cas, l'acheteur doit payer au vendeur les 90 points de base au prorata de la durée écoulée entre le dernier paiement et la date de l'aléa de crédit (paiement résiduel). Dans notre exemple, le défaut a lieu le 20 mai, l'acheteur devra donc payer pour deux mois, c'est-à-dire 150 000 €.

Le montant payé chaque année, en pourcentage du principal (90 bp dans l'exemple), est appelé *spread du CDS*. Plusieurs grandes banques jouent le rôle de market makers sur ce marché. Par exemple, une banque peut proposer une fourchette 250-260 (en points de base) sur le risque de défaut d'une entreprise donnée. Cela signifie qu'elle est prête à acheter une protection contre le risque de défaut en payant 250 bp sur le principal, mais qu'elle exige 260 bp pour fournir cette protection.

De nombreuses grandes entreprises sont des entités de référence pour des CDS. La maturité la plus courante est de cinq ans, mais il existe aussi des maturités d'un, deux, trois, sept ou dix ans. Les dates d'échéance les plus courantes sont les 20 mars, 20 juin, 20 septembre et 20 décembre. Cela implique que la durée n'est pas toujours exactement égale à celle annoncée. Supposons que vous soyez prêt à acheter une protection à cinq ans contre un risque de crédit le 15 novembre 2015. L'échéance du contrat sera sans doute le 20 décembre 2020, et votre premier paiement surviendra le 20 décembre 2015 et couvrira la période du 15 novembre au 20 décembre[3].

Un point clé des contrats de CDS est la définition d'un aléa de crédit. En général, il s'agit soit de l'incapacité de l'entité de référence à faire face à un paiement à l'échéance prévue, soit de la restructuration de la dette, soit de la faillite. La restructuration est parfois exclue des contrats en Amérique du Nord, notamment dans les cas où le taux actuariel des obligations de l'entité de référence est élevé. Une information plus détaillée sur les marchés de CDS est présentée dans l'encadré 25.2.

2. Le montant peut être légèrement différent selon la convention de décompte des jours utilisée (voir chapitre 6).

3. Si la durée jusqu'à la première date de paiement est inférieure à un mois, ce paiement est en général reporté à la seconde date, c'est-à-dire trois mois plus tard.

Encadré 25.2 Le marché des CDS

En 1998 et 1999, l'ISDA (International Swaps and Derivatives Association) a développé un contrat standard pour le trading des CDS sur le marché OTC. Depuis, ce marché s'est développé très rapidement. Ce contrat ressemble à un contrat d'assurance, avec toutefois une différence essentielle. Un contrat d'assurance procure une protection contre la dévalorisation d'un actif qui est détenu par l'assuré (assurance incendie, par exemple). Pour les CDS, point n'est besoin de détenir les obligations de l'entité de référence pour acquérir cette protection.

Pendant la crise du crédit qui a débuté en 2007, les régulateurs ont eu à gérer un risque susceptible de se révéler systémique (voir encadré 1.2). Ils ont perçu que les CDS étaient une source de vulnérabilité pour le système financier dans son ensemble. Le danger est évidemment celui de la contagion, le défaut d'une entité entraînant des pertes importantes chez ses contreparties du marché des CDS. Le cas typique illustrant ce problème est l'assureur AIG, qui était un vendeur de protection important (sur des sous-jacents comme les prêts immobiliers des particuliers). Cette activité s'est avérée ruineuse pour l'entreprise qui a dû être sauvée (nationalisée) par l'État. Suite à ces événements, des chambres de compensation des CDS ont été créées. Elles exigent des contreparties et des dépôts de marge, comme cela se pratique sur les marchés de futures.

En 2007 et 2008, de nombreux marchés OTC d'actifs dérivés ont pratiquement stoppé toute activité, mais les transactions sur le marché des CDS ont perduré (même si le coût des protections a considérablement augmenté).

L'avantage des CDS par rapport à d'autres dérivés de crédit réside dans leur simplicité de fonctionnement. En effet, certains actifs dérivés, comme ceux résultant de la titrisation des prêts immobiliers (voir chapitre 8) n'ont pas la même transparence.

Il n'est pas rare que le volume de CDS sur une entreprise donnée soit plus élevé que le montant de sa dette. Il va de soi que, dans ce cas, un dénouement en cash s'impose. Quand Lehman Brothers a fait faillite en septembre 2008, il y avait environ 400 milliards de dollars US de CDS sur le marché, alors que la dette totale avoisinait les 150 milliards de dollars US. Le taux de paiement aux acheteurs de protection (déterminé par un système d'enchères) fut de l'ordre de 91,375 % du principal.

Une différence importante entre les CDS et d'autres types d'actifs dérivés dont les sous-jacents sont des taux d'intérêt, des taux de change ou des indices, est qu'il n'y a pas de raison de croire que certains opérateurs ont une information privilégiée sur les variables de marché. Il n'en est pas de même concernant la probabilité de défaut d'une entreprise. Par exemple, une banque qui collabore étroitement avec une entreprise aura une meilleure évaluation de la probabilité de défaut de cette société qu'une banque qui n'a pas de relations particulières avec l'entreprise. Nous sommes ici face à un problème d'asymétrie d'information.

CDS et taux actuariels

Un CDS peut être utilisé pour couvrir une position sur une obligation corporate. Supposons qu'un investisseur ait acheté une obligation à 5 ans avec un taux de coupon de 7 % pour sa valeur nominale et qu'il ait conclu en même temps un CDS à 5 ans pour se protéger contre un défaut éventuel de l'émetteur de l'obligation. Le spread du CDS est supposé égal à 200 bp, soit 2 % par an. Schématiquement, l'effet de ce CDS est de transformer l'obligation corporate en une obligation sans risque (de défaut). Si l'obligation ne fait pas défaut, l'investisseur aura obtenu une rentabilité de 5 % par an (en net). Si un défaut survient, l'investisseur aura réalisé une rentabilité de 5 % jusqu'à la date de défaut, et, par le CDS, il sera à même d'échanger l'obligation contre sa valeur nominale. Celle-ci pourra ensuite être investie pour le reste des cinq années, par exemple au taux sans risque.

Ce raisonnement montre que le spread d'un CDS à n années sur une obligation du secteur privé doit être approximativement égal à l'écart de taux actuariel entre cette obligation corporate et l'obligation sans risque de caractéristiques équivalentes. En conséquence, les spreads de CDS donnent aussi une indication sur les taux sans risque utilisés par les opérateurs de marché. Par ailleurs, nous avons vu dans la section 24.4 que le taux sans risque moyen est à peu près égal au taux LIBOR/swap, de sorte que la différence de taux actuariel entre l'obligation corporate et l'équivalent sans risque est le spread du swap d'actifs correspondant.

La base entre le CDS et l'obligation est alors définie comme suit :

$$\begin{aligned}\text{Base} = &\text{ Spread du CDS}\\ &- \text{Excès de rentabilité de l'obligation par rapport au taux sans risque}\end{aligned}$$

L'argument d'arbitrage évoqué ci-dessus suggère que cette base devrait être proche de 0. Avant la crise de 2007, cette base était légèrement positive. Pendant la crise, elle est devenue légèrement négative, et même largement négative pendant une courte période en janvier 2009.

L'obligation la moins chère à livrer

Comme nous l'avons montré dans la section 24.3, le taux de recouvrement en cas de défaut est défini comme la valeur de l'obligation immédiatement après l'incident de crédit, en pourcentage de la valeur nominale. Par conséquent, le paiement engendré par le CDS s'écrit $L(1-R)$ où L est le principal et R le taux de recouvrement.

En général, un CDS spécifie qu'en cas de défaut plusieurs obligations peuvent être livrées. Ces obligations ont la même priorité mais pas nécessairement la même valeur juste après le défaut [4]. Cela donne au détenteur du CDS l'option de choisir l'obligation

4. Il y a de nombreuses raisons à cela. L'exigence du souscripteur en cas de défaut correspond à la valeur faciale de l'obligation, à laquelle s'ajoute le coupon couru. Par conséquent, les obligations qui ont un coupon couru élevé tendent à avoir un prix plus élevé immédiatement après le défaut. Il est aussi possible que le marché juge qu'en cas de réorganisation certaines obligations (et donc certains obligataires) seront mieux traitées que d'autres.

la moins chère à livrer. Comme nous l'avons déjà mentionné, une procédure d'enchère est organisée par l'ISDA pour déterminer la valeur de l'obligation la moins chère à livrer et, par voie de conséquence, le paiement reçu par l'acheteur de protection.

25.2 L'évaluation des CDS

Les milieux de fourchette des spreads de CDS sur des entités de référence individuelles (c'est-à-dire la moyenne des spreads bid et ask des CDS cotés par les intermédiaires) peuvent être évalués à partir des estimations des probabilités de défaut. Nous allons illustrer cela par un exemple.

Supposons que l'intensité de défaut d'une entité de référence est de 2 % par an pour toute la durée de vie du CDS, qui est de 5 ans. Le tableau 25.1 montre les probabilités de survie et les probabilités de défaut non conditionnelles (c'est-à-dire vues de la date 0) pour chacune des cinq années. La probabilité de défaut la première année est de 0,02 et, de ce fait, la probabilité de survie est de $\mathrm{e}^{-0,02} = 0,9802$. La probabilité de survie sur deux (trois) ans est $\mathrm{e}^{(-0,02\times 2)} = 0,9608$ ($\mathrm{e}^{(-0,02\times 3)} = 0,9418$). On en déduit une probabilité de défaut la deuxième année égale à $0,9802 - 0,9608 = 0,0194$ et à :

$$0,9608 - 0,9418 = 0,0190$$

la troisième année.

Tableau 25.1 : Probabilités de défaut non conditionnelles et probabilités de survie

Maturité	Probabilité de défaut	Probabilité de survie
1	0,0198	0,9802
2	0,0194	0,9608
3	0,0190	0,9418
4	0,0186	0,9224
5	0,0183	0,9039

Nous allons supposer que les défauts ne peuvent survenir qu'en milieu d'année et que les paiements du CDS sont réalisés une fois par an, en fin d'année. Le taux sans risque (LIBOR) est supposé égal à 5 % en composition continue et le taux de recouvrement est de 40 %. Les trois parties du calcul sont données dans les tableaux 25.2, 25.3 et 25.4.

Le tableau 25.2 illustre le calcul de la valeur actuelle espérée des paiements sur le CDS en supposant que ces paiements représentent un pourcentage égal à s pour une unité de nominal. La probabilité que le troisième paiement soit réalisé est de 0,9418. L'espérance de ce paiement particulier est donc $0,9418\,s$ et sa valeur actuelle est égale à :

$$0,9418 \times s \times \mathrm{e}^{-0,05\times 3} = 0,8106\,s$$

La valeur actuelle espérée de l'ensemble des paiements est en fait égale à $4,0728\,s$.

Tableau 25.2 : Valeur actuelle espérée des paiements sur le CDS (paiement s par an)

Maturité	Probabilité de survie	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
1	0,9802	$0{,}9802\,s$	0,9512	$0{,}9324\,s$
2	0,9608	$0{,}9608\,s$	0,9048	$0{,}8694\,s$
3	0,9418	$0{,}9418\,s$	0,8607	$0{,}8106\,s$
4	0,9231	$0{,}9231\,s$	0,8187	$0{,}7558\,s$
5	0,9048	$0{,}9048\,s$	0,7788	$0{,}7047\,s$
Total				$4{,}0728\,s$

Le tableau 25.3 montre le calcul de la valeur actuelle espérée du payoff reçu en cas de défaut, toujours pour un nominal d'une unité. Comme nous avons supposé que les défauts survenaient en milieu d'année, il y a par exemple une probabilité 0,0190 de recevoir un paiement au milieu de la troisième année. Étant donné que le taux de recouvrement est de 40 %, la valeur actuelle espérée du montant à recevoir (toujours pour une unité de nominal) à cette date s'écrit :

$$0{,}0190 \times 0{,}6 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 2{,}5} = 0{,}0101$$

Selon ce mode de calcul, la valeur actuelle espérée du montant total reçu (payoff) en cas de défaut est 0,0506.

Tableau 25.3 : Valeur actuelle espérée du paiement en cas de défaut (pour une unité de nominal)

Date	Probabilité de défaut	Taux de recouvrement	Paiment espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0198	0,4	0,0119	0,9753	0,0116
1,5	0,0194	0,4	0,0116	0,9277	0,0108
2,5	0,0190	0,4	0,0114	0,8825	0,0101
3,5	0,0186	0,4	0,0112	0,8395	0,0094
4,5	0,0183	0,4	0,0110	0,7985	0,0088
Total					0,0506

Le tableau 25.4 illustre l'étape finale du calcul et donne les montants résiduels à payer sur le CDS en cas de défaut. Par exemple, il y a une probabilité de 0,0190 qu'un paiement soit réalisé au milieu de la troisième année. Il est égal à $0{,}5\,s$ puisque ce paiement concerne une demi-année. Sa valeur actuelle espérée est donc :

$$0{,}0190 \times 0{,}5 \times s \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 2{,}5} = 0{,}0084\,s$$

Le cumul de ces montants pour toutes les dates donne $0{,}0422\,s$.

Tableau 25.4 : Valeur actuelle espérée du paiement résiduel en cas de défaut (pour une demi-année)

Date	Probabilité de défaut	Paiement résiduel espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0198	$0{,}0099\,s$	0,9753	$0{,}0097\,s$
1,5	0,0194	$0{,}0097\,s$	0,9277	$0{,}0090\,s$
2,5	0,0190	$0{,}0095\,s$	0,8825	$0{,}0084\,s$
3,5	0,0186	$0{,}0093\,s$	0,8395	$0{,}0078\,s$
4,5	0,0183	$0{,}0091\,s$	0,7985	$0{,}0073\,s$
Total				$0{,}0422\,s$

Des tableaux 25.2 et 25.4, on déduit :

$$4{,}0728\,s + 0{,}0422\,s = 4{,}1150\,s$$

Du tableau 25.3, on déduit que la valeur actuelle espérée du payoff du CDS est 0,0506. Le spread s doit donc vérifier :

$$4{,}1150\,s = 0{,}0506$$

On obtient alors $s = 0{,}0123$, soit 123 bp par an.

Les calculs réels sont souvent plus complexes que dans cet exemple, car les paiements ont souvent une périodicité inférieure à l'année et le « rythme » des défauts peut être plus important (ici, ils ne peuvent survenir qu'une fois par an).

Le marking-to-market d'un CDS

Au moment de sa négociation, la valeur d'un CDS, comme celle de la plupart des swaps, est proche de 0. Par la suite, elle peut devenir positive ou négative. Supposons par exemple que le CDS traité précédemment ait été initialement négocié pour 150 bp. La valeur actuelle des paiements pour l'acheteur est donc égale à $4{,}1150 \times 0{,}0150 = 0{,}0617$, alors que la valeur espérée du payoff en cas de défaut reste toujours 0,0506. La valeur du swap pour le vendeur serait alors $0{,}0617 - 0{,}0511$, soit 0,0111 fois le montant de principal. De même, la valeur de la protection acquise par l'acheteur du CDS aurait la valeur opposée, c'est-à-dire $-0{,}0111$ fois le montant de principal.

L'estimation des probabilités de défaut

Les probabilités de défaut utilisées pour l'évaluation d'un CDS doivent être des probabilités risque-neutre et non des probabilités réelles (voir section 24.5). Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 24, l'estimation de ces probabilités peut se faire à l'aide des prix d'obligations ou des swaps d'actifs. Une alternative consiste à les déduire

des cotations de CDS. Cette démarche est similaire à celle qui consiste à calculer les volatilités implicites sur les marchés d'options, à partir des cotations de calls et de puts.

Supposons que nous modifiions l'exemple traité dans les tableaux 25.2 à 25.4 de sorte que nous ne connaissions pas les probabilités de défaut. En revanche, nous disposons de la cotation de milieu de fourchette du spread d'un CDS qui vient d'être émis avec une durée de cinq ans. Supposons que cette cotation soit de 100 bp.

Les calculs précédents peuvent être faits « à l'envers » en utilisant le solveur d'Excel. Nous obtiendrions alors une probabilité de défaut de 1,63 % par an (conditionnellement à l'absence de défaut préalable).

Le logiciel DerivaGem peut aussi être employé pour calculer une structure par termes des intensités de défaut à partir d'une structure par termes des spreads de CDS, et *vice versa*.

Le swap de défaut digital

Les swaps digitaux sont structurés comme les CDS à ceci près que le payoff en cas de défaut est fixé dès le départ. Si, dans les tableaux 25.1 à 25.4, nous avions supposé un paiement de 1 \$, au lieu de $1 - R$ \$, avec un spread de s, les tableaux 25.1, 25.2 et 25.4 seraient inchangés, mais le tableau 25.3 serait remplacé par le tableau 25.5.

Tableau 25.5 : Valeur actuelle espérée du paiement en cas de défaut pour un swap digital sur un principal de 1 dollar

Date	Probabilité de défaut	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0198	0,0198	0,9753	0,0193
1,5	0,0194	0,0194	0,9277	0,0180
2,5	0,0190	0,0190	0,8825	0,0168
3,5	0,0186	0,0186	0,8395	0,0157
4,5	0,0183	0,0183	0,7985	0,0146
Total				0,0844

Le spread de ce CDS digital serait alors solution de :

$$4{,}1150\, s = 0{,}0844$$

ce qui donne $s = 0{,}0205$, c'est-à-dire 205 bp.

L'importance du taux de recouvrement

Que nous utilisions les spreads de CDS ou les prix d'obligations pour estimer les probabilités de défaut, une estimation du taux de recouvrement est nécessaire. Cependant,

à condition que nous retenions le même taux de recouvrement pour (a) estimer les probabilités risque-neutre de défaut et (b) évaluer un CDS, la valeur de ce CDS est peu sensible au taux de recouvrement. Cela est dû au fait que les probabilités de défaut implicites sont proportionnelles à $1/(1-R)$ et que les payoffs du CDS en cas de défaut sont proportionnels à $1-R$.

Cet argument ne s'applique plus au CDS digital puisque le paiement en cas de défaut est constant. En conséquence, dès que l'on observe les spreads pour un CDS standard et pour un CDS digital de mêmes caractéristiques, on peut estimer simultanément le taux de recouvrement et les probabilités de défaut (voir exercice 25.25).

25.3 Les indices de crédit

Les opérateurs des marchés de dérivés de crédit ont construit des indices permettant de suivre les spreads des CDS. En 2004, les principaux producteurs d'indices ont opéré une certaine harmonisation, ce qui conduit aujourd'hui à l'utilisation des indices suivants :

1. Les indices CDX NA IG qui évaluent les spreads de crédit d'un portefeuille de 125 firmes d'Amérique du Nord de la catégorie « investissement » ;
2. Les indices iTraxx Europe, qui évaluent les spreads de crédit d'un portefeuille de 125 firmes européennes de la catégorie « investissement ».

Ces portefeuilles sont revus les 20 mars et 20 septembre de chaque année. Les firmes qui ne sont plus dans la catégorie investissement sortent de l'indice et sont remplacées par de nouvelles [5].

Ces indices fournissent une information sur les risques de crédit et offrent la possibilité aux opérateurs de marché d'acheter ou de vendre des portefeuilles de CDS. Par exemple, une banque d'investissement qui joue le rôle de market maker sur ce marché peut proposer une fourchette 65-66 bp. Un investisseur peut alors acheter pour 800 000 $ de CDS à cinq ans sur chacune des 125 firmes suivies pour 660 000 $ par an. Il peut aussi vendre cette protection à cinq ans sur chacune des 125 entreprises pour 650 000 $. Si une des entreprises fait défaut, le paiement annuel est réduit de 660 000 $/125 = 5 280 $.

Un marché actif existe pour les maturités 3, 5, 7 et 10 ans. Les dates de maturité sont en général les 20 juin et 20 décembre (un contrat à cinq ans dure en fait entre 4,75 et 5,25 ans). De manière schématique, l'indice est une moyenne des spreads des CDS sur les firmes qui le composent [6].

5. Le 20 septembre 2016, la série 26 iTraxx Europe et la série 27 CDX NA IG ont été définies. Les numéros de séries (26 et 27) signifient que le premier indice (iTraxx Europe) a déjà été modifié 25 fois et le second (CDX NA IG) 26 fois.

6. L'indice est légèrement inférieur à la moyenne des spreads de CDS pour les entreprises du portefeuille. Pour en comprendre la raison, considérons deux entreprises, la première caractérisée par un spread de 1 000 bp et la seconde par un spread de 10 bp. Acquérir une protection contre le risque de crédit de ces deux entreprises coûterait un peu moins de 505 bp. Cela est dû au fait que l'on s'attend à payer moins longtemps les 1 000 bp que les 10 bp, ce qui revient à moins pondérer le spread élevé.

25.4 L'utilisation de coupons fixes

La réalité des transactions sur CDS et sur indices de CDS est un peu plus compliquée que ce qui a été décrit précédemment. Un taux de coupon et un taux de recouvrement sont spécifiés pour chaque sous-jacent et chaque maturité. Le prix est calculé à partir du spread coté de la manière suivante.

1. On suppose quatre paiements par an à terme échu.
2. Une intensité de défaut est déduite du spread coté. Les calculs sont du type de ceux réalisés dans la section 25.2.
3. On calcule une duration D pour les paiements du CDS. C'est le nombre par lequel il faut multiplier le spread pour obtenir la valeur actuelle des paiements (dans la section 25.2, on obtenait 4,1150).
4. Le prix P est obtenu par la formule $P = 100 - 100 \times D \times (S - C)$, où S est le spread et C le coupon en format décimal.

Quand un trader achète de la protection, il paie $100-P$ pour 100 \$ de nominal restant et le vendeur reçoit ce montant. Si $100-P$ est négatif, les flux monétaires vont dans l'autre sens. L'acheteur paie ensuite le produit du coupon par le nominal restant à chaque date de paiement. Pour un CDS, le nominal restant est le nominal total jusqu'à la date de défaut, et zéro ensuite. Pour un indice, le nominal restant correspond à la somme des nominaux des entités qui n'ont pas encore fait défaut. Le payoff en cas de défaut est calculé de la manière habituelle. Cet arrangement facilite les échanges car les paiements trimestriels de l'acheteur de protection sont indépendants du spread à la date à laquelle l'acheteur prend position.

■ **Exemple 25.1** On suppose que l'indice iTraxx Europe cote 34 bp et que le coupon est de 40 bp pour un contrat de cinq ans, les deux cotations étant exprimées en base 30/360 (choix usuel sur ce marché). Les équivalents en base Exact/Exact sont respectivement 34,4 bp et 40,6 bp. On fait en outre l'hypothèse que la courbe des taux est plate au niveau de 4 % par an (base Exact/Exact en composition continue). Le taux de recouvrement est de 40 %. Avec quatre paiements par an, l'intensité de défaut implicite est de 0,5717 % et la duration est de 4,447 années. Par conséquent, le prix est donné par :

$$P = 100 - 100 \times 4{,}447 \times (0{,}00345 - 0{,}00406) = 100{,}27$$

Considérons maintenant un contrat pour lequel la protection est de un million par entité. Au départ, le vendeur paie à l'acheteur $1\,000\,000 \times 125 \times 0{,}0027$ \$. Ensuite, l'acheteur de protection paiera au vendeur $1\,000\,000 \times 0{,}00406 \times n$ \$ (sur une base annuelle, mais avec des paiements trimestriels), où n est le nombre d'entités n'ayant pas encore fait défaut. Quand un défaut survient, le payoff est calculé de la manière usuelle, mais l'acheteur doit un paiement résiduel au vendeur correspondant à la durée entre le paiement précédent et la date de défaut au taux de 0,406 % sur le nominal de un million.

25.5 Les CDS forward et les options sur CDS

Dès que le marché des CDS s'est développé, il est devenu naturel pour les traders de négocier des contrats forward sur CDS et des options sur ces mêmes contrats[7].

Un CDS forward est un contrat qui engage à acheter ou à vendre un CDS donné à une date future T fixée sur une entité de référence donnée. Si l'entité de référence fait défaut avant la date T, le contrat forward cesse d'exister. Par exemple, une banque peut conclure un contrat l'engageant à vendre une protection contre le risque de défaut d'une entreprise pour 280 points de base, débutant dans un an. Si l'entreprise fait défaut dans l'année qui vient, les obligations de la banque liées au sous-jacent de ce contrat forward sont annulées.

Les options sur CDS sont des options dont le payoff à l'échéance dépend du spread de crédit d'une entité de référence donnée. Par exemple, une banque peut acheter une option lui donnant le droit d'acheter une protection contre le risque de défaut d'une entreprise donnée pour 280 points de base, dans un an. Il s'agit alors d'un call. Si le spread de crédit de l'entreprise dans un an est supérieur à 280 bp, la banque exerce l'option, sinon elle l'abandonne. Le coût de l'option est payé immédiatement. Les principes sont identiques pour les puts sur CDS.

Ces options sont conçues comme les contrats forward ; elles cessent donc d'exister si l'entité de référence fait défaut pendant la durée de vie de l'option.

25.6 Les swaps de défaut sur panier d'obligations

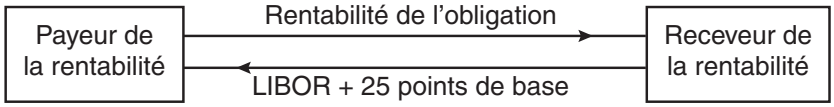
Dans un CDS sur panier d'obligations, il y a plusieurs entités de référence. Un CDS *add-up* engendre un payoff lorsqu'un aléa de crédit affecte n'importe quelle obligation du panier. Ce contrat est donc équivalent à un portefeuille de CDS classique. À l'inverse, un CDS contingent au premier défaut (*first-to-default*) engendre un seul et unique payoff (de la part du vendeur) à la première survenance d'un aléa de crédit d'une des obligations du panier. Le swap cesse d'exister après cet événement. Un CDS contingent au second défaut (*second-to-default*) engendrera un payoff quand le deuxième défaut survient et, plus généralement, un CDS contingent au k-ième défaut engendrera un payoff au k-ième défaut. Ces payoffs sont calculés de la même façon que pour un CDS standard. L'opération est dénouée lorsque le défaut correspondant survient. Il n'y a plus de flux par la suite.

25.7 Les swaps de rentabilité totale

Un swap de rentabilité totale (*total return swap*) est un contrat d'échange de la rentabilité totale d'une obligation ou d'un autre titre de référence contre le LIBOR plus un spread. La rentabilité totale comprend les coupons et les gains/pertes en capital sur l'actif pendant la durée de vie du swap.

7. L'évaluation de ces contrats est analysée dans J. C. Hull et A. White, "The Valuation of Credit Default Swap Options", *Journal of Derivatives*, 10 (5), printemps 2003, 40-50.

Par exemple, considérons un swap de rentabilité totale durant 5 ans sur 100 millions de principal, conduisant à l'échange de la rentabilité d'une obligation de taux de coupon 5 % contre LIBOR + 25. Ce swap est illustré dans le graphique 25.2. Aux dates de paiement de coupon, le payeur paie le coupon de l'obligation et reçoit LIBOR + 25 (le LIBOR est déterminé à la date de paiement précédente comme pour un swap de taux vanille).



Graphique 25.2 : Swap de rentabilité totale

À la fin de la vie du swap, il y a un paiement qui reflète le changement de valeur de l'obligation. Si la valeur de l'obligation a augmenté de 10 % pendant la durée de vie du swap, le payeur fera un versement de 10 millions. À l'inverse, si la valeur de l'obligation a perdu 15 %, c'est le receveur qui devra payer 15 millions. Si l'émetteur de l'obligation fait défaut, le swap se termine par un paiement du receveur égal à la différence entre le principal et la valeur de marché de l'obligation.

Si l'on ajoute le principal des deux côtés à la fin de la durée de vie du swap, on peut caractériser le swap de rentabilité totale de la façon suivante. Le payeur paie les cash-flows sur un investissement de 100 millions d'euros dans une obligation corporate de taux de coupon 5 %. Le receveur paie les cash-flows sur une obligation à taux variable sur la base de LIBOR + 25. Si le payeur détient l'obligation, le swap de rentabilité totale lui permet de transférer le risque de crédit sur le receveur. S'il ne la possède pas, le swap lui permet de prendre l'équivalent d'une position courte sur l'obligation.

Les swaps de rentabilité totale sont généralement utilisés comme des moyens de financement. Le scénario le plus probable conduisant au swap du graphique 25.2 est le suivant. Le receveur souhaite financer un investissement de 100 millions dans l'obligation de référence. Il contacte le payeur (en principe une institution financière) et les deux parties concluent le swap. Le payeur investit alors 100 millions dans l'obligation. Cette opération laisse le receveur dans la position dans laquelle il se serait trouvé s'il avait emprunté l'argent à LIBOR + 25 pour acheter l'obligation. Le payeur garde la propriété des titres pendant la durée de vie du swap, mais a réduit son exposition au risque vis-à-vis du receveur, par rapport à ce qu'elle aurait été s'il avait directement prêté les 100 millions. Les swaps de rentabilité totale ressemblent donc aux Repo présentés à la section 4.1, dans le sens où ils minimisent le risque de crédit en cas de prêt.

Si l'on suppose que le payeur et le receveur sont exempts de risque de crédit, la valeur du swap pour le receveur devrait être la différence de valeur entre un investissement de 100 millions dans l'obligation de référence et un investissement de 100 millions dans une obligation payant LIBOR + 25. La valeur est bien sûr l'opposé pour le payeur. Comme la valeur de l'investissement dans l'obligation de référence est de 100 millions, de même que la valeur de l'obligation à taux variable (LIBOR), on pourrait s'attendre à ce qu'il n'y ait pas de spread.

En pratique, le payeur exige un spread pour compenser le risque de défaut du receveur. Par conséquent, ce spread dépend du risque de crédit du receveur, de celui de l'émetteur de l'obligation de référence et de la corrélation entre les deux.

D'autres contrats présentent des caractéristiques voisines, mais différentes. Dans certains cas, les variations de valeur de l'obligation de référence peuvent engendrer des paiements périodiques, ou le dénouement du swap peut se faire par la livraison du sous-jacent.

25.8 Les CDO

Nous avons discuté des ABS au chapitre 8. Le graphique 8.1 montrait une structure simplifiée. Un ABS dont les sous-jacents sont des obligations est appelé CDO (*Collateralized Debt Obligation*). Le principe de cascade expliqué au graphique 8.2 s'applique aux paiements du principal et des intérêts. Les règles précises régissant cette cascade peuvent être compliquées, mais elles sont définies de façon à assurer que si une tranche a une priorité supérieure à une autre, la probabilité que les paiements de cette tranche soient faits est plus élevée, qu'il s'agisse des intérêts ou du principal.

Les CDO synthétiques

Les CDO décrits au chapitre 8 et rappelés ci-dessus sont appelés *cash* CDO car les sous-jacents sont des obligations. En revanche, un CDO synthétique consiste à revendre non pas un portefeuille d'obligations, mais un portefeuille de CDS à des tiers. Le risque des CDS est ainsi transféré aux acquéreurs des tranches du CDO synthétique.

Le structureur du CDO synthétique choisit un portefeuille d'entreprises et une maturité (cinq ans, par exemple) pour la structuration. Il vend des CDS sur chaque entreprise du portefeuille avec la maturité définie au préalable. Les flux reçus par le structureur correspondent aux spreads des CDS et les flux sortants sont consécutifs à un aléa de crédit d'une des entités du portefeuille. Les tranches du CDO synthétique sont définies et les différents flux des CDS individuels sont affectés aux tranches du CDO synthétique. Les règles déterminant les cash-flows des CDO synthétiques sont en fait plus simples que celles des cash CDO. Supposons qu'un CDO synthétique comporte trois tranches : equity, mezzanine et senior. Les règles peuvent être les suivantes.

1. La tranche equity supporte les cash-flows sortants jusqu'à ce qu'ils atteignent 5 % du principal du CDO synthétique. Cette tranche reçoit un spread de 1 000 bp par an sur le principal.
2. La tranche mezzanine supporte les cash-flows sortants au-delà de 5 % et jusqu'à 20 % du principal. Elle reçoit un spread de 100 bp par an.
3. La tranche senior supporte les cash-flows sortants au-delà de 20 %. Elle reçoit un spread de 10 bp par an.

Pour mieux comprendre comment ce produit fonctionne, considérons un principal de 100 millions de dollars US. Les tranches equity, mezzanine et senior correspondent respectivement à des principaux de 5 millions de dollars US, 15 millions de dollars US

et 80 millions de dollars US. Elles reçoivent les spreads initialement définis sur ces montants. Supposons qu'au bout d'un an, les cash-flows sortants dus à des défauts se montent à 2 millions de dollars US. C'est la tranche equity qui supportera cette perte. Son principal ne sera plus que de 3 millions de dollars US. Si, l'année suivante, 4 millions de dollars US supplémentaires sont perdus à cause des défauts, le principal de la tranche equity atteint 0 et celui de la tranche mezzanine est réduit de 1 million de dollars US. Il passe donc à 14 millions de dollars US.

Contrairement aux cash CDO, qui supposent un investissement initial de la part des détenteurs pour financer les obligations sous-jacentes, les CDO synthétiques n'engendrent pas de flux initial. Acheteurs et vendeurs doivent seulement être d'accord sur la façon dont les cash-flows entrants et sortants seront distribués. Les acheteurs doivent déposer comme collatéral le principal de la tranche. Quand des défauts relatifs à une tranche surviennent, les cash-flows correspondants sont pris sur ce collatéral. Ce dernier est rémunéré au taux LIBOR.

Le trading de tranches isolées

Dans un CDO synthétique tel qu'il a été décrit, les détenteurs de tranches vendent de la protection à l'émetteur du CDO qui, à son tour, vend de la protection sur les CDS à d'autres opérateurs du marché. Une des innovations financières sur ce marché a été le trading de tranches de CDO synthétiques sans création d'un portefeuille de CDS sous-jacent. On parle alors de trading de tranches isolées (*single tranche trading*). Il y a bien sûr deux contreparties à chaque transaction : l'acheteur de protection sur une tranche et le vendeur de protection correspondant. Le portefeuille de positions courtes sur les CDS est utilisé comme référence pour définir les cash-flows des deux contreparties, mais ce portefeuille n'est pas réellement constitué. L'acheteur de la protection paie le spread de la tranche au vendeur et le vendeur paie les montants correspondant aux pertes potentielles sur le portefeuille de référence de CDS sur lequel les tranches s'appuient.

À la section 25.3, nous avons discuté des indices CDX NA IG et iTraxx Europe. Le marché utilise ces portefeuilles pour définir des tranches standardisées de CDO.

Dans le cas de l'indice CDX NA IG, la tranche la plus risquée supporte les pertes entre 0 % et 3 % du principal. La deuxième tranche couvre les pertes entre 3 % et 7 %. Les tranches suivantes couvrent les intervalles de 7 % à 10 %, de 10 % à 15 %, de 15 % à 30 % et de 30 % à 100 %. Pour l'indice iTraxx, la première tranche couvre aussi l'intervalle de 0 % à 3 %, la tranche mezzanine de 3 % à 6 %. Les autres tranches vont respectivement de 6 % à 9 %, de 9 % à 12 %, de 12 % à 22 % et de 22 % à 100 %.

Le tableau 25.6 montre les cotations milieu de fourchette pour les tranches iTraxx à 5 ans, à trois dates séparées d'un an. Le spread de l'indice est le coût d'achat, en points de base, de la protection sur l'ensemble des entités de l'indice, comme nous l'avons décrit à la section 25.3. Il faut noter que la première tranche (0-3 %) est cotée de manière différente. La cotation pour l'indice iTraxx signifie que le vendeur de la protection reçoit un paiement initial de 10,34 % du principal le 31 janvier 2007, plus un spread de 500 bp par an.

Tableau 25.6 : Cotations pour les tranches à cinq ans sur l'iTraxx Europe. Les cotations sont en bp sauf pour la tranche 0-3 %, pour laquelle la cotation égale le pourcentage de principal qui doit être payé, auquel il faut ajouter 500 bp.

	Tranche					
Date	0-3 %	3-6 %	6-9 %	9-12 %	12-22 %	**iTraxx (index)**
31 janvier 2007	10,34 %	41,59	11,95	5,60	2,00	23
31 janvier 2008	30,98 %	316,90	212,40	140,00	73,60	77
30 janvier 2009	64,28 %	1185,63	606,69	315,63	97,13	165

Source : Creditex Group Inc.

25.9 Rôle de la corrélation dans les CDS sur panier d'obligations et les CDO

Le spread de crédit d'un CDS sur panier d'obligations correspondant au n-ième défaut ou le taux de rémunération d'une tranche de CDO dépendent de manière cruciale de la corrélation des défauts. Supposons qu'un portefeuille de 100 entités de référence soit utilisé dans un CDS n-ième défaut à 5 ans, et que chaque entité de référence ait une probabilité risque-neutre de défaut de 2 % pendant les 5 ans. Quand la corrélation des défauts est nulle, la loi binomiale indique que la probabilité qu'un ou plusieurs défauts surviennent dans les 5 ans est de 86,74 % et que la probabilité qu'au moins 10 défauts surviennent est de 0,0034 %. Un CDS premier défaut a donc une valeur importante alors qu'un CDS 10-ième défaut ne vaut pratiquement rien.

Quand la corrélation des défauts augmente, la probabilité d'au moins un défaut diminue, alors que la probabilité d'au moins 10 défauts augmente. Si, à la limite, les défauts sont parfaitement corrélés, la probabilité d'au moins un défaut sera égale à la probabilité d'au moins 10 défauts. Dans cette situation extrême, c'est comme si toutes les entités de référence étaient identiques ; soit elles font toutes défaut, soit aucune ne fait défaut.

L'évaluation d'une tranche de CDO synthétique dépend de la même façon de la corrélation des défauts. Si la corrélation est faible, la première tranche est très risquée et la dernière est pratiquement sans risque. Quand la corrélation augmente, la première tranche devient moins risquée et les suivantes le deviennent plus. En cas de corrélation parfaite, toutes les tranches présentent le même risque.

25.10 L'évaluation des CDO synthétiques

Les CDO synthétiques peuvent être évalués à l'aide du logiciel DerivaGem. Pour expliquer la technique utilisée, supposons que les dates de paiement sur un CDO synthétique soient $\tau_1, \tau_2 \ldots, \tau_m$ et que $\tau_0 = 0$. Soit E_j le principal espéré de la tranche à la date τ_j et $v(\tau)$ la valeur actuelle de 1 $ reçu à la date τ. Notons s le spread sur une tranche donnée (c'est-à-dire le nombre de points de base payé par an pour l'achat de la protection). La

valeur actuelle espérée des paiements sur le CDO est alors égale à sA, où A est défini par :

$$A = \sum_{j=1}^{m} (\tau_i - \tau_{i-1})\, E_j\, v(\tau_j) \tag{25.1}$$

La perte espérée entre deux dates successives est égale à $E_j - E_{j-1}$. Supposons que cette perte apparaisse au milieu de l'intervalle de temps $[\tau_{j-1}; \tau_j]$. La valeur espérée des paiements du CDO s'écrit alors :

$$C = \sum_{j=1}^{m} (E_{j-1} - E_j)\, v\left(\frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i-1})\right) \tag{25.2}$$

Le paiement partiel dû pour les demi-périodes (puisque les pertes ont lieu en milieu de période) a une valeur actuelle sB où B est égal à :

$$B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\tau_i - \tau_{i-1})(E_{j-1} - E_j) v\left(\frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i-1})\right) \tag{25.3}$$

La valeur de la tranche pour l'acheteur de protection est égale à $C - sA - sB$. Le spread d'équilibre est obtenu quand la valeur actuelle des paiements est égale à la valeur actuelle des montants reçus, c'est-à-dire $C = sA + sB$, ce qui correspond à :

$$s = \frac{C}{A + B} \tag{25.4}$$

Les équations (25.1) à (25.3) montrent le rôle essentiel joué par le montant espéré du principal de la tranche à chaque date dans le calcul du spread d'équilibre. Si ces montants espérés peuvent être estimés, on évalue le spread par les équations (25.1) à (25.3) à l'aide d'une courbe de taux zéro-coupon, qui fournit les coefficients d'actualisation.

L'utilisation d'une copule gaussienne pour modéliser la date de défaut

Le modèle de copule gaussienne à un facteur a été introduit à la section 24.9. C'est devenu le modèle standard pour évaluer les CDO synthétiques. Chaque entité a la probabilité $Q(t)$ de faire défaut à la date t. L'équation (24.9) transforme une probabilité non conditionnelle de défaut à la date t en une probabilité conditionnelle à la valeur du facteur commun F sous la forme :

$$Q(t\,|F\,) = N\left[\frac{N^{-1}\left(Q(t)\right) - \sqrt{\rho}\,F}{\sqrt{1-\rho}}\right] \tag{25.5}$$

ρ est le coefficient de corrélation de la copule, supposé identique pour toutes les paires d'entités de référence.

Dans le calcul de $Q(t)$, il est habituel de supposer que le taux d'intensité de défaut est constant et cohérent avec le spread de l'indice. On peut donc utiliser la méthode de la section 25.2 pour calculer cette probabilité à partir du spread de l'indice. Notons λ le taux d'intensité de défaut ; de l'équation (24.1), on déduit :

$$Q(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{25.6}$$

Des propriétés de la loi binomiale, on déduit la probabilité qu'il y ait exactement k défauts jusqu'à la date t, conditionnellement à la valeur de F. Elle s'écrit :

$$P(k,t|F) = \frac{n!}{k!(n-k)!} Q(t|F)^k (1 - Q(t|F))^{n-k} \tag{25.7}$$

où n est le nombre d'entités de référence. Supposons qu'une tranche donnée couvre les pertes entre deux taux α_L et α_H. Le premier, α_L, est appelé point d'attachement et le second, α_H, point de détachement. Notons $n_L = \frac{\alpha_L n}{1-R}$ et $n_H = \frac{\alpha_H n}{1-R}$ où R est le taux de recouvrement. Notons encore $m(x)$ le plus petit entier plus grand que x. Sans perte de généralité, considérons un principal de tranche égal à 1. Ce principal reste inchangé tant que le nombre de défauts, k, est inférieur à $m(n_L)$. Il devient nul lorsque le nombre de défauts devient supérieur ou égal à $m(n_H)$. Entre ces deux valeurs, le principal de la tranche vaut :

$$\frac{\alpha_H - k(1-R)/n}{\alpha_H - \alpha_L}$$

Définissons $E_j(F)$ le principal espéré de la tranche à la date τ_j, conditionnellement à la valeur de F. Il s'ensuit que :

$$E_j(F) = \sum_{k=0}^{m(n_L)-1} P(k,\tau_j|F) + \sum_{k=m(n_L)}^{m(n_H)-1} P(k,\tau_j|F) \, \frac{\alpha_H - k(1-R)/n}{\alpha_H - \alpha_L} \tag{25.8}$$

Notons $A(F)$, $B(F)$, et $C(F)$ les valeurs de A, B et C conditionnées par F. Comme aux équations (25.1) à (25.3), on a :

$$A(F) = \sum_{j=1}^{m} (\tau_i - \tau_{i-1}) \, E_j(F) \, v(\tau_j) \tag{25.9}$$

$$B(F) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (\tau_i - \tau_{i-1}) \, [E_{j-1}(F) - E_j(F)] \, v\left(\frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i-1})\right) \tag{25.10}$$

$$C(F) = \sum_{j=1}^{m} [E_{j-1}(F) - E_j(F)] \, v\left(\frac{1}{2}(\tau_i + \tau_{i-1})\right) \tag{25.11}$$

Comme le facteur F est supposé normalement distribué, il faut intégrer $A(F)$, $B(F)$ et $C(F)$ par rapport à cette distribution pour obtenir les valeurs non conditionnelles correspondantes. Une fois ces valeurs obtenues, on peut calculer le spread d'équilibre $C/(A+B)$ comme à l'équation (25.3) [8].

L'intégration est réalisée en général par quadrature gaussienne, en utilisant l'approximation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-F^2/2} \, g(F) \, dF = \sum_{k=1}^{M} w_k g(F_k) \tag{25.12}$$

Quand M augmente, la précision de l'approximation s'accroît. Les valeurs de w_k et F_k pour différentes valeurs de M sont données sur le site www.pearson.fr [9]. La valeur

8. Pour la tranche equity, il faut ajouter 500 points de base à la cotation pour définir le « vrai prix ».

9. Les valeurs de w_k et F_k sont calculées à partir de racines de polynômes d'Hermite. La technique de quadrature gaussienne est expliquée à la note technique n° 21 sur le site www.pearson.fr.

de M est le double du nombre de « points d'intégration » utilisé dans DerivaGem. Avec 20 points, les résultats obtenus sont déjà très satisfaisants.

■ **Exemple 25.2** Considérons la tranche mezzanine de l'iTraxx Europe cinq ans, quand la corrélation est de 0,15 et le taux de recouvrement de 40 %. Dans ce cas, $\alpha_L = 0{,}03$, $\alpha_H = 0{,}06$, n =125, $n_L = 6{,}25$ et $n_H = 12{,}5$. On suppose que la structure par termes des taux est plate à 3,5 % avec des paiements trimestriels et que le spread du CDS sur l'indice est de 50 bp. Un calcul analogue à celui de la section 25.2 montre que le taux d'intensité de défaut (constant) est de 0,83 % (en composition continue). Un extrait des calculs est donné dans le tableau 25.7. On pose $M = 60$ dans l'équation (25.12). Les valeurs des facteurs F_k et des poids w_k apparaissent dans la partie supérieure du tableau. Les valeurs espérées des principaux des tranches, conditionnelles aux valeurs des facteurs, sont calculées à l'aide des équations (25.9) à (25.11) et apparaissent dans la deuxième partie du tableau. Les trois parties suivantes donnent les valeurs de A, B, C, calculées en intégrant $A(F)$, $B(F)$, $C(F)$ sur la loi de F. Ces résultats sont obtenus en remplaçant tour à tour $g(F)$ par $A(F)$, $B(F)$ et $C(F)$ dans l'équation (25.12). On obtient alors :

$$A = 4{,}2846, \quad B = 0{,}0187, \quad C = 0{,}1496$$

Le spread d'équilibre de la tranche est égal à $0{,}1496/(4{,}2846 + 0{,}0187) = 0{,}0348$, soit 348 bp.

Ce résultat peut être obtenu avec DerivaGem. La feuille de calcul CDS permet de convertir le spread de 50 bp en taux d'intensité de défaut de 0,83 %. On peut ensuite utiliser la feuille CDO avec ce taux d'intensité du défaut en retenant 30 points d'intégration.

Évaluation d'un CDS n-ième défaut

Un CDS n-ième défaut peut être évalué par la méthode standard en conditionnant par rapport à F. La probabilité que le n-ième défaut survienne entre T_1 et T_2 est alors égale à $P(n,T_2|F) - P(n,T_1|F)$. Cette relation donne la distribution de probabilité du n-ième défaut, conditionnellement à la valeur de F. En intégrant par rapport à la distribution de F, on obtient la distribution non conditionnelle de la date du n-ième défaut. Quand cette distribution est obtenue, on évalue le CDS n-ième défaut comme un CDS classique (voir section 25.2).

■ **Exemple 25.3** Considérons un portefeuille de dix obligations avec des probabilités de défaut définies dans le tableau 25.1, et supposons que nous souhaitions évaluer un CDS « troisième défaut » avec paiements annuels à terme échu. La corrélation de la copule est de 0,3, le taux de recouvrement de 40 % et les taux sans risque pour toutes les maturités sont de 5 %. Comme dans le tableau 25.7, nous utilisons 60 valeurs différentes pour le facteur commun. Les probabilités de défaut cumulées pour les années 1 à 5 sont respectivement de 0,0198 ; 0,0392 ; 0,0582 ; 0,0769 ; 0,0952.

Tableau 25.7 : Évaluation du CDO de l'exemple 25.2 avec un principal égal à 1 ; les paiements sont indiqués par unité de spread

Poids et valeurs des facteurs						
w_k	...	0,1579	0,1579	0,1342	0,0969	...
F_k	...	0,2020	−0,2020	−0,6060	−1,0104	...
Principal espéré $E_j(F_k)$						
Date						
$j = 1$	...	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j = 19$	...	0,9953	0,9687	0,8636	0,6134	...
$j = 20$	...	0,9936	0,9600	0,8364	0,5648	...
Valeur espérée du paiement $A(F_k)$						
$j = 1$	...	0,2478	0,2478	0,2478	0,2478	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j = 19$	...	0,2107	0,2051	0,1828	0,1299	...
$j = 20$	...	0,2085	0,2015	0,1755	0,1185	...
Total	...	4,5624	4,5345	4,4080	4,0361	...
Valeur espérée du paiement résiduel $B(F_k)$						
$j = 1$	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j = 19$	...	0,0001	0,0008	0,0026	0,0051	...
$j = 20$	...	0,0002	0,0009	0,0029	0,0051	...
Total	...	0,0007	0,0043	0,0178	0,0478	...
Valeur espérée du payoff $C(F_k)$						
$j = 1$	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$j = 19$	...	0,0011	0,0062	0,0211	0,0412	...
$j = 20$	...	0,0014	0,0074	0,0230	0,0410	...
Total	...	0,0055	0,0346	0,1423	0,3823	...

L'équation (25.5) montre que, conditionnellement à $F = -1{,}0104$, ces probabilités de défaut sont 0,0361 ; 0,0746 ; 0,1122 ; 0,1484 et 0,1830. Les propriétés de la loi binomiale impliquent que les probabilités conditionnelles de survenance d'au moins trois défauts aux années 1 à 5 sont respectivement 0,0047 ; 0,0289 ; 0,0593 ; 0,0829 et 0,0960. L'analyse menée à la section 25.2 montre que les paiements, réguliers et résiduels, ainsi que les payoffs conditionnés à $F = -1{,}0104$ sont respectivement égaux à 0,1379, $3{,}8443\,s$, $0{,}1149\,s$, où s est le spread. Des calculs analogues pour

les 59 autres valeurs de F permettent d'utiliser l'équation (25.12) pour l'intégration. Les valeurs présentes non conditionnelles des payoffs, des paiements réguliers et résiduels sont alors 0,0629, $4{,}0581\,s$ et $0{,}0524\,s$. Le spread d'équilibre du CDS est donc 0,0629/(4,0580+0,0524) = 0,0153, soit 153 points de base.

La corrélation implicite

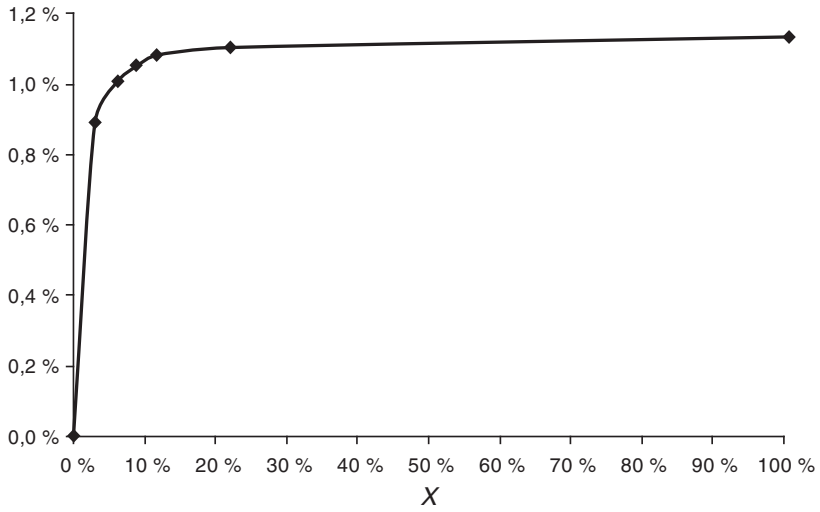
Dans le modèle standard, le taux de recouvrement est en général supposé égal à 40 %. Le seul paramètre inconnu est donc la corrélation ρ. Le modèle est alors analogue à celui de Black et Scholes, dans la mesure où un seul paramètre est inconnu dans ce dernier, à savoir la volatilité. Par conséquent, les opérateurs de marché peuvent déduire une corrélation implicite des cotations des tranches, comme ils déduisent une volatilité implicite des cotations d'options. Notons $\{\alpha_0,\alpha_1\}, \{\alpha_1,\alpha_2\}, \{\alpha_2,\alpha_3\}, \ldots$ les valeurs successives de $\{\alpha_L,\alpha_H\}$ avec $\alpha_0 = 0$. Par exemple pour l'iTraxx, on a :

$$\alpha_1 = 0{,}03\ ;\ \alpha_2 = 0{,}06\ ;\ \alpha_3 = 0{,}09\ ;\ \alpha_4 = 0{,}12\ ;\ \alpha_5 = 0{,}22\ ;\ \alpha_6 = 1{,}00$$

Il y a deux mesures possibles pour la corrélation. La première est la corrélation composée. Pour une tranche donnée $\{\alpha_{q-1},\alpha_q\}$, c'est la valeur de la corrélation qui donne comme prix de la tranche le prix de marché. Elle est obtenue par un calcul itératif. La seconde est la corrélation de base. Pour une valeur donnée de α, par exemple α_q, c'est la valeur de la corrélation telle que la tranche $\{0,\alpha_q\}$ est évaluée en cohérence avec les prix de marché. Cette corrélation est obtenue en appliquant les étapes suivantes.

1. Calcul de la corrélation composée pour chaque tranche.
2. Calcul de la valeur actuelle de la perte espérée sur chaque tranche pendant la durée de vie du CDO, en pourcentage du principal initial de la tranche correspondante. C'est la variable C définie précédemment. Notons C_q cette valeur pour la tranche $\{\alpha_{q-1}, \alpha_q\}$.
3. Calcul de la valeur espérée de la perte sur la tranche $\{0, \alpha_q\}$ en pourcentage du principal total du portefeuille sous-jacent, c'est-à-dire $\sum_{p=1}^{q} C_p(\alpha_p - \alpha_{p-1})$.
4. La valeur de C pour la tranche $\{0,\alpha_q\}$ est donc la valeur calculée à l'étape 3 divisée par α_q. La valeur de la corrélation de base est alors celle qui est en cohérence avec cette valeur C. Elle est donc obtenue à l'issue d'un calcul itératif.

Le graphique 25.3 illustre ce que l'on obtiendrait pour la valeur actuelle de la perte sur le portefeuille sous-jacent de l'iTraxx en utilisant les cotations du 31 janvier 2007 données dans le tableau 25.6. Les corrélations implicites correspondantes sont données dans le tableau 25.8. Les calculs ont été faits à l'aide de DerivaGem en supposant une structure par termes des taux plate à 3 % et un taux de recouvrement de 40 %. La feuille de calcul CDS montre que le spread de 23 bp correspond à un taux d'intensité de défaut de 0,382 %. Les corrélations implicites sont calculées à l'aide de la feuille CDO. On peut aussi obtenir les valeurs permettant de construire le graphique 25.3 avec cette feuille de calcul en utilisant la formule de l'étape 3 ci-dessus.



Graphique 25.3 : Valeur actuelle de la perte espérée sur la tranche 0-X % en pourcentage du principal total du sous-jacent pour l'iTraxx en date du 31 janvier 2007

Les structures de corrélations du tableau 25.8 sont caractéristiques de celles qu'on observe en général. La corrélation composée présente un « smile ». Quand on va des tranches junior vers les tranches senior, elle décroît d'abord et croît ensuite. La corrélation de base présente une asymétrie en étant une fonction croissante du point de détachement de la tranche.

Tableau 25.8 : Corrélations implicites pour l'iTraxx Europe à cinq ans le 31 janvier 2007

Corrélations composées					
Tranche	0-3 %	3-6 %	6-9 %	9-12 %	12-22 %
Corrélation implicite	17,7 %	7,8 %	14,0 %	18,2 %	23,3 %
Corrélations de base					
Tranche	0-3 %	3-6 %	6-9 %	9-12 %	12-22 %
Corrélation implicite	17,7 %	28,4 %	36,5 %	43,2 %	60,5 %

Si les prix de marché étaient cohérents avec un modèle de copule gaussienne à un facteur, les corrélations implicites (composées ou non) seraient identiques pour toutes les tranches. Compte tenu des observations empiriques, il apparaît que ce modèle n'est pas cohérent avec les prix de marché.

L'évaluation des tranches non standard

Nous n'avons pas besoin d'un modèle spécifique pour évaluer les tranches standard de l'iTraxx Europe, puisqu'elles sont cotées sur le marché. Parfois, il est cependant nécessaire d'évaluer des tranches non standard, comme une tranche 4-8 %. Une approche possible consiste à interpoler les corrélations de base, de façon à estimer ces corrélations

pour les tranches 0-4 % et 0-8 %. On peut ainsi évaluer la perte espérée pour ces tranches (en pourcentage du principal total du portefeuille sous-jacent). La perte espérée pour la tranche 4-8 % est alors obtenue par différence. Il est ensuite possible d'en déduire une corrélation composée implicite, puis un spread d'équilibre pour la tranche.

On sait maintenant que ce n'est pas la meilleure façon de procéder. Il est préférable de calculer les pertes espérées pour les tranches standard et construire un graphique analogue au graphique 25.3 montrant l'évolution des pertes espérées sur les tranches 0-X % en fonction de X. On peut ensuite interpoler sur ce graphique pour estimer les pertes espérées sur les tranches 0-4 % et 0-8 % et en déduire la perte sur la tranche 4-8 %.

L'hypothèse d'absence d'arbitrage impose une croissance à taux décroissant des pertes espérées sur le graphique 25.3. L'utilisation des corrélations de base pour l'interpolation ne permet pas d'assurer que cette propriété sera vérifiée. De ce fait, l'approche directe par les pertes espérées est bien meilleure car l'hypothèse d'absence d'arbitrage est respectée.

25.11 Les alternatives au modèle standard

Cette section décrit quelques alternatives au modèle de copule gaussienne à un facteur qui constitue le modèle standard.

Hétérogénéité

Le modèle standard est homogène, au sens où les distributions de probabilité des dates de défaut sont supposées identiques pour toutes les entités de référence ainsi que les corrélations pour toutes les paires d'entités. On peut utiliser un modèle plus général en abandonnant cette hypothèse. Bien sûr, l'implémentation est plus complexe, puisque chaque entité a une probabilité différente de faire défaut à une date donnée et $P(k,t/F)$ ne peut plus être calculé par la formule binomiale de l'équation (25.7). Une procédure numérique telle que celle décrite par Andersen *et al.* (2003) ou Hull et White (2004) doit alors être utilisée [10].

Copules alternatives

Le modèle de copule gaussienne est spécifique en termes de corrélation de dates de défaut. Il existe de nombreuses autres possibilités de modèles à un seul facteur. Citons simplement les copules de Student, de Clayton, de Marshall-Olkin ou encore la copule archimédienne. On peut aussi innover en abandonnant l'hypothèse de normalité de F et des Z_i dans l'équation (24.7). Par exemple, Hull et White montrent qu'on obtient un bon ajustement par des lois de Student à quatre degrés de liberté [11]. Une autre ap-

10. Voir L. Andersen, J. Sidenius et S. Basu, "All Your Hedges in one Basket", *RISK*, novembre 2003, et J. C. Hull et A. White, "Valuation of CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation", *Journal of Derivatives*, 12 (2), hiver 2004, 8-23.

11. Voir J. C. Hull et A. White, "Valuation of CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation", *Journal of Derivatives*, 12 (2), hiver 2004, 8-23.

proche consiste enfin à augmenter le nombre de facteurs communs. Malheureusement, les calculs sont beaucoup plus longs dans ce cas car il faut intégrer sur des distributions multivariées.

Les systèmes de loadings aléatoires

Andersen et Sidenius ont proposé un modèle dans lequel la corrélation de l'équation (25.5) est une fonction de F [12]. En général, cette corrélation est une fonction décroissante de F. Cela signifie que dans les cas où le taux de défaut est élevé (c'est-à-dire quand F est faible), la corrélation des défauts l'est également. C'est effectivement le cas dans les observations empiriques [13]. Andersen et Sidenius montrent que les prix de marché sont bien mieux ajustés par cette approche que par le modèle standard.

Le modèle de copule implicite

Hull et White montrent comment une copule peut être déduite des cotations de marché [14]. La version la plus simple du modèle suppose qu'une intensité de défaut moyenne s'applique à toutes les entités du portefeuille pendant la durée de vie du CDO. La cotation des tranches permet de déduire la distribution de probabilité de ce taux d'intensité du défaut. Le calcul est dans le même esprit que celui décrit au chapitre 20 pour obtenir la distribution de probabilité des prix d'actions à partir des prix d'options.

Les modèles dynamiques

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des modèles statiques. Ils modélisent le taux de défaut moyen sur toute la durée de vie du CDO. Dans ces conditions, le modèle construit pour un CDO à cinq ans est différent de celui d'un CDO à sept ans ou à dix ans. Les modèles dynamiques sont différents, dans la mesure où ils tentent de décrire l'évolution des pertes sur le portefeuille à travers le temps. On distingue trois catégories de modèles dynamiques.

1. Les modèles structurels. Ils ressemblent aux modèles de la section 24.6, à ceci près que les processus de prix des actifs sous-jacents sont modélisés simultanément. Quand le prix de l'action d'une société donnée atteint un certain seuil, il y a défaut et les processus de prix des différents titres sont corrélés. Ces modèles sont toutefois difficiles à mettre en œuvre car une simulation de Monte-Carlo doit être utilisée et le calibrage s'avère délicat.

12. Voir L. Andersen et J. Disenius, "Extension of the Gaussian Copula Model: Random Recovery and Random Factor Loadings", *Journal of Credit Risk*, 1 (1), hiver 2004, 29-70.

13. Voir, par exemple, A. Servigny et O. Renault, "Default Correlation: Empirical Evidence", *Working Paper*, Standard and Poors, 2002 ; S. R. Das, L. Freed, G. Geng et N. Kapadia, "Correlated Default Risk", *Journal of Fixed Income*, 16 (2), 2006, 7-32 ; J. C. Hull, M. Predescu et A. White, "The valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model", *Journal of Credit Risk*, 6, 2010, 99-132 ; A. Ang et J. Chen, "Asymmetric Correlation of Equity Portfolios", *Journal of Financial Economics*, 63, 2002, 443-494.

14. Voir J. C. Hull et A. White, "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach", *Journal of Derivatives*, 14, 2006, 8-28 ; J. C. Hull et A. White, "An Improved Implied Copula Model and its Application to the Valuation of Bespoke CDO Tranches", *Journal of investment Management*, 8 (3), 2010, 11-31.

2. Les modèles de forme réduite. On modélise ici les taux d'intensité de défaut. Pour introduire des corrélations réalistes, il faut supposer que les processus de taux d'intensité de défaut présentent des sauts.
3. Les modèles Top Down. Dans cette approche, on modélise directement les pertes du portefeuille sans se préoccuper de ce qui se passe au niveau des entités individuelles.

Résumé

Les dérivés de crédit permettent aux banques et plus généralement aux institutions financières de gérer de manière dynamique le risque de crédit qu'elles supportent. Ils peuvent être utilisés pour transférer ce type de risque d'une entreprise à une autre, ou pour modifier l'exposition au risque en changeant les risques de crédit de différentes contreparties.

Le dérivé de crédit le plus courant est le swap de défaut. Il s'agit d'un contrat par lequel une société achète une assurance contre le défaut d'une de ses contreparties sur ses obligations. Le payoff de ce swap est en général la différence entre la valeur nominale de l'obligation émise par la contrepartie et sa valeur immédiatement après le défaut. Les CDS peuvent être analysés en calculant la valeur actuelle du coût de l'assurance dans un univers risque-neutre et la valeur actuelle du payoff espéré.

Un swap de rentabilité totale est un actif par lequel la rentabilité d'un portefeuille de titres présentant un risque de crédit est échangée contre le LIBOR plus un spread. Un swap de ce type peut être utilisé pour échanger une obligation corporate contre une obligation à taux variable indexée sur le LIBOR. Le risque de marché et le risque de crédit sont ainsi éliminés. Les swaps de rentabilité totale sont souvent employés comme des moyens de financement. Une entreprise qui souhaite acheter un portefeuille d'obligations peut contacter une institution financière qui va en fait acheter les obligations pour son propre compte. Cette dernière va ensuite conclure un swap avec l'entreprise, dans lequel elle va payer la rentabilité totale du portefeuille obligataire à l'entreprise et recevoir le LIBOR en échange. L'avantage pour l'institution financière réside dans la réduction de son exposition au risque de défaut de l'entreprise.

Un CDS n-ième défaut est un CDS qui engendre un paiement au n-ième défaut dans un portefeuille de titres. Un CDO peut être créé en divisant un portefeuille d'obligations corporate en tranches qui supporteront des risques de crédit différents. Cela permet de construire de nouveaux titres, dont certains présentent un risque de crédit très élevé et d'autres un risque de crédit très faible. Un CDO synthétique repose sur le même principe, mais il est créé à partir d'un portefeuille de CDS. Afin d'évaluer ces différents contrats, on passe le plus souvent par un modèle à un facteur à copule gaussienne pour modéliser la date de défaut.

Références complémentaires

Andersen L. et J. Sidenius, "Extension of the Gaussian Copula Model: Random Recovery and Random Factor Loadings", *Journal of Credit Risk*, 1 (1) hiver 2004, 29-70.

ANDERSEN L., J. SIDENIUS et S. BASU, "All Your Hedges in One Basket", *RISK*, novembre 2003.

DAS S., *Credit Derivatives: Trading and Management of Credit and Default Risk*, Wiley, Singapore, 1998.

HULL J. C. et A. WHITE, "Valuation of a CDO and nth-to-Default Swap without Monte Carlo Simulation", *Journal of Derivatives*, 12 (2), hiver 2004, 8-23.

HULL J. C. et A. WHITE, "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach", *Journal of Derivatives*, 14, 2006, 8-28.

HULL J. C. et A. WHITE, "An Improved Implied Copula Model and its Application to the Valuation of Bespoke CDO Tranches", *Journal of Investment Management*, 8 (3), 2010, 11-31.

LAURENT J.P. et J. GREGORY, "Basket default Swaps, CDOs and Factor Copulas", *Journal of Risk*, 7 (4), 2005, 8-23.

LI, D.X., "On Default Correlation: a Copula Approach", *Journal of Fixed Income*, mars 2000, 43-54.

SCHONBUCHER P. J., *Credit Derivatives: Pricing Models*, Wiley, New York, 2003.

TAVAKOLI J. M., *Credit Derivatives: A Guide to Instruments and Applications*, Wiley, New York, 1998.

Problèmes et exercices

25.1 Quelle est la différence entre un CDS classique et un CDS digital ?

25.2 Un CDS à 5 ans cote 60 points de base de spread payables semestriellement. Le principal est de 300 millions d'euros et le CDS donne lieu à un dénouement en cash. Un défaut survient après 4 ans et 2 mois, et le prix de l'obligation la moins chère à livrer est estimé à 40 % de la valeur nominale juste après le défaut. Donnez l'ensemble des cash-flows et leurs dates de paiement pour ce CDS.

25.3 Expliquez la différence entre un CDO et un CDO synthétique.

25.4 Expliquez l'expression « tranche isolée ».

25.5 Expliquez ce qu'est un CDS 1er défaut. Comment sa valeur évolue-t-elle en fonction de la corrélation des défauts des entités de référence ? Justifiez votre réponse.

25.6 Expliquez les différences entre probabilités risque-neutre et probabilités réelles. Lesquelles doit-on utiliser pour l'évaluation des CDS ?

25.7 Expliquez pourquoi un swap de rentabilité totale peut être un outil de financement intéressant.

25.8 La courbe des taux ZC est plate à 7 % par an en composition continue et le défaut peut survenir au milieu de chaque année d'un CDS qui dure 5 ans. Le taux de recouvrement espéré est de 30 % et les probabilités de défaut sont de 3 % conditionnellement à l'absence de défaut préalable. Quel est le spread du CDS ? Les paiements sont annuels.

25.9 Quelle est la valeur du CDS de l'exercice 25.8 par dollar US de principal pour l'acheteur de cette protection si le spread est de 150 bp ?

25.10 Quel serait le spread du CDS de l'exercice 25.8 s'il était digital ?

25.11 Comment fonctionne un CDS n-ième défaut à 5 ans ? Considérez un portefeuille de 100 entités de référence, chacune ayant une probabilité de défaut de 1 %. Que peut-on attendre de la valeur de ce CDS quand la corrélation des défauts augmente lorsque (a) $n = 1$ et (b) $n = 25$? Justifiez votre réponse.

25.12 Comment relie-t-on le payoff d'un CDS au principal et au taux de recouvrement ?

25.13 Montrez que le spread d'un CDS classique devrait être égal à $(1 - R)$ fois le spread d'un CDS digital, où R est le taux de recouvrement.

25.14 Montrez que si le spread du CDS des tableaux 25.1 à 25.4 est de 100 bp, la probabilité de défaut doit être de 1,61 % par an. Comment cette probabilité est-elle modifiée quand le taux de recouvrement est de 20 % au lieu de 40 % ? Vérifiez que votre réponse est cohérente avec le fait que la probabilité de défaut est approximativement proportionnelle à $1/(1 - R)$, où R est le taux de recouvrement.

25.15 Une entreprise conclut un contrat de swap de rentabilité totale par lequel elle reçoit la rentabilité d'une obligation corporate payant un coupon de 5 % et paie le LIBOR. Expliquez la différence entre ce contrat et un swap usuel recevant 5 % et payant le LIBOR.

25.16 Expliquez comment sont construits les CDS forward et les options sur CDS.

25.17 « La position d'un acheteur de CDS est analogue à une position longue sur une obligation sans risque de défaut et une position courte sur une obligation corporate. » Expliquez cette affirmation.

25.18 Pourquoi y a-t-il un problème d'asymétrie d'information dans les CDS ?

25.19 L'évaluation d'un CDS avec des probabilités réelles au lieu de probabilités risque-neutre conduit-elle à une surévaluation ou à une sous-évaluation ? Justifiez votre réponse.

25.20 Expliquez la différence entre un swap de rentabilité totale et un swap d'actifs.

25.21 Supposons que dans un modèle de copule gaussienne à un facteur, la probabilité de défaut des 125 entreprises constituant le portefeuille soit de 3 % et que la corrélation de chaque couple de défauts soit de 0,2. Calculez, pour des valeurs du facteur commun allant de -2 à $+2$ par pas de 1 :

a. la probabilité de défaut conditionnelle à la valeur du facteur commun ;

b. la probabilité qu'au moins 10 défauts surviennent, conditionnellement à la valeur du facteur commun.

25.22 Expliquez la différence entre corrélation de base et corrélation composée.

25.23 Dans l'exemple 25.2, quel est le spread de la tranche 9-12 %, en supposant que la corrélation des tranches est de 0,15 ?

Questions complémentaires

25.24 La courbe des taux ZC est supposée plate à 6 % par an en composition continue, et dans le cadre d'un CDS à 2 ans, les défauts de l'entité de référence peuvent survenir au milieu de chaque semestre. Les paiements du swap sont semestriels et le taux de recouvrement espéré est 20 %. Les probabilités de défaut sont de 1 % aux deux premières dates et de 1,5 % aux deux dernières dates. Quel est le spread du CDS ? Si ce CDS était digital, quel serait son spread ?

25.25 Notons λ la probabilité de défaut d'une entreprise chaque année, conditionnellement à l'absence de défaut préalable, et notons R le taux de recouvrement. Le taux sans risque est de 5 % et les défauts éventuels peuvent survenir en milieu

d'année. Le spread d'un CDS à 5 ans sur cette entreprise avec des paiements annuels est de 120 bp et le spread du CDS digital correspondant est de 160 bp. Estimez R et λ.

25.26 Expliquez à quels changements vous vous attendez sur les taux offerts par les différentes tranches d'un CDO, lorsque les corrélations des défauts entre les obligations du portefeuille augmentent.

25.27 Le taux sans risque à cinq ans est de 7 % et le taux actuariel des obligations à cinq ans émises par une entreprise X est de 9,5 %, les deux taux étant composés semestriellement. Le spread du CDS correspondant à 5 ans quand l'entité de référence est l'entreprise X est de 150 bp. Quelle opportunité d'arbitrage existe-t-il dans cette situation ? Et si le spread est de 300 bp ? Expliquez les raisons pour lesquelles les opportunités d'arbitrage que vous avez identifiées sont loin d'être parfaites.

25.28 Dans l'exemple 25.3, quel est le spread pour :

a. un CDS « premier défaut » ?

b. un CDS « second défaut » ?

25.29 Dans l'exemple 25.2, quel est le spread pour la tranche 6-9 % en supposant une corrélation de 0,15 entre les tranches ?

25.30 Les spreads pour des CDS de un à cinq ans sont respectivement 100, 120, 135, 145 et 152 points de base. Le taux sans risque est de 3 % pour toutes les maturités et le taux de recouvrement de 35 %, les paiements étant trimestriels. Utilisez DerivaGem pour calculer le taux d'intensité de défaut de chaque année en composition continue. Quelle est la probabilité de défaut la première année ? Et la seconde année ?

25.31 Le tableau 25.6 donne 77 bp comme cotation de l'iTraxx 5 ans le 31 janvier 2008. On suppose que le taux sans risque est de 5 % pour toutes les maturités et le taux de recouvrement de 40 %, les paiements étant trimestriels. On suppose, de plus, que le spread de 77 bp s'applique à toutes les maturités. En utilisant la feuille de calcul CDS de DerivaGem, calculez un taux d'intensité de défaut cohérent avec cette cotation.

Chapitre 26

Les options exotiques

Les produits dérivés comme les calls et les puts européens et américains sont si classiques, que les professionnels les qualifient de « vanille » (*plain vanilla options*), produit au goût simple et connu de tous. Ils ont des propriétés standardisées, clairement spécifiées, et sont activement échangés. Leurs prix et volatilités implicites sont ainsi diffusés régulièrement sur les marchés financiers ou par les brokers. L'une des facettes les plus passionnantes des marchés dérivés de gré à gré est sans nul doute l'existence d'une foule de produits non standard, dits aussi exotiques, créés par l'ingénierie financière. Ces produits exotiques, qui ne représentent qu'une proportion relativement faible des portefeuilles des banques d'investissement, ont pourtant un intérêt particulier dans le sens où ils sont généralement bien plus profitables que les produits classiques.

Il existe de nombreuses raisons au développement des dérivés exotiques. Dans certains cas, ils répondent à un réel besoin de couverture sur le marché ; dans d'autres cas, ils sont attractifs pour des raisons légales, réglementaires, comptables ou encore fiscales. Certains produits sont destinés à refléter la vision des trésoriers quant aux évolutions possibles de variables de marché spécifiques ; enfin, d'autres produits sont conçus par les banques d'investissement de façon à paraître plus attractifs qu'ils ne le sont réellement, notamment aux yeux des trésoriers d'entreprise les moins avertis.

Ce chapitre est consacré à la description et à l'évaluation des options exotiques les plus courantes. Nous supposons dans tout ce chapitre que l'actif sous-jacent paie des flux intermédiaires au taux q. Comme nous l'avons vu aux chapitres 17 et 18, q correspond au rendement en dividende pour les options sur indices boursiers, au taux sans risque étranger pour les options sur devises et au taux sans risque domestique pour les options sur futures. La plupart des options présentées dans ce chapitre peuvent être évaluées avec le logiciel DerivaGem. Ces contrats sont essentiellement négociés de gré à gré, aussi la dénomination des contrats est-elle essentiellement anglo-saxonne. Nous conserverons donc cette terminologie, sauf quand il existe une traduction française couramment utilisée.

26.1 Les packages

Une position liée, ou package, est un portefeuille constitué de calls européens classiques, de puts européens classiques, de contrats forward, de liquidités et d'actif sous-jacent. Nous avons déjà présenté un certain nombre de ces packages au chapitre 12 : bull spreads, bear spreads, calendar spreads, butterfly spreads, straddles, strangles, etc.

Les packages sont souvent construits de sorte que leur coût initial soit nul, comme c'est le cas pour le contrat *range forward*[1] décrit à la section 17.2. Pour une position longue sur un tel contrat, la structure consiste en une position longue sur un call et une position courte sur un put. Pour une position courte, les positions sur le call et le put sont opposées. Le prix d'exercice du call est supérieur à celui du put et choisi de sorte que, à la date de constitution du portefeuille, le prix du call soit identique au prix du put, ce qui assure le coût initial nul.

Il est important de noter que le coût initial peut toujours être différé jusqu'à la date d'échéance, transformant ainsi l'actif dérivé en produit à coût initial nul. Dans le cas d'un call européen par exemple, la prime c peut être différée jusqu'à l'échéance de l'option, T, où l'on devra alors s'acquitter d'un coût $A = ce^{rT}$. Le flux terminal de cette position est alors $\max(S_T - K\,;0) - A$, ou encore $\max(S_T - K - A\,;-A)$. Dans le cas où le prix d'exercice K est égal au prix forward, cette option à prime différée est souvent appelée break forward, option Boston, forward à sortie optionnelle ou encore forward annulable.

26.2 Les options américaines perpétuelles

Le prix d'un actif dérivé portant sur un sous-jacent versant des dividendes au taux q doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles (17.6) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)\,S\,\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,S^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Considérons un actif dérivé payant un montant fixe Q à la première date à laquelle $S = H$. Avec $S < H$, les conditions aux bornes de l'équation aux dérivées partielles sont $f = Q$ lorsque $S = H$, et $f = 0$ lorsque $S = 0$. La solution $f = Q\,(S/H)^{\alpha}$ vérifie les conditions aux bornes pour $\alpha > 0$. En outre, l'équation aux dérivées partielles est vérifiée si :

$$(r-q)\,\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha\,(\alpha-1)\,\sigma^2 = r$$

Cette équation admet pour solution positive $\alpha = \alpha_1$, avec :

$$\alpha_1 = \frac{-w + \sqrt{w^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$$

où $w = r - q - \sigma^2/2$. La valeur de cet actif dérivé doit donc être égale à $f = Q\,(S/H)^{\alpha_1}$, cette valeur vérifiant à la fois les conditions aux bornes et l'équation aux dérivées partielles.

1. Il existe quantité d'autres dénominations anglo-saxonnes pour le contrat range forward, comme zero-cost collar, flexible forward, option cylindre, option fence, min-max et forward band.

Considérons maintenant un call américain perpétuel de prix d'exercice K. Si l'option est exercée lorsque $S = H$, elle délivre un payoff égal à $H - K$. On peut alors utiliser le résultat précédent pour montrer que sa valeur doit être :

$$(H - K)(S/H)^{\alpha_1}$$

C'est le détenteur du call qui doit choisir le prix du sous-jacent, H, pour lequel il désire exercer l'option. La valeur optimale de H est celle qui maximise la valeur de l'option déterminée précédemment. Les méthodes de calcul standard donnent $H = H_1$ avec :

$$H_1 = K\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}$$

Pour $S < H_1$, le prix d'un call perpétuel est donc donné par :

$$\frac{K}{\alpha_1 - 1}\left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}\frac{S}{K}\right)^{\alpha_1}$$

Pour $S > H_1$, l'exercice immédiat est optimal et la valeur du call est donc égale à $S - K$.

Dans le cas du put américain perpétuel, il convient de considérer l'actif dérivé payant un montant fixe Q lorsque $S = H$, en partant d'une valeur $S > H$ (de sorte que la barrière H soit franchie par au-dessus). Les conditions aux bornes de l'équation aux dérivées partielles sont alors $f = Q$ lorsque $S = H$, et $f = 0$ lorsque S tend vers l'infini. La solution $f = Q(S/H)^{-\alpha}$ vérifie les conditions aux bornes pour $\alpha > 0$. Comme précédemment, nous pouvons montrer que cette solution vérifie l'équation aux dérivées partielles pour $\alpha = \alpha_2$, avec :

$$\alpha_2 = \frac{w + \sqrt{w^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$$

Si le détenteur du put américain décide de l'exercer lorsque $S = H$, la valeur du put est $(K - H)(S/H)^{-\alpha_2}$. On peut déterminer le prix optimal d'exercice de l'option, $H = H_2$, en maximisant cette expression. On a :

$$H_2 = K\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + 1}$$

Pour $S > H_2$, le prix d'un put perpétuel est donc donné par :

$$\frac{K}{\alpha_2 + 1}\left(\frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2}\frac{S}{K}\right)^{-\alpha_2}$$

Pour $S < H_2$, l'exercice immédiat est optimal et la valeur du put est donc égale à $K - S$.

La section 15.6 et le problème 15.23 traitent de cas particuliers de ces résultats pour $q = 0$.

26.3 Les options américaines non standard

L'exercice des options américaines classiques peut avoir lieu à tout instant pendant la durée de vie de l'option, le prix d'exercice restant toujours identique. En pratique, les

options américaines échangées sur les marchés de gré à gré ont parfois des caractéristiques spécifiques.

Ainsi :

1. L'exercice anticipé peut être limité à certaines dates. On parle alors d'option bermudienne (l'archipel des Bermudes se situant entre l'Europe et les Amériques !) ;
2. L'exercice anticipé peut n'être autorisé que pendant une période spécifique de la vie de l'option. Il peut par exemple y avoir une période initiale de blocage pendant laquelle l'exercice prématuré est impossible ;
3. Le prix d'exercice peut être variable pendant la durée de vie de l'option.

Les warrants ou les bons de souscription émis par les entreprises sur leurs propres actions possèdent souvent ce type de caractéristiques. À titre d'exemple, on peut imaginer un warrant à 7 ans qui ne pourrait être exercé qu'à des dates spécifiques à partir de la troisième année, le prix d'exercice passant de 30 € pour les troisième et quatrième années à 32 € pour les deux années suivantes, et finalement à 33 € pour la dernière année.

Les options américaines non standard peuvent généralement être évaluées à l'aide d'arbres binomiaux. Il convient alors de prendre en considération les éventuelles spécificités de l'option dans le test d'optimalité de l'exercice anticipé effectué à chaque nœud.

26.4 Les options gap

Un call gap est un call européen qui délivre un payoff égal à $S_T - K_1$ quand $S_T > K_2$. La différence entre un call gap et un call classique de prix d'exercice K_2 est qu'en cas d'exercice, le payoff de l'option gap est différent de celui de l'option classique de $K_2 - K_1$. Notez bien que cette différence peut être positive ou négative selon que K_2 est supérieur ou inférieur à K_1.

On peut évaluer les options gap en appliquant une simple modification à la formule de Black et Scholes. Avec les notations usuelles, sa valeur est donnée par :

$$S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, N(d_1) - K_1 \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(d_2) \tag{26.1}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K_2\right) + \left(r - q + \sigma^2/2\right) \, T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La différence entre la valeur d'un call gap donnée par cette formule et celle d'un call classique de prix d'exercice K_2 donnée par la formule de Black et Scholes est donc de :

$$\left(K_2 - K_1\right) \mathrm{e}^{-rT} \, N(d_2)$$

Cette différence s'explique aisément en notant qu'en cas d'exercice, événement qui se produit avec une probabilité $N(d_2)$, l'option gap délivrera (pour $K_2 > K_1$) un supplément de payoff de $K_2 - K_1$.

Le payoff d'un put gap est égal à $K_1 - S_T$ quand $S_T < K_2$. La valeur de ce put est :

$$K_1 \, \mathrm{e}^{-rT} \, N(-d_2) - S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, N(-d_1) \tag{26.2}$$

avec d_1 et d_2 définis comme pour le call gap.

■ **Exemple 26.1** Considérons un actif de valeur actuelle 500 000 €, dont la volatilité pour la prochaine année a été estimée à 20 %. Le taux sans risque annuel est égal à 5 % et aucune distribution de revenu n'est attendue. Supposons qu'une compagnie d'assurance se soit engagée à acheter cet actif au prix de 400 000 €, dans le cas où sa valeur à la fin de l'année prochaine serait inférieure à cela. La compagnie d'assurance devra dont débourser un montant égal à $400\,000 - S_T$ pour toute valeur de l'actif dans un an inférieure à 400 000 €. En fait, la compagnie d'assurance a vendu un put classique donnant le droit à l'assuré de lui vendre l'actif au prix de 400 000 € dans un an. Cette option, qui peut être évaluée à partir de l'équation (15.21) avec S_0 = 500 000, K = 400 000, r = 0,05, σ = 0,2 et T = 1, a une valeur de 3 436 €.

Si l'on suppose maintenant que des coûts de transfert de l'actif d'un montant de 50 000 € sont à la charge de l'assuré, l'option ne devrait être exercée que dans le cas où la valeur de l'actif est inférieure à 350 000 €. Le coût pour la compagnie d'assurance devient $K_1 - S_T$ quand $S_T < K_2$, avec K_1 = 400 000, K_2 = 350 000 et S_T le prix de l'actif dans un an. Il s'agit d'un put gap, dont la valeur est donnée par l'équation (26.2) avec S_0 = 500 000, K_1 = 400 000, K_2 = 350 000, r = 0,05, q = 0, σ = 0,2 et T = 1. On obtient une valeur de 1 896 €. La prise en compte explicite des coûts de transfert de l'actif supportés par l'assuré devrait, dans ce cas, réduire le coût de la police d'assurance de près de 45 %.

26.5 Les options à déclenchement différé (*forward start options*)

Les options *forward start* sont des options qui n'entrent en activité qu'à une date ultérieure. Les *stock-options* intégrées dans les plans d'intéressement des employés, présentées au chapitre 16, peuvent parfois être considérées comme des sortes d'options forward start. Les entreprises s'engagent en effet à accorder à leurs employés (implicitement ou explicitement) des options à la monnaie à un terme donné.

Considérons un call forward start européen à la monnaie entrant en vigueur à la date T_1 et arrivant à échéance à la date T_2. Notons S_0 le prix de l'actif sous-jacent à la date initiale et S_1 son prix à la date T_1. Nous avons montré aux chapitres 15 et 17 que la valeur d'un call à la monnaie est proportionnelle au prix de l'actif sous-jacent. À la date T_1, la valeur de l'option forward start est donc égale à cS_1/S_0, où c est la valeur en date zéro d'une option à la monnaie de durée de vie $T_2 - T_1$. D'après l'évaluation risque-neutre, la valeur du contrat forward start à la date initiale est donc :

$$\mathrm{e}^{-rT_1} \, \hat{E} \left(c \, \frac{S_1}{S_0} \right)$$

où $\hat{E}$ est l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre. Comme c et S_0 sont connus et $\hat{E}\,(S_1) = S_0 \, \mathrm{e}^{(r-q)\,T_1}$, la valeur de l'option forward start est égale à $c \, \mathrm{e}^{-qT_1}$.

Dans le cas d'une action ne versant pas de dividendes, $q = 0$, et la valeur de l'option forward start est identique à celle d'une option à la monnaie classique ayant la même durée de vie que l'option forward start.

26.6 Les options cliquet

Une option cliquet, ou option à cliquets, est en fait une série de calls ou de puts dont les prix d'exercice sont fixés selon des règles déterminées en date initiale. Notons $n\tau$ la date terminale de l'option cliquet et τ, 2τ, ..., $(n-1)\,\tau$ les dates des différents cliquets. Une option cliquet pourrait être définie ainsi : la première option a un prix d'exercice K (éventuellement égal au prix initial du sous-jacent) et arrive à échéance en date τ ; la deuxième option arrive à échéance en date 2τ et aura pour prix d'exercice le niveau de l'actif sous-jacent observé à la date τ ; la troisième option arrive à échéance en date 3τ et aura pour prix d'exercice le niveau de l'actif sous-jacent observé à la date 2τ et ainsi de suite pour chaque date de redémarrage. Dans ce cas, l'option cliquet consiste en un package constitué d'une option classique et de $n-1$ options forward start qui peuvent être évaluées comme nous l'avons montré à la section 26.5.

Il existe des options cliquet bien plus compliquées que celle présentée ici. Il est possible, par exemple, de fixer des bornes inférieure et supérieure sur le payoff de l'option cumulé sur sa durée de vie, ou encore d'avoir des options cliquet qui disparaissent quand le prix de l'actif sous-jacent est dans une fourchette donnée à la fin d'une période. Il n'existe pas toujours de formule analytique d'évaluation pour ces options et la simulation de Monte-Carlo est alors souvent la meilleure approche pour les évaluer.

26.7 Les options composées (*compound options*)

Les options composées sont des options sur options. Il existe quatre principaux types d'options composées : les calls sur calls, les puts sur calls, les calls sur puts et les puts sur puts. Les options composées ont deux prix d'exercice et deux dates d'exercice. À titre d'exemple, intéressons-nous au cas d'un call sur call. À la première date d'exercice, T_1, le détenteur de cette option est en droit de payer le prix d'exercice K_1 en échange du call sous-jacent. Ce call donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à ce second contrat d'option au second prix d'exercice K_2, à la seconde date d'exercice T_2. L'option composée ne devra donc être exercée à la première date d'exercice que si la valeur de l'option sous-jacente est, à cette date, supérieure au premier prix d'exercice.

Dans le cas classique où le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, les options composées européennes peuvent être évaluées analytiquement [2] sous la forme d'intégrales d'une distribution normale bivariée.

2. Voir R. Geske, "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, 63-81, et M. Rubinstein, "Double Trouble", *RISK*, décembre 1991/janvier 1992, 53-56.

En reprenant les notations usuelles, la valeur à la date initiale d'un call sur call de type européen est :

$$S_0\,\mathrm{e}^{-qT_2}\,M(a_1\ ;\ b_1\ ;\ \sqrt{T_1/T_2}) - K_2\,\mathrm{e}^{-rT_2}\,M(a_2\ ;\ b_2\ ;\ \sqrt{T_1/T_2}) - \mathrm{e}^{-rT_1}\,K_1N(a_2)$$

avec :

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r - q + \sigma^2/2)\ T_1}{\sigma\sqrt{T_1}},\quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)\ T_2}{\sigma\sqrt{T_2}},\quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

La fonction $M(a\,;b\,;\rho)$ est la fonction de répartition d'une loi normale bivariée indiquant la probabilité pour que la première variable soit inférieure ou égale à a et que la seconde soit inférieure à b, lorsque la corrélation entre ces variables est égale à ρ[3]. La variable S^* représente à la date T_1 le prix de l'actif pour lequel le prix de l'option sous-jacente vaut K_1 à cette même date. Si le prix de l'actif sous-jacent à la seconde option est supérieur à S^* à la date T_1, la première option est exercée ; dans le cas contraire, l'option est abandonnée et est donc de valeur nulle à cette date.

En reprenant des notations identiques, la valeur d'un put sur call de type européen est :

$$K_2\,\mathrm{e}^{-rT_2}\,M\left(-a_2; b_2; -\sqrt{T_1/T_2}\right) - S_0\,\mathrm{e}^{-qT_2}\,M\left(-a_1; b_1; -\sqrt{T_1/T_2}\right) + \mathrm{e}^{-rT_1}\,K_1N\left(-a_2\right)$$

La valeur d'un call sur put de type européen est :

$$K_2\,\mathrm{e}^{-rT_2}\,M\left(-a_2; -b_2; \sqrt{T_1/T_2}\right) - S_0\,\mathrm{e}^{-qT_2}\,M\left(-a_1; -b_1; \sqrt{T_1/T_2}\right) - \mathrm{e}^{-rT_1}\,K_1N\left(-a_2\right)$$

La valeur d'un put sur put de type européen est :

$$S_0\,\mathrm{e}^{-qT_2}\,M\left(a_1; -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}\right) - K_2\,\mathrm{e}^{-rT_2}\,M\left(a_2; -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}\right) + \mathrm{e}^{-rT_1}\,K_1N\left(a_2\right)$$

26.8 Les options au choix (*chooser options*)

La caractéristique spécifique d'une option au choix (aussi appelée option *as you like it*, « comme vous le souhaitez ») est qu'après un certain délai initialement spécifié, son détenteur peut choisir si son option est un call ou un put. Si ce choix peut être effectué à la date T_1, la valeur de l'option est à cette date :

$$\max(c\,;p)$$

avec c la valeur du call sous-jacent et p celle du put sous-jacent.

Si les options sous-jacentes à l'option chooser sont toutes deux européennes et ont le même prix d'exercice, une formule d'évaluation peut être obtenue à partir de la relation

3. La note technique n° 5 accessible sur le site www.pearson.fr fournit une procédure numérique d'évaluation de M. On y trouvera aussi une fonction permettant de calculer M.

de parité call-put. Notons S_1 le prix de l'actif sous-jacent à la date T_1, K le prix d'exercice, T_2 la date d'échéance des options et r le taux d'intérêt sans risque. La relation de parité call-put implique :

$$\begin{aligned}\max(c\,;p) &= \max\left(c\,;c+K\,\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)}-S_1\,\mathrm{e}^{-q(T_2-T_1)}\right)\\ &= c+\mathrm{e}^{-q(T_2-T_1)}\max\left(0\,;K\,\mathrm{e}^{-(r-q)(T_2-T_1)}-S_1\right)\end{aligned}$$

Il apparaît donc clairement que l'option chooser peut être vue comme un portefeuille constitué par :

1. Un call de prix d'exercice K et d'échéance T_2 ;
2. $\mathrm{e}^{-q(T_2-T_1)}$ puts de prix d'exercice $K\,\mathrm{e}^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ et d'échéance T_1.

La valeur de l'option est donc égale à la valeur de ce portefeuille, facile à déterminer.

Il existe des options chooser plus complexes pour lesquelles le call et le put sous-jacents n'ont pas le même prix d'exercice et/ou la même échéance. On ne peut plus les exprimer sous la forme de portefeuilles d'options simples, et leurs caractéristiques relèvent alors plutôt des options composées.

26.9 Les options barrières

Les options barrières sont des options dont le payoff dépend du passage éventuel d'un seuil (déterminé initialement) par le prix de l'actif sous-jacent pendant une certaine période.

Nombre d'options barrières sont régulièrement échangées sur les marchés de gré à gré. Leur succès auprès de certains acteurs de marché tient au fait qu'elles sont moins coûteuses que les options traditionnelles correspondantes. Ces options barrières peuvent être classées dans deux catégories distinctes : les options ***knock-out*** et les options ***knock-in***. Une option ***knock-out*** cesse d'exister une fois que le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain seuil, la barrière, alors qu'une option ***knock-in*** ne commence à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent.

Les équations (17.4) et (17.5) donnant la valeur initiale des calls et puts classiques sont :

$$\begin{aligned}c &= S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,N(d_1)-K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)\\ p &= K\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2)-S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,N(-d_1)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln(S_0/K)+(r-q+\sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}\\ d_2 &= \frac{\ln(S_0/K)+(r-q-\sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1-\sigma\sqrt{T}\end{aligned}$$

Le call down-and-out est un type particulier d'option knock-out, constitué par un call classique qui cesse d'exister dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain niveau, la barrière, notée H, qui est dans ce cas fixée en dessous du niveau initial de l'actif. L'option knock-in correspondante est bien entendu le call down-and-in qui

consiste en un call classique ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent.

La valeur initiale du call down-and-in, pour une barrière H inférieure ou égale au prix d'exercice K, est donnée par :

$$c_{\text{di}} = S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} \, N(y) - K \, \mathrm{e}^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} \, N(y - \sigma\sqrt{T})$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2} \\ y &= \frac{\ln\left[H^2/(S_0 K)\right]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

La valeur d'un call classique est nécessairement égale à la somme des valeurs des calls down-and-in et down-and-out, aussi la valeur de ce dernier s'écrit :

$$c_{\text{do}} = c - c_{\text{di}}$$

Pour le niveau de barrière $H = K$, nous avons :

$$\begin{aligned} c_{\text{do}} = {} & S_0 \, N(x_1) \, \mathrm{e}^{-qT} - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T}\right) - S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, (H/S_0)^{2\lambda} \, N(y_1) \\ & + K \, \mathrm{e}^{-rT} \, (H/S_0)^{2\lambda-2} \, N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

et :

$$c_{\text{di}} = c - c_{\text{do}}$$

avec :

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}, \quad y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Le call up-and-out est un call classique qui cesse d'exister dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint la barrière, H, dans ce cas fixée à un niveau supérieur au prix initial de l'actif. Le call up-and-in consiste en revanche en un call classique ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent. Si le niveau de la barrière, H, est inférieur ou égal à K, la valeur du call up-and-out, notée c_{uo}, est nulle et le call up-and-in correspondant, dont nous noterons la valeur c_{ui}, vaut c. Pour H supérieur à K, on a :

$$\begin{aligned} c_{\text{ui}} = {} & S_0 \, N(x_1) \, \mathrm{e}^{-qT} - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T}\right) \\ & - S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, (H/S_0)^{2\lambda} \left[N(-y) - N(-y_1)\right] \\ & + K \, \mathrm{e}^{-rT} \, (H/S_0)^{2\lambda-2} \left[N\left(-y + \sigma\sqrt{T}\right) - N\left(-y_1 + \sigma\sqrt{T}\right)\right] \end{aligned}$$

et :

$$c_{\text{uo}} = c - c_{\text{ui}}$$

Les options de vente barrières sont définies de la même manière que les options d'achat barrières. Un put up-and-out est un put qui cesse d'exister dès que le prix de l'actif sous-jacent atteint la barrière, H, supérieure au prix initial de l'actif. Un put up-and-in consiste en un put ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte.

Quand la barrière est fixée à un niveau H supérieur ou égal au prix d'exercice, leurs prix sont :

$$p_{\text{ui}} = -S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} N\left(-y\right) + K \, \mathrm{e}^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N\left(-y + \sigma\sqrt{T}\right)$$

et :

$$p_{\text{uo}} = p - p_{\text{ui}}$$

Quand le niveau H de la barrière est inférieur ou égal à K, nous avons :

$$\begin{aligned} p_{\text{uo}} = & - S_0 \, N\left(-x_1\right) \mathrm{e}^{-qT} + K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N\left(-x_1 + \sigma\sqrt{T}\right) + S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} N\left(-y_1\right) \\ & - K \, \mathrm{e}^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N\left(-y_1 + \sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned}$$

et :

$$p_{\text{ui}} = p - p_{\text{uo}}$$

Un put down-and-out est un put qui disparaît dès que la barrière, d'un niveau inférieur au prix de l'actif sous-jacent, est atteinte. Un put down-and-in consiste pour sa part en un put ne commençant son existence qu'une fois la même barrière atteinte. Quand le niveau de la barrière est inférieur au prix d'exercice, les formules d'évaluation sont :

$$\begin{aligned} p_{\text{di}} = & - S_0 \, N\left(-x_1\right) \mathrm{e}^{-qT} + K \, \mathrm{e}^{-rT} \, N\left(-x_1 + \sigma\sqrt{T}\right) \\ & + S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} \left[N\left(y\right) - N\left(y_1\right)\right] \\ & - K \, \mathrm{e}^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} \left[N\left(y - \sigma\sqrt{T}\right) - N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right)\right] \end{aligned}$$

et :

$$p_{\text{do}} = p - p_{\text{di}}$$

Toutes ces formules ne sont valables que dans le cas où la distribution de probabilité du prix de l'actif sous-jacent à une date future est supposée log-normale. Une question importante pour les options barrières concerne la détermination de la fréquence d'observation du prix de l'actif sous-jacent, S, dans la mesure où elle conditionne la probabilité d'atteinte de la barrière. Les formules analytiques données dans cette section reposent sur l'hypothèse d'une observation continue de ce prix, ce qui dans certains cas correspond à peu de choses près à la réalité [4]. Souvent, les termes du contrat fixent la périodicité avec laquelle S est observée, par exemple tous les jours à 12 h précises. Broadie, Glasserman et Kou [5] donnent un moyen d'ajuster les formules précédentes pour le cas où le prix de l'actif sous-jacent n'est observé qu'à des dates discrètes. Il suffit pour cela de remplacer le niveau H de la barrière par $H \, \mathrm{e}^{0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$ pour les options up-and-in et up-and-out, et par $H \, \mathrm{e}^{-0,5826\sigma\sqrt{T/m}}$ pour les options down-and-in et down-and-out, m correspondant au nombre d'observations du prix de l'actif (T/m correspondant alors à l'intervalle de temps entre deux observations).

4. Une bonne méthode pour déterminer si et quand la barrière est atteinte par en dessous (respectivement par au-dessus) consiste à passer sur le marché du sous-jacent un ordre de vente (resp. d'achat) à prix limité au niveau de la barrière. Le cas échéant, l'ordre est exécuté au moment où la barrière est atteinte.

5. Voir M. Broadie, P. Glasserman et S. G. Kou, "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options", *Mathematical Finance*, 7 (4), octobre 1997, 325-349.

Les options barrières ont souvent des propriétés les distinguant des options classiques. Ainsi, le vega peut être négatif. Par exemple, c'est le cas d'un call up-and-out dont le prix de l'actif sous-jacent est proche du niveau de la barrière. Une augmentation de la volatilité accroît alors la probabilité d'atteindre cette barrière. Dans ce cas, le prix de l'option diminuera en cas d'augmentation de la volatilité.

L'un des problèmes qui se posent avec les options barrières que nous avons considérées jusqu'à présent est qu'une variable brutale mais temporaire dans le prix de l'actif est susceptible d'activer ou de désactiver l'option. Ce problème est pallié par l'option parisienne, qui n'est activée ou désactivée que si le prix du sous-jacent franchit la barrière pendant une durée initialement définie. Un put parisien down and out pourrait voir ses caractéristiques fixées ainsi : un strike à 90 % de la valeur initiale du sous-jacent, une barrière fixée à 75 % de ce même niveau, et il faudrait que le prix du sous-jacent reste pendant vingt jours sous la barrière pour que l'option disparaisse. Il convient que soit spécifié dans la confirmation si les vingt jours sont « une période continue de vingt jours » ou « une durée cumulée de vingt jours au cours de la durée de vie de l'option ». Les options parisiennes sont plus difficiles à évaluer que les options barrières classiques [6]. On peut, pour cela, avoir recours à la simulation de Monte-Carlo ou à des approches binomiales adaptées telles celles présentées aux sections 27.5 et 27.6.

26.10 Les options digitales

Les options digitales (encore appelées binaires) ont pour particularité des payoffs discontinus. L'exemple le plus simple d'option binaire est le call ***cash-or-nothing***, qui n'engendre aucun payoff quand l'option termine en dehors, mais paie un flux fixé, Q, quand l'option termine en dedans. Dans un univers risque-neutre, nous avons noté $N(d_2)$ la probabilité que le prix de l'actif sous-jacent soit supérieur au prix d'exercice à la date d'échéance, T. La valeur du call cash-or-nothing est donc tout simplement $Q\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(d_2)$. Pareillement, le put cash-or-nothing paie un flux Q si le prix terminal de l'actif sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, et ne paie rien sinon ; sa valeur initiale est donc égale à $Q\,\mathrm{e}^{-rT}\,N(-d_2)$.

Le call asset-or-nothing constitue un autre type d'option digitale. Il ne délivre aucun flux si le prix de l'actif sous-jacent termine sous le prix d'exercice, mais délivre un montant égal au prix de l'actif sous-jacent si celui-ci est supérieur au prix d'exercice à l'échéance. En reprenant les notations habituelles, la valeur d'un call asset-or-nothing est $S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,N(d_1)$. Un put asset-or-nothing ne délivre aucun flux si le prix de l'actif sous-jacent termine au-dessus du prix d'exercice, mais paie un montant égal au prix terminal de l'actif sous-jacent si celui-ci est inférieur au prix d'exercice à l'échéance. La valeur d'un tel put asset-or-nothing est $S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,N(-d_1)$.

Les payoffs des options digitales sont discontinus. Cela peut poser des problèmes dans le cas où l'actif sous-jacent est si peu échangé que même des achats et ventes de taille modérée entraînent des variations de prix. Considérons par exemple un call cash-or-

6. Voir, par exemple, M. Chesney, J. Cornwall, M. Jeanblanc-Picqué, G. Kentwell et M. Yor, "Parisian pricing", *RISK*, 10 (1), 1997, 77-79.

nothing dont le prix d'exercice est de 20 € et le payoff 1 million d'euros. Un prix final du sous-jacent de 19,99 € conduira à un payoff nul, alors que pour tout prix supérieur ou égal à 20 €, le payoff sera de 1 million d'euros. Imaginons qu'à la veille de l'échéance de l'option, le prix du sous-jacent soit légèrement inférieur à 20 €. Il est alors extrêmement tentant pour le détenteur du call cash-or-nothing de pousser le prix du sous-jacent au-dessus des 20 € à l'aide de quelques ordres d'achat bien placés. On retrouve le même type de situation avec les options barrières portant sur des sous-jacents peu liquides. Quand le prix du sous-jacent est proche de la barrière, les détenteurs de contrats d'options peuvent être tentés de placer des ordres d'achat ou de vente sur le sous-jacent, de sorte à s'assurer que la barrière est bien franchie.

Un call européen classique est équivalent à une position longue dans un call asset-or-nothing associée à une position courte dans un call cash-or-nothing qui délivrerait un montant égal au prix d'exercice du call classique. De la même manière, un put européen classique est équivalent à une position longue dans un put cash-or-nothing, qui délivrerait un montant égal au prix d'exercice du call classique, associée à une position courte dans un put asset-or-nothing.

26.11 Les options lookback

Les payoffs délivrés par les options lookback dépendent du niveau maximal ou minimal atteint par le prix du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un call lookback flottant est égal au montant duquel le prix terminal du sous-jacent dépasse le prix minimal atteint par ce même actif pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un put lookback flottant est égal au montant duquel le prix maximal du sous-jacent atteint pendant la durée de vie de l'option dépasse le prix terminal du sous-jacent.

Des formules d'évaluation ont été développées pour les options lookback flottantes [7], et dans le cas d'un call lookback flottant, la valeur initiale est donnée par :

$$S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,N(a_1) - S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,\frac{\sigma^2}{2\,(r-q)}N(-a_1) - S_{\min}\,\mathrm{e}^{-rT}\left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2\,(r-q)}\,\mathrm{e}^{Y_1}\,N(-a_3)\right]$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T} \\ a_3 &= \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r + q + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} \\ Y_1 &= -\frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})}{\sigma^2} \end{aligned}$$

avec $S_{\min}$ le prix minimal atteint jusque-là. (Dans le cas où l'option vient juste d'être émise, $S_{\min} = S_0$.) Le problème 26.23 traite le cas $r = q$.

7. Voir B. Goldman, H. Sosin et M. A. Gatto, "Path-Dependent Options : Buy at the Low, Sell at the High", *Journal of Finance*, 34, décembre 1979, 1111-1127, et M. Garman, "Recollection in Tranquility", *RISK*, mars 1989, 16-22.

La valeur initiale d'un put lookback flottant est :

$$S_{\max}\,\mathrm{e}^{-rT}\left[N(b_1)-\frac{\sigma^2}{2\,(r-q)}\,\mathrm{e}^{Y_2}\,N(-b_3)\right]+S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,\frac{\sigma^2}{2\,(r-q)}N(-b_2)-S_0\,\mathrm{e}^{-qT}\,N(b_2)$$

avec :

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\ln(S_{\max}/S_0)+(-r+q+\sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}\\
b_2 &= b_1-\sigma\sqrt{T}\\
b_3 &= \frac{\ln(S_{\max}/S_0)+(r-q-\sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}}\\
Y_2 &= \frac{2(r-q-\sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

avec $S_{\max}$ le prix maximal atteint jusque-là. (Dans le cas où l'option vient juste d'être émise, $S_{\max}=S_0$.)

Le call lookback permet en fait à son détenteur d'acheter l'actif sous-jacent au prix minimal atteint pendant la durée de vie de l'option. De même, le put lookback permet à son détenteur de vendre l'actif sous-jacent au prix maximal atteint pendant la durée de vie de l'option.

■ **Exemple 26.2** Considérons un put lookback flottant d'échéance 3 mois venant d'être émis, portant sur une action ne versant pas de dividendes et cotant 50 € à ce jour. Le taux sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité de l'action est estimée à 40 %. On a dans ce cas $S_{\max}=S_0=50$, r = 0,1, q = 0, σ = 0,4 et T = 0,25. D'après les formules que nous venons de détailler, $b_1=-0{,}025$, $b_2=-0{,}225$, $b_3=0{,}025$ et $Y_2=0$; la valeur du put lookback est donc 7,79 €. La valeur du call lookback nouvellement émis ayant les mêmes caractéristiques est 8,04 €.

Il existe aussi des options lookback à prix d'exercice fixe pour lesquelles, comme leur nom l'indique, le prix d'exercice est fixe, mais c'est la valeur finale du sous-jacent prise en compte qui dépendra du niveau maximal ou minimal du prix du sous-jacent. Ainsi, le payoff d'un call (put) lookback à prix d'exercice fixe est le même que celui d'un call (put) européen standard, mais avec la valeur maximale (minimale) atteinte par le prix du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option remplaçant la valeur terminale du prix du sous-jacent. Notons $S^*_{\max}=\max(S_{\max}\,;K)$ avec, comme auparavant, $S_{\max}$ le prix maximal atteint jusque-là et K le prix d'exercice. Notons aussi p^*_{fl} la valeur du put lookback flottant de même durée de vie que le call lookback à prix d'exercice fixe, mais dont le prix maximal atteint jusque-là, $S_{\max}$, serait remplacé par $S^*_{\max}$. Une analyse en termes de parité call-put permet de montrer que la valeur du call lookback à prix d'exercice fixe, c_{fix}, est [8] :

$$c_{\text{fix}}=p^*_{\text{fl}}+S_0\,\mathrm{e}^{-qT}-K\,\mathrm{e}^{-rT}$$

8. Ce raisonnement a été présenté dans l'article de H. Y. Wong et Y. K. Kwok, "Sub-replication and Replenishing Premium : Efficient Pricing of Multi-state Lookbacks", *Review of Derivatives Research*, 6, 2003, 83-106.

De même, si l'on note $S^*_{\min} = \min(S_{\min} ; K)$, la valeur du put lookback à prix d'exercice fixe est :

$$p_{\text{fix}} = c^*_{\text{fl}} + K\,\mathrm{e}^{-rT} - S_0\,\mathrm{e}^{-qT}$$

où c^*_{fl} représente la valeur du call lookback flottant de même durée de vie que le put lookback à prix d'exercice fixe, mais dont le prix minimal atteint jusque-là, $S_{\min}$, serait remplacé par $S^*_{\min}$. On peut ainsi ajuster les formules données pour l'évaluation des options lookback flottantes pour évaluer les options lookback à prix d'exercice fixe.

Les options lookback apparaissent, de prime abord, très attrayantes pour les investisseurs, mais sont beaucoup plus chères que les options classiques correspondantes. Comme nous l'avons vu pour les options barrières, la valeur des options lookback risque fort d'être sensible à la fréquence d'observation des prix retenue pour la détermination des prix minimaux et maximaux. Les formules analytiques que nous venons de développer reposent sur l'hypothèse d'une observation continue des prix. Broadie, Glasserman et Kou donnent un moyen d'ajuster ces formules quand le prix de l'actif sous-jacent n'est observé qu'à des dates discrètes [9].

26.12 Les options shout

Les options shout sont des options européennes pour lesquelles le détenteur de l'option peut « appeler » une fois sa contrepartie pendant la durée de vie du contrat. À la date d'échéance, le détenteur reçoit la valeur la plus élevée entre le payoff classique d'une option européenne et la valeur intrinsèque de l'instant de l'appel. Prenons le cas du détenteur d'un tel call de prix d'exercice 50 € qui aurait appelé à un moment où le prix de l'actif sous-jacent valait 60 €. Si la valeur terminale de l'actif sous-jacent est inférieure à 60 €, le détenteur de l'option touche 10 € et si la valeur terminale de l'actif est au contraire supérieure à 60 €, le détenteur de l'option touche la différence entre le prix de l'actif et le prix d'exercice (qui est égal à 50 €).

Les options shout ont certaines des caractéristiques des options lookback mais sont beaucoup moins coûteuses. Pour les évaluer, il faut noter que si l'option est appelée à la date τ et si l'actif sous-jacent vaut S_τ à cette date, le payoff de l'option est :

$$\max(0 ;\ S_T - S_\tau) + (S_\tau - K)$$

avec, comme toujours, K le prix d'exercice et S_T la valeur de l'actif sous-jacent à la date T. La valeur de l'option en cas d'appel à la date τ est donc la valeur actualisée de $S_\tau - K$ (montant reçu en date T), plus la valeur d'une option européenne de prix d'exercice S_τ, valeur qui peut être obtenue à l'aide des formules de Black et Scholes.

Les options shout peuvent être évaluées de la manière habituelle dans un arbre binomial ou trinomial d'évolution du prix de l'actif sous-jacent. En travaillant de la date terminale vers la date initiale, on calcule, à chaque nœud, la valeur de l'option en cas d'appel, et sa valeur en cas d'attente ; la valeur retenue est bien entendu la plus élevée des deux. La

9. Voir M. Broadie, P. Glasserman et S. G. Kou, "Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options", *Finance and Stochastics*, 2, 1998, 1-28.

procédure d'évaluation d'une option shout paraît ainsi relativement semblable à celle des options américaines classiques.

26.13 Les options asiatiques

Les options asiatiques sont des options dont le payoff dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent, calculé au cours de la vie de l'option. Le payoff d'un call sur moyenne de prix s'écrit $\max(0\,;\, S_{\text{moy}} - K)$, et le payoff d'un put sur moyenne de prix s'écrit $\max(0\,;\, K - S_{\text{moy}})$, avec S_{moy} le prix moyen de l'actif sous-jacent calculé sur une période initialement spécifiée. Les options sur moyennes de prix ont non seulement tendance à être moins coûteuses que les options classiques, mais l'on peut en outre affirmer qu'elles répondent mieux que ces dernières à un certain nombre de besoins des trésoriers d'entreprise. Par exemple, considérons un gestionnaire de trésorerie français en attente de 100 millions de dollars US provenant de la filiale américaine de son entreprise, et qui seront versés tout au long de l'année à venir. Il y a de grandes chances que ce gestionnaire soit intéressé par une option lui garantissant un taux de change moyen obtenu sur l'année, supérieur à un certain niveau. Un put sur moyenne de prix peut offrir une telle garantie avec beaucoup plus d'efficacité qu'un put classique.

Il est possible d'évaluer les options sur moyenne de prix à l'aide des formules obtenues pour les options classiques si l'on suppose que la distribution de S_{moy} est log-normale, ce qui est raisonnable dès lors que le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique [10]. Une approche souvent suivie consiste à calibrer une distribution log-normale à partir des deux premiers moments de S_{moy} et d'appliquer le modèle de Black [11]. Si l'on note M_1 et M_2 les deux premiers moments de S_{moy}, la valeur des calls et puts sur moyenne de prix est respectivement donnée par les équations (18.9) et (18.10) avec :

$$F_0 = M_1 \tag{26.3}$$

et :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right) \tag{26.4}$$

Si la moyenne est calculée en continu et que r, q et σ sont constants (comme c'est le cas dans DerivaGem), on a :

$$M_1 = \frac{\mathrm{e}^{(r-q)\,T} - 1}{(r-q)\,T} S_0$$

et :

$$M_2 = \frac{2\,\mathrm{e}^{[2(r-q)+\sigma^2]\,T}\,S_0^2}{(r-q+\sigma^2)\,(2r-2q+\sigma^2)\,T^2} + \frac{2S_0^2}{(r-q)\,T^2}\left(\frac{1}{2\,(r-q)+\sigma^2} - \frac{\mathrm{e}^{(r-q)\,T}}{r-q+\sigma^2}\right)$$

10. Quand le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, la distribution de la moyenne géométrique est effectivement log-normale et celle de la moyenne arithmétique l'est approximativement.

11. Voir S. M. Turnbull et L. M. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, septembre 1991, 377-389.

Plus généralement, pour une moyenne calculée à partir des observations de prix aux dates T_i $(1 \leq i \leq m)$, on a :

$$M_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} F_i \quad \text{et} \quad M_2 = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m} F_i^2\, \mathrm{e}^{\sigma_i^2 T_i} + 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j-1} F_i F_j\, \mathrm{e}^{\sigma_i^2 T_i}\right)$$

avec F_i et σ_i le prix forward et la volatilité implicite pour l'échéance T_i. Ce résultat est démontré dans la note technique n° 27 accessible sur le site www.pearson.fr.

■ **Exemple 26.3** Considérons un call sur moyenne de prix nouvellement émis, d'échéance 1 an et de prix d'exercice 50 €, portant sur une action ne versant pas de dividendes et cotant 50 € à ce jour. Le taux sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle de l'action a été estimée à 40 %. On a alors S_0 = 50, K = 50, r = 0,1, q = 0, σ = 0,4 et T = 1. Si la moyenne est calculée en continu, on a M_1 = 52,59 et M_2 = 2 922,76. Les valeurs des équations (26.3) et (26.4) sont F_0 = 52,59 et σ = 23,54 %. Avec K = 50, T = 1 et r = 0,1, l'équation (18.9) donne une valeur d'option de 5,62 €. L'utilisation de 12, 52 et 250 observations pour le calcul de la moyenne donne des valeurs respectives de 6 €, 5,70 € et 5,63 €.

Cette analyse peut être adaptée au cas d'options émises depuis un certain temps, pour lesquelles une partie des prix utilisés pour le calcul de la moyenne a déjà été observée. La durée de vie de l'option est divisée en deux périodes ; la première, passée, d'une durée t_1, pendant laquelle les prix ont déjà été observés, et la seconde, à venir, d'une durée t_2, correspondant au temps restant jusqu'à l'échéance de l'option. Soit $\bar{S}$ le prix moyen de l'actif sous-jacent pendant la première période ; le payoff de l'option sur moyenne est alors :

$$\max\left(\frac{\bar{S}\, t_1 + S_{\text{moy}}\, t_2}{t_1 + t_2} - K\,;0\right)$$

où S_{moy} est le prix moyen de l'actif sur la période de calcul de la moyenne restant à courir. Cette expression est équivalente à :

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2}\max\left(S_{\text{moy}} - K^*\,;0\right)$$

avec :

$$K^* = \frac{t_1 + t_2}{t_2}K - \frac{t_1}{t_2}\bar{S}$$

Si K^* est positif, l'option peut être évaluée comme une option asiatique nouvellement émise dont on aurait changé le prix d'exercice K en K^* ; il suffit ensuite de multiplier le résultat obtenu par $t_2/(t_1 + t_2)$. Si K^* est négatif, l'option sera exercée avec certitude et peut donc être évaluée comme un contrat forward. Sa valeur est donc :

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2}\left(M_1\, \mathrm{e}^{-rt_2} - K^*\, \mathrm{e}^{-rt_2}\right)$$

Les options à prix d'exercice moyen constituent une autre catégorie d'options asiatiques. Un call à prix d'exercice moyen délivre un flux terminal égal à $\max(0\,;\, S_T - S_{\text{moy}})$ et un put à prix d'exercice moyen délivre un flux terminal égal à $\max(0\,;\, S_{\text{moy}} - S_T)$. Les options à prix d'exercice moyen permettent de s'assurer que le prix payé pour un

actif échangé régulièrement pendant une certaine période reste inférieur à son prix terminal. Elles sont également la garantie que le prix touché pour un actif échangé régulièrement pendant une certaine période reste supérieur à son prix terminal. Ces options peuvent être évaluées comme des options d'échange d'un actif contre un autre, sous l'hypothèse que la distribution de S_{moy} soit log-normale.

26.14 Les options d'échange d'un actif contre un autre

Les options d'échange d'un actif contre un autre (aussi appelées plus simplement options d'échange) sont très variées. Une option d'achat de dollars US avec des yens est, du point de vue de l'investisseur européen, une option d'échange d'une devise étrangère contre une autre devise étrangère. Une offre publique d'échange est une option d'échange d'actions d'une société contre des actions d'une autre société.

Considérons une option européenne permettant la livraison d'un actif d'une valeur U_T à la date T contre la réception d'un actif d'une valeur V_T. Le flux terminal de cette option est :

$$\max(V_T - U_T\,;0)$$

Une formule d'évaluation de cette option a initialement été proposée par Margrabe[12]. Supposons que les prix des actifs U et V suivent tous deux des mouvements browniens géométriques de volatilités respectives σ_U et σ_V, que la corrélation instantanée entre U et V soit ρ, et enfin que les actifs U et V paient des flux aux taux q_U et q_V. La valeur de l'option à la date zéro est dans ce cas égale à :

$$V_0\,\mathrm{e}^{-q_V T}\,N(d_1) - U_0\,\mathrm{e}^{-q_U T}\,N(d_2) \tag{26.5}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2\,/2)\,T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T} \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V} \end{aligned}$$

et U_0 et V_0 la valeur de U et V à la date initiale.

Ce résultat sera démontré au chapitre 28. Il est intéressant de noter que l'équation (26.5) est indépendante du taux sans risque r. En effet, à mesure que r augmente, le taux de croissance dans l'univers risque-neutre du prix des deux actifs augmente, mais cette augmentation compense en fait exactement l'accroissement du taux d'actualisation. La variable $\hat{\sigma}$ représente la volatilité de V/U. La comparaison avec l'équation (17.4) permet de dire que le prix de cette option correspond au prix de U_0 calls européens classiques portant sur un actif de valeur V/U, de prix d'exercice 1,0, avec un taux d'intérêt sans

12. Voir W. Margrabe, "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", *Journal of Finance*, 33, mars 1978, 177-186.

risque égal à q_U et un taux de dividende de q_V. Mark Rubinstein montre qu'on peut caractériser de la même façon la version américaine de cette option pour l'évaluer [13]. On peut en fait la voir comme U_0 calls américains classiques sur un actif de valeur V/U, avec un prix d'exercice de 1,0, un taux sans risque égal à q_U et un taux de dividende égal à q_V. Cette option peut donc être évaluée à l'aide d'un arbre binomial classique, procédure déjà décrite au chapitre 21.

Une option permettant d'obtenir le meilleur ou le moins bon de deux actifs peut être vue comme une position longue sur l'un des deux actifs, associée à une option d'échange de cet actif contre l'autre. Les flux correspondants sont en effet :

$$\min(U_T\ ;\ V_T) = V_T - \max(V_T - U_T\ ;\ 0)$$
$$\max(U_T\ ;\ V_T) = U_T + \max(V_T - U_T\ ;\ 0)$$

26.15 Les options sur paniers (*basket options*)

Les options portant sur deux actifs risqués ou plus sont parfois appelées options arc-en-ciel. Les contrats futures sur obligations d'État, décrits au chapitre 6, échangés sur le CME Group ou l'Eurex, sont des contrats contenant des options arc-en-ciel. Le détenteur de la position courte est en effet en droit de choisir dans le gisement l'obligation qu'il va livrer. L'option *LIBOR-contingent FX* est un autre exemple. Il s'agit d'une option sur devise qui ne verse un payoff que si un taux d'intérêt initialement spécifié se trouve, à l'échéance, dans une fourchette déterminée.

Les options arc-en-ciel les plus populaires sont, sans aucun doute, les options sur paniers européennes. Il s'agit de contrats d'options dont le payoff dépend de la valeur d'un portefeuille (ou panier) d'actifs, généralement des actions individuelles, des indices boursiers ou des devises. Une option européenne sur panier peut être évaluée par une simulation de Monte-Carlo, en supposant que les processus suivis par les prix des actifs sont des mouvements browniens géométriques corrélés. Toutefois, il existe une méthode beaucoup plus rapide, consistant à calculer les deux premiers moments de la valeur du panier d'actifs à l'échéance, dans un univers risque-neutre, et à supposer que la loi suivie à cette date par la valeur du panier est log-normale. L'option peut alors être évaluée selon le modèle de Black, en utilisant les paramètres des équations (26.3) et (26.4), avec :

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i \quad \text{et} \quad M_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_i F_j\, \mathrm{e}^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}$$

où n représente le nombre d'actifs, T l'échéance de l'option, F_i et σ_i le prix forward et la volatilité implicite de l'actif i et ρ_{ij} la corrélation entre les rentabilités des actifs i et j. Voir la note technique n° 28, accessible sur le site www.pearson.fr.

13. Voir M. Rubinstein, "One for Another", *RISK*, juillet/août 1991, 30-32.

26.16 Les swaps de variance et de volatilité

Un swap de volatilité est un accord pour échanger la volatilité réalisée entre les dates 0 et T d'un actif financier contre une volatilité fixe spécifiée initialement. La volatilité réalisée est généralement calculée comme nous l'avons montré à la section 15.4, mais sous l'hypothèse d'une rentabilité quotidienne moyenne nulle. Si l'on a n observations quotidiennes du prix de l'actif entre les dates 0 et T, la volatilité réalisée est donnée par :

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)\right]^2}$$

avec S_i désignant la ième observation du prix de l'actif. (On retrouve parfois cette formule avec $n-1$ à la place de $n-2$.)

En date T, un swap de volatilité délivre à la contrepartie payant la volatilité fixe un payoff de $L_{\text{vol}}\left(\overline{\sigma} - \sigma_K\right)$, où L_{vol} représente le principal et σ_K le niveau de volatilité fixe. Si une option offre une exposition assez complexe au prix de l'actif et à sa volatilité, un swap de volatilité est plus simple, dans la mesure où il n'est exposé qu'à la volatilité.

Un swap de variance est un accord pour échanger $\overline{V}$, le taux de variance réalisée entre les dates 0 et T d'un actif financier, contre un taux de variance fixe spécifié initialement. Le taux de variance est le carré de la volatilité ($\overline{V} = \overline{\sigma}^2$). Les swaps de variance sont plus faciles à évaluer que les swaps de volatilité, car le taux de variance entre les dates 0 et T peut être répliqué par un portefeuille de calls et de puts. En date T, un swap de variance délivre à la contrepartie payant le taux fixe de variance un payoff de $L_{\text{var}}\left(\overline{V} - V_K\right)$, où L_{var} représente le principal et V_K le taux de variance fixe. Le principal d'un swap de variance est souvent exprimé en termes de principal de swap de volatilité auquel il correspond, soit $L_{\text{var}} = L_{\text{vol}}/(2\sigma_K)$.

L'évaluation des swaps de variance

La note technique n° 22, accessible sur le site www.pearson.fr, montre que pour toute valeur S^* du prix de l'actif, l'espérance du taux de variance moyen mesuré entre les dates 0 et T est :

$$\begin{aligned}\hat{E}\left(\overline{V}\right) = &\frac{2}{T}\ln\left(\frac{F_0}{S^*}\right) - \frac{2}{T}\left[\frac{F_0}{S^*} - 1\right] \\ &+ \frac{2}{T}\left[\int_{K=0}^{S^*}\frac{1}{K^2}\,\mathrm{e}^{rT}\,p\left(K\right)\,dK + \int_{K=S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}\,\mathrm{e}^{rT}\,c\left(K\right)\,dK\right] \qquad (26.6)\end{aligned}$$

avec F_0 le prix forward de l'actif pour un contrat d'échéance T, et $c(K)$ et $p(K)$ les prix respectifs d'un call et d'un put européens de prix d'exercice K et d'échéance T.

Cette formule donne un moyen d'évaluer les swaps de variance [14]. La valeur d'un accord pour le paiement du taux de variance V_K en échange de la réception de la variance

14. Voir aussi K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal et J. Zou, "A Guide to Volatility and Variance Swaps", *Journal of Derivatives*, 6 (4), été 1999, 9-32. Pour les options sur variance et sur volatilité, voir P. Carr et R. Lee, "Realized volatility and Variance: Options via Swaps", *RISK*, mai 2007, 76-83.

réalisée entre 0 et T, sur un principal de L_{var} dans les deux cas, est :

$$L_{\text{var}}\left[\hat{E}\left(\overline{V}\right) - V_K\right] \mathrm{e}^{-rT} \tag{26.7}$$

Notons $K_i\,(1 \leq i \leq n)$ les prix d'exercice des options européennes, classés ainsi : $K_1 < K_2 < \ldots < K_n$. En supposant que les prix des options européennes sont connus, une approche classique pour la mise en œuvre de l'équation (26.6) consiste à fixer S^* au niveau du premier prix d'exercice inférieur à F_0 et à approximer les intégrales de la façon suivante :

$$\int_{K=0}^{S^*} \frac{1}{K^2}\,\mathrm{e}^{rT}\,p\,(K)\;dK + \int_{K=S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2}\,\mathrm{e}^{rT}\,c\,(K)\;dK = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K_i}{K_i^2}\,\mathrm{e}^{rT}\,Q\,(K_i) \tag{26.8}$$

avec $\Delta K_i = 0{,}5\,(K_{i+1} - K_{i-1})$ pour $2 \leq i \leq n-1$, $\Delta K_1 = K_2 - K_1$ et enfin $\Delta K_n = K_n - K_{n-1}$. La fonction $Q(K_i)$ renvoie le prix d'un put européen de prix d'exercice K_i pour $K_i < S^*$ et le prix d'un call européen de prix d'exercice K_i pour $K_i > S^*$. Pour $K_i = S^*$, la fonction $Q(K_i)$ renvoie la moyenne des prix du call et du put européens de prix d'exercice K_i.

■ **Exemple 26.4** Considérons un contrat à trois mois pour le paiement d'un taux de variance de 0,045 en échange de la réception de la variance réalisée par un indice au cours des trois mois, sur un principal de 100 millions d'euros. Le taux de versement de dividendes de l'indice est de 1 % et le taux sans risque de 4 % par an. Le niveau actuel de l'indice est de 1 020 points. Supposons que les volatilités implicites à trois mois pour les prix d'exercice 800, 850, 900, 950, 1 000, 1 050, 1 100, 1 150 et 1 200 soient respectivement égales à 29 %, 28 %, 27 %, 26 %, 25 %, 24 %, 23 %, 22 % et 21 %. Dans ce cas, nous avons $n = 9$, $K_1 = 800$, $K_2 = 850$, …, $K_9 = 1\,200$, $F_0 = 1\,020\,\mathrm{e}^{(0{,}04-0{,}01)\times 0{,}25} = 1\,027{,}68$ et $S^* = 1\,000$. DerivaGem donne $Q(K_1) = 2{,}22$, $Q(K_2) = 5{,}22$, $Q(K_3) = 11{,}05$, $Q(K_4) = 21{,}27$, $Q(K_5) = 51{,}21$, $Q(K_6) = 38{,}94$, $Q(K_7) = 20{,}69$, $Q(K_8) = 9{,}44$ et $Q(K_9) = 3{,}57$. Comme $\Delta K_i = 50$ pour tout i, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K_i}{K_i^2}\,\mathrm{e}^{rT}\,Q\,(K_i) = 0{,}008139$$

Les équations (26.6) et (26.8) donnent alors :

$$\hat{E}\left(\overline{V}\right) = \frac{2}{0{,}25}\ln\left(\frac{1\,027{,}68}{1\,000}\right) - \frac{2}{0{,}25}\left(\frac{1\,027{,}68}{1\,000} - 1\right) + \frac{2}{0{,}25} \times 0{,}008139 = 0{,}0621$$

La valeur du swap de variance, donnée par l'équation (26.7), est donc égale à $100 \times (0{,}0621 - 0{,}045)\,\mathrm{e}^{-0{,}04\times 0{,}25} = 1{,}69$ millions d'euros.

L'évaluation des swaps de volatilité

L'évaluation d'un swap de volatilité nécessite l'utilisation de $\hat{E}\,(\overline{\sigma})$, l'espérance de la volatilité moyenne mesurée entre les dates 0 et T. Nous pouvons écrire :

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\hat{E}\left(\overline{V}\right)}\sqrt{1 + \frac{\overline{V} - \hat{E}\left(\overline{V}\right)}{\hat{E}\left(\overline{V}\right)}}$$

Le développement en séries du dernier terme de cette équation donne :

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\hat{E}\left(\overline{V}\right)}\left\{1 + \frac{\overline{V} - \hat{E}\left(\overline{V}\right)}{2\hat{E}\left(\overline{V}\right)} - \frac{1}{8}\left[\frac{\overline{V} - \hat{E}\left(\overline{V}\right)}{\hat{E}\left(\overline{V}\right)}\right]^2\right\}$$

En prenant l'espérance, on obtient :

$$\hat{E}\left(\overline{\sigma}\right) = \sqrt{\hat{E}\left(\overline{V}\right)}\left\{1 - \frac{1}{8}\left[\frac{\text{var}\left(\overline{V}\right)}{\hat{E}\left(\overline{V}\right)^2}\right]\right\} \tag{26.9}$$

avec $\text{var}\left(\overline{V}\right)$ la variance de $\overline{V}$. L'évaluation des swaps de volatilité nécessite donc une estimation de la variance du taux de variance moyen mesuré sur la durée de vie du contrat. La valeur d'un accord pour le paiement de la volatilité σ_K en échange de la réception de la volatilité réalisée entre 0 et T, sur un principal de L_{vol} dans les deux cas, est :

$$L_{\text{vol}}\left[\hat{E}\left(\overline{\sigma}\right) - \sigma_K\right]\text{e}^{-rT}$$

■ **Exemple 26.5** Reprenons la situation considérée dans l'exemple 26.4 et considérons le cas d'un swap de volatilité où, sur un principal de 100 millions d'euros, la volatilité réalisée est touchée en échange du paiement d'une volatilité de 23 %. Nous avons, dans ce cas, $\hat{E}\left(\overline{V}\right) = 0{,}0621$. En supposant que l'estimation de l'écart-type de la variance moyenne sur les trois mois soit de 0,01, nous avons $\text{var}\left(\overline{V}\right) = 0{,}0001$. L'équation (26.9) donne alors :

$$\hat{E}\left(\overline{\sigma}\right) = \sqrt{0{,}0621}\left(1 - \frac{1}{8} \times \frac{0{,}0001}{0{,}0621^2}\right) = 0{,}2484$$

La valeur du swap de volatilité est donc égale à

$$100 \times (0{,}2484 - 0{,}23)\,\text{e}^{-0{,}04\times 0{,}25} = 1{,}82 \text{ millions d'euros.}$$

L'indice VIX

La fonction ln utilisée dans l'équation (26.6) peut être approximée par les deux premiers termes d'un développement en série :

$$\ln\left(\frac{F_0}{S^*}\right) = \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2$$

Dès lors, l'espérance dans l'univers-risque neutre du taux de variance cumulée pour l'échéance T peut être calculée comme suit :

$$\hat{E}\left(\overline{V}\right)T = -\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}\,\text{e}^{rT}\,Q\left(K_i\right) \tag{26.10}$$

Depuis 2004, le calcul de l'indice de volatilité VIX (présenté à la section 15.11) est fondé sur cette équation. La procédure de calcul suivie consiste, pour chaque journée, à

calculer $\hat{E}(\overline{V})\,T$ pour les options échangées sur le marché de maturités immédiatement inférieures et supérieures à 30 jours. L'espérance dans l'univers-risque neutre du taux de variance cumulée à 30 jours est donnée par l'interpolation linéaire entre ces deux valeurs, puis est annualisée par le biais d'une multiplication par $365/30$. La valeur de l'indice est la racine carrée de ce dernier résultat. Des détails supplémentaires sur ce calcul sont disponibles sur le site internet du CBOE.

Encadré 26.1 La couverture en delta est-elle plus facile ou plus difficile avec des options exotiques ?

Il est possible d'approcher la couverture d'options exotiques en construisant un portefeuille delta-neutre tel que nous l'avons présenté au chapitre 19 et en l'ajustant régulièrement, de sorte que son delta reste nul. Certaines options exotiques paraissent plus faciles à couvrir que les options classiques, et d'autres au contraire plus difficiles.

Par exemple, il est relativement facile de couvrir une option sur moyenne de prix, pour laquelle la moyenne serait calculée sur la totalité de la durée de vie de l'option. À mesure que le temps passe, une plus grande proportion des prix servant à calculer la moyenne terminale est observée. En d'autres termes, l'incertitude quant à la valeur du payoff décroît au fil du temps, et l'option devient de plus en plus facile à couvrir. Les derniers jours, le delta de l'option se rapproche dans tous les cas de zéro, puisque les mouvements de prix alors observés n'ont que très peu d'impact sur la moyenne et donc sur le payoff de l'option.

En revanche, les options barrières sont relativement difficiles à couvrir. Considérons par exemple le cas d'un call down-and-out sur devises quand le taux de change est supérieur à la barrière de 0,0005. Dans l'éventualité où la barrière est touchée, l'option ne vaut plus rien. En revanche, si la barrière n'est pas touchée, l'option peut se révéler très profitable. Le delta de l'option est donc discontinu au niveau de la barrière, et il est difficile de couvrir ce contrat en s'appuyant sur des techniques conventionnelles.

26.17 La réplication statique d'options

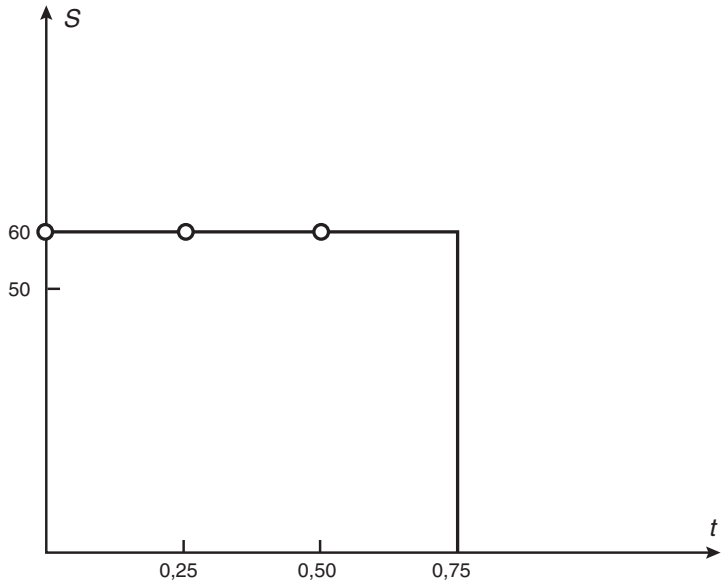
Si l'on applique les techniques de couverture décrites au chapitre 19 aux options exotiques, on s'aperçoit que certains contrats se révèlent faciles à couvrir alors que c'est beaucoup plus difficile pour d'autres, notamment du fait de discontinuités (voir à ce sujet l'encadré 26.1). Quand la couverture classique est difficile, la technique dite de réplication statique d'options [15] peut s'avérer utile. Elle consiste à rechercher un porte-

15. Voir E. Derman, D. Ergener et I. Kani, "Static Options Replication", *Journal of Derivatives*, 2 (4), été 1995, 78-95.

feuille d'options négociables liquides qui réplique approximativement l'option exotique. Une position courte sur ce portefeuille fournit alors la couverture désirée [16].

Le principe fondamental sous-tendant la réplication statique d'options est que deux portefeuilles qui ont la même valeur sur une certaine frontière doivent aussi avoir la même valeur en tout point intérieur à la frontière. Considérons à titre d'exemple un call up-and-out d'échéance 9 mois, de prix d'exercice 50, avec une barrière de 60, sur une action ne versant pas de dividendes et cotant 50. Le taux sans risque annuel est égal à 10 % et la volatilité annuelle à 30 %. Soit $f(S, t)$ la valeur de l'option à la date t si le sous-jacent vaut S. Toute frontière dans l'espace des (S, t) peut être sélectionnée pour déterminer le portefeuille de réplication. La frontière définie par $S = 60$ et $t = 0{,}75$, représentée dans le graphique 26.1, apparaît toutefois bien adaptée. Les valeurs de l'option up-and-out sur cette frontière sont données par :

$$f(S, 0{,}75) = \max(S - 50\,; 0) \text{ pour } S < 60$$
$$f(60, t) = 0 \text{ pour } 0 \leq t \leq 0{,}75$$



Graphique 26.1 : Description de la frontière pour l'exemple de réplication statique

Il existe de nombreuses façons de vérifier approximativement ces conditions d'égalité des flux aux bornes (sur la frontière) avec des options classiques. L'instrument naturel pour vérifier la première condition aux bornes (correspondant à la date d'échéance) est un call européen classique de prix d'exercice 50 et d'échéance 9 mois. Le premier élément à intégrer dans le portefeuille de réplication, pour une unité d'option barrière, est alors une unité de cette option, que nous appellerons option A.

16. La note technique n° 22, accessible sur le site www.pearson.fr, donne un exemple de réplication statique. Le taux de variance d'un actif y est répliqué à l'aide d'une position sur l'actif et d'options hors de la monnaie sur l'actif. Ce résultat, qui conduit à l'équation (26.6), peut être utilisé pour la couverture des swaps de variance.

Une procédure pouvant être suivie pour vérifier la condition d'égalité des flux sur la frontière $f(60, t)$ consiste à :

1. Diviser la durée de vie de l'option en N intervalles de durée Δt ;
2. Sélectionner le call européen de prix d'exercice 60 (niveau de la barrière) et d'échéance $N\Delta t$ (9 mois, dans ce cas) et déterminer la quantité nécessaire de celui-ci pour vérifier la condition d'égalité des flux au point $\{60,(N-1)\Delta t\}$;
3. Sélectionner le call européen de prix d'exercice 60 (niveau de la barrière) et d'échéance $(N-1)\Delta t$ et déterminer la quantité nécessaire de celui-ci pour vérifier la condition d'égalité des flux au point $\{60,(N-2)\Delta t\}$.

Et ainsi de suite jusqu'au point {60, 0}. Selon cette procédure, les options sont successivement choisies de sorte à ne pas modifier les flux du portefeuille aux points pour lesquels la condition a déjà été vérifiée [17]. Ainsi, un call de prix d'exercice 60 et d'échéance 9 mois est de valeur nulle sur la frontière verticale pour laquelle le flux de l'option barrière est déjà répliqué par l'option A (date d'échéance, sous-jacent compris entre 0 et 60). De même, pour tout $0 \leq i \leq N-1$, l'option d'échéance $i\Delta t$ est de valeur nulle au point {60, $i\Delta t$} pour lequel le flux de l'option barrière est déjà répliqué par le portefeuille d'options d'échéances supérieures ou égales à $(i+1)\,\Delta t$.

Prenons, par exemple, des intervalles d'une durée de trois mois. Dans ce cas, le portefeuille sera constitué, outre l'option A, d'options de prix d'exercice 60 et d'échéance 9 mois, 6 mois et 3 mois, que nous appellerons respectivement option B, option C et option D. Pour un taux sans risque de 10 % et une volatilité de 30 %, la valeur de Black et Scholes de l'option B au point {60, 0,5} est de 4,33. Comme l'option A vaut 11,54 à ce point-là, la quantité d'options B à intégrer dans le portefeuille pour vérifier la condition d'égalité des flux est alors égale à $-11{,}54/4{,}33 = -2{,}66$. Au point {60, 0,25}, l'option C vaut 4,33. Comme la position en options A et B vaut à ce point-là $-4{,}21$, il faut intégrer la quantité d'options C suivante : $4{,}21/4{,}33 = 0{,}97$ pour vérifier la condition d'égalité des flux. Des calculs semblables à ceux que nous venons d'effectuer conduisent à une quantité nécessaire d'options D égale à 0,28 pour vérifier la condition au point {60, 0}.

Le tableau 26.1 résume le portefeuille ainsi constitué (voir aussi l'application F du développeur d'applications de DerivaGem).

Il vaut 0,73 initialement (c'est-à-dire à la date 0 quand l'action vaut 50), valeur que l'on peut comparer au prix du call up-and-out de 0,31, obtenu avec la formule analytique donnée précédemment dans ce chapitre. Ainsi, le portefeuille de réplication n'est pas identique à l'option up-and-out, ce qui était prévisible puisque ses flux sont répliqués par le portefeuille en seulement trois points de la partie horizontale de la frontière du graphique 26.1. Si la même procédure est suivie en imposant dix-huit points sur la seconde frontière (c'est-à-dire en utilisant des options arrivant à échéance toutes les deux semaines), la valeur du portefeuille de réplication tombe à 0,38. Avec cent points, la valeur du portefeuille est égale à 0,32.

17. Cette façon de procéder n'est pas la seule à résoudre le problème. S'il convient de vérifier la condition d'égalité des flux sur N points de la frontière, on peut choisir N options et résoudre le système de N équations linéaires à N inconnues pour déterminer la composition du portefeuille de réplication statique.

Tableau 26.1 : Le portefeuille de calls européens construit pour répliquer l'option up-and-out

Option	Prix d'exercice	Échéance (années)	Quantité	Valeur initiale
A	50	0,75	1,00	+6,99
B	60	0,75	−2,66	−8,21
C	60	0,50	0,97	+1,78
D	60	0,25	0,28	+0,17

La couverture d'un actif dérivé est obtenue par la mise en place, en date initiale, d'une position courte sur le portefeuille vérifiant les conditions d'égalité des flux aux bornes. La couverture va être effective jusqu'à l'échéance de l'actif dérivé couvert, pour autant que la barrière ne soit pas touchée avant. Si cela devait se produire, le portefeuille de couverture devrait alors être immédiatement liquidé. L'avantage procuré par rapport à une couverture en delta est que cela ne nécessite pas d'ajustements fréquents. La méthode de réplication statique est applicable pour une large classe de produits dérivés. L'utilisateur a une grande flexibilité dans le choix de la frontière et dans celui des options à intégrer dans le portefeuille de réplication.

Résumé

Par rapport aux options classiques, les options exotiques engendrent des payoffs dont la formulation est plus complexe. Nous avons présenté dans ce chapitre quinze types d'options exotiques : packages, options américaines perpétuelles, options américaines non standard, options gap, options à départ différé, options à cliquets, options composées, options au choix, options barrières, options binaires, options lookback, options shout, options asiatiques, options d'échange d'un actif contre un autre, et options sur paniers. Nous avons montré comment ces options pouvaient être évaluées en nous appuyant sur les mêmes hypothèses que celles ayant permis d'obtenir la formule de Black et Scholes au chapitre 15. Certaines de ces options peuvent être évaluées analytiquement, mais seulement au prix d'une complication accrue des formules ; certaines peuvent faire l'objet d'approximations analytiques. On doit avoir recours à des extensions des procédures numériques développées au chapitre 21 pour évaluer les dernières. Nous présentons au chapitre 27 des procédures numériques plus complexes pour l'évaluation des options exotiques.

Certaines de ces options sont plus faciles à couvrir que les options classiques correspondantes, alors que c'est l'inverse pour d'autres. En général, les options asiatiques sont plus faciles à couvrir car leurs payoffs deviennent moins incertains à mesure que l'échéance approche. Les options barrières sont en revanche plus difficiles à couvrir car leur delta est discontinu au niveau de la barrière. L'approche de couverture des options exotiques par la réplication statique consiste à déterminer un portefeuille d'options classiques dont la valeur est identique à celle de l'option exotique sur certaines frontières. L'option exotique est alors couverte par la vente à découvert de ce portefeuille.

Références complémentaires

Carr P. et R. Lee, "Realized volatility and Variance : Options via Swaps", *RISK*, mai 2007, 76-83.

Clewlow L. et C. Strickland, *Exotic Options : The State of the Art*, Thomson Business Press, London, 1997.

Demeterfi K., E. Derman, M. Kamal et J. Zou, "A Guide to Volatility and Variance Swaps", *Journal of Derivatives*, 6 (4), été 1999, 9-32.

Derman E., D. Ergener et I. Kani, "Static Options Replication", *Journal of Derivatives*, 2 (4), été 1995, 78-95.

Derman E., I. Kani et N. Chriss, "Static Options Replication", *Journal of Derivatives*, 1 (4), été 1994, 6-14.

Geske R., "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, 63-81.

Goldman B., H. Sosin et M. A. Gatto, "Path Dependent Options : Buy at the Low, Sell at the High", *Journal of Finance*, 34, décembre 1979, 1111-1127.

Margrabe W., "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", *Journal of Finance*, 33, mars 1978, 177-186.

Milewsky M. A. et S. E. Posner, "Asian Options : The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33 (3), septembre 1998, 409-422.

Ritchken P., "On Pricing Barrier Options", *Journal of Derivatives*, 3 (2), hiver 1995, 19-28.

Ritchken P., L. Sankarasubramanian et A. M. Vijh, "The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average", *Management Science*, 39, 1993, 1202-1213.

Rubinstein M. et E. Reiner, "Breaking Down the Barriers", *RISK*, septembre 1991, 28-35.

Rubinstein M., "Double Trouble", *RISK*, décembre 1991/janvier 1992, 53-56.

Rubinstein M., "One for Another", *RISK*, juillet/août 1991, 30-32.

Rubinstein M., "Options for the Undecided", *RISK*, avril 1991, 70-73.

Rubinstein M., "Pay Now, Choose Later", *RISK*, février 1991, 44-47.

Rubinstein M., "Somewhere Over the Rainbow", *RISK*, novembre 1991, 63-66.

Rubinstein M., "Two in One", *RISK*, mai 1991, 49.

Rubinstein M. et E. Reiner, "Unscrambling the Binary Code", *RISK*, octobre 1991, 75-83.

Stulz R., "Options on the Minimum or Maximum of Two Assets", *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, 161-185.

Turnbull S. M. et L. M. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, septembre 1991, 377-389.

Problèmes et exercices

26.1 Expliquez la différence entre une option forward start et une option chooser.

26.2 Quels sont les payoffs d'un portefeuille constitué d'un call lookback flottant et d'un put lookback flottant ayant la même échéance ?

26.3 Considérons une option chooser telle que son détenteur ait le droit de choisir entre un call et un put européens à tout instant pendant une période de deux ans. Les dates de maturité et les prix d'exercice sont identiques pour le call et le put et indépendants de la date à laquelle le choix est effectué. Pensez-vous

qu'il puisse être optimal d'effectuer le choix avant la fin de la période de deux ans ? Expliquez votre réponse.

26.4 Notons c_1 et p_1 les prix d'un call européen sur moyenne et d'un put européen sur moyenne, de prix d'exercice K et d'échéance T, c_2 et p_2 les prix d'un call européen à prix d'exercice moyen et d'un put européen à prix d'exercice moyen d'échéance T, et c_3 et p_3 les prix d'un call européen et d'un put européen classiques, de prix d'exercice K et d'échéance T. Montrez que :

$$c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3$$

26.5 Nous avons proposé dans ce chapitre une décomposition de l'option chooser en un call d'échéance T_2 et un put d'échéance T_1. Donnez une décomposition alternative en un call d'échéance T_1 et un put d'échéance T_2.

26.6 Deux formules d'évaluation du call down-and-out sont données à la section 26.9. La première s'applique à un niveau H de la barrière inférieur ou égal au prix d'exercice K, alors que la seconde s'applique à un niveau H de la barrière supérieur ou égal au prix d'exercice K. Montrez que les deux formules sont équivalentes quand $H = K$.

26.7 Expliquez pourquoi un put down-and-out vaut zéro quand la barrière est supérieure au prix d'exercice.

26.8 Supposez que le prix d'exercice d'un call américain sur une action ne versant pas de dividende augmente au taux g. Montrez que l'exercice anticipé du call n'est jamais optimal si g est inférieur au taux d'intérêt sans risque r.

26.9 Comment peut-on évaluer un put forward start sur une action ne versant pas de dividende, s'il est convenu que le prix d'exercice sera de 10 % supérieur au prix de l'action au moment où l'option démarre ?

26.10 Si le prix d'une action suit un mouvement brownien géométrique, quel est le processus suivi par $A(t)$, la moyenne arithmétique du prix de l'action entre la date zéro et la date t ?

26.11 Expliquez pourquoi la couverture delta-neutre est plus facile pour les options asiatiques que pour les options classiques.

26.12 Calculez le prix d'une option européenne d'échéance 1 an donnant le droit de livrer 100 onces d'argent en échange d'une once d'or. Les prix respectifs de l'or et de l'argent sont 1 520 $ et 16 $ l'once, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 10 %, la volatilité du prix de chacun de ces métaux précieux est estimée à 20 %, et la corrélation entre les deux prix vaut 0,7. Vous ignorerez les coûts de stockage.

26.13 Une option européenne down-and-out sur un actif vaut-elle autant qu'une option européenne down-and-out de caractéristiques identiques sur le prix futures de l'actif, pour un contrat futures ayant la même échéance que l'option ?

26.14 Répondez aux questions suivantes sur les options composées.

a. Quelle est la relation de parité call-put existant entre les prix d'un call sur call européen et d'un put sur call européen ? Montrez que les formules données à la section 26.7 vérifient cette relation.

b. Quelle est la relation de parité call-put existant entre les prix d'un call sur put européen et d'un put sur put européen ? Montrez que les formules données à la section 26.7 vérifient cette relation.

26.15 Un call lookback vaut-il plus ou moins à mesure que l'on augmente la fréquence d'observation du prix de l'actif pour le calcul du minimum ?

26.16 La valeur d'un call down-and-out augmente-t-elle ou diminue-t-elle à mesure que l'on accroît la fréquence d'observation du prix de l'actif pour la détermination de l'instant de franchissement de la barrière ? Répondez à la même question pour un call down-and-in.

26.17 Expliquez pourquoi un call européen classique est équivalent à la somme d'un call européen down-and-out et d'un call européen down-and-in. Est-ce aussi le cas pour les contrats de type américain ?

26.18 Quelle est la valeur d'un actif dérivé délivrant un flux de 150 € dans six mois si l'indice CAC 40 vaut plus de 3 500 points et zéro sinon ? Supposez pour les calculs que le niveau actuel de l'indice est de 3400 points, que le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 5 %, que la volatilité annuelle de l'indice est estimée à 20 % et que le rendement en dividende de l'indice est de 3 % par an.

26.19 Considérons un call down-and-out sur des contrats futures sur l'argent d'échéance 3 mois, de prix d'exercice 20 $ par once, dont la barrière est 18 $. Le prix futures est 19 $, le taux d'intérêt sans risque est égal à 5 % et la volatilité des futures sur l'argent est estimée à 40 % par an. Expliquez le fonctionnement de ce contrat d'option et évaluez-le. Quelle est la valeur d'un call classique sur contrat futures sur l'argent ayant les mêmes caractéristiques ? Quelle est la valeur d'un call down-and-in sur le même sous-jacent ayant des caractéristiques identiques ?

26.20 Considérons un call lookback européen flottant sur indice boursier d'échéance 9 mois nouvellement émis. Le niveau actuel de l'indice est de 400 points, le taux d'intérêt sans risque annuel est égal à 6 %, le rendement en dividende de l'indice est de 4 % par an, et la volatilité annuelle de l'indice est estimée à 20 %. Estimez ce contrat à l'aide du logiciel DerivaGem.

26.21 Estimez la valeur d'un call européen sur moyenne de prix, nouvellement émis, portant sur une action ne versant pas de dividendes et cotée 30 € aujourd'hui. Le prix d'exercice est fixé à 30 €, le taux d'intérêt sans risque est égal à 5 % et la volatilité du prix de l'action est estimée à 30 %.

26.22 Évaluez les contrats suivants à l'aide du logiciel DerivaGem.

a. Un call européen classique sur une action ne versant pas de dividendes. Le prix de l'action est 50 €, de même que le prix d'exercice, le taux sans risque annuel est égal à 5 %, la volatilité est estimée à 30 %, et le call arrive à échéance dans un an.

b. Un call down-and-out européen de caractéristiques identiques au contrat **a.** avec une barrière à 45 €.

c. Un call down-and-in européen de caractéristiques identiques au contrat **a.** avec une barrière à 45 €.

Montrez que la valeur de l'option **a.** est égale à la somme des valeurs des options **b.** et **c.**

26.23 Expliquez les ajustements à effectuer quand $r = q$:

a. pour les formules d'évaluation des calls lookback flottants de la section 26.11;

b. pour les formules donnant M_1 et M_2 dans la section 26.13.

26.24 Évaluez le swap de variance de l'exemple 26.4 si les volatilités implicites des options de prix d'exercice 800, 850, 900, 950, 1 000, 1 050, 1 100, 1 150 et 1 200 sont respectivement égales à 20 %, 20,5 %, 21 %, 21,5 %, 22 %, 22,5 %, 23 %, 23,5 % et 24 %.

26.25 Vérifiez que les résultats obtenus à la section 26.2, pour la valeur d'un actif dérivé payant un montant Q lorsque $S = H$, sont cohérents avec ceux obtenus à la section 15.6.

Questions complémentaires

26.26 Quelle est la valeur en dollars US d'un produit dérivé qui paie 10 000 £ dans un an si le taux de change dollar US/livre sterling est supérieur à 1,5000 à cette date ? Le taux de change est aujourd'hui 1,4800. Les taux d'intérêt en dollar US et en livre sterling sont respectivement égaux à 4 % et 8 %. La volatilité annuelle de ce taux de change est estimée à 12 %.

26.27 Considérons un call barrière up-and-out sur une action ne versant pas de dividendes. Le prix de l'action est 50 €, de même que le prix d'exercice, la volatilité est estimée à 30 %, le taux sans risque est égal à 5 %, l'option arrive à échéance dans un an et la barrière est fixée à 80 €. Utilisez le logiciel DerivaGem pour évaluer cette option et représentez la relation entre (a) le prix de l'option et le prix de l'action, (b) le delta et le prix de l'option, (c) le prix de l'option et la distance à l'échéance, et (d) le prix de l'option et la volatilité. Donnez une explication intuitive des résultats obtenus. Montrez que le delta, le gamma, le thêta et le vega d'un call barrière down-and-out peuvent être soit positifs, soit négatifs.

26.28 L'application F du développeur d'applications DerivaGem reprend l'exemple de réplication statique d'options présenté à la section 26.17. Elle permet la construction d'une couverture en utilisant quatre options (comme à la section 26.17) et de deux couvertures avec seize options.

a. Expliquez la différence entre les deux possibilités de construction de la couverture avec seize options. Expliquez intuitivement pourquoi la seconde possibilité fonctionne mieux.

b. Améliorez la couverture à quatre options en modifiant Tmat pour la troisième et la quatrième option.

c. Vérifiez à quel point les portefeuilles de couverture à seize options approchent le delta, le gamma et le vega de l'option barrière.

26.29 Considérons un call down-and-out d'échéance 2 ans sur une devise étrangère. Le taux de change initial est 0,90, le prix d'exercice est 1,00, la barrière est fixée à 0,80, le taux sans risque domestique est égal à 5 % et le taux étranger vaut 6 % ; la volatilité est estimée à 25 % par an. Utilisez le logiciel DerivaGem pour construire une stratégie de réplication statique de ce contrat avec cinq options.

26.30 La valeur d'un indice boursier est actuellement de 900 points. Le rendement en dividende est de 2 %, le taux sans risque est égal à 5 %, et la volatilité est estimée à 40 %. Utilisez les résultats de la note technique n° 27, accessible sur le site www.pearson.fr, pour calculer la valeur d'un call sur moyenne de prix, d'échéance 1 an et de prix d'exercice 900 si le niveau de l'indice boursier utilisé pour le calcul de la moyenne est observé tous les trimestres. Comparez ce résultat avec celui donné par DerivaGem pour la même option, mais avec une observation continue de la valeur de l'indice. Donnez une explication intuitive de la différence entre les deux prix.

26.31 Utilisez le développeur d'applications de DerivaGem pour comparer la performance des couvertures quotidiennes par le delta (a) des options considérées dans les tableaux 19.2 et 19.3, et (b) d'un call sur moyenne, de caractéristiques identiques. Utilisez pour cela l'application C. Pour l'option sur moyenne de prix, il vous faudra modifier le calcul du prix de l'option dans la cellule C16, les payoffs dans les cellules H15 et H16, ainsi que les deltas (cellules G46 à G186 et N46 à N186). Effectuez vingt séries de simulation de Monte-Carlo pour chaque option en appuyant autant de fois sur la touche F9. Pour chaque série, notez le coût d'émission et de couverture de l'option, les quantités échangées sur l'ensemble des vingt semaines et les quantités échangées entre les semaines 11 à 20. Commentez les résultats obtenus.

26.32 Modifiez l'application D du développeur d'applications de DerivaGem pour tester la performance des couvertures par le delta et le gamma d'une option composée call sur call sur 100 000 unités d'une devise étrangère pour un taux de change égal à 0,67, avec un taux sans risque domestique de 5 %, un taux sans risque étranger de 6 % et une volatilité de 12 %. La première option arrive à échéance dans vingt semaines et son prix d'exercice est fixé à 0,015. La seconde option arrive à échéance dans quarante semaines et son prix d'exercice est fixé à 0,68. Expliquez la façon dont vous modifiez les cellules. Commentez la performance de couverture.

26.33 De nombreuses banques européennes proposent aux investisseurs des certificats de surperformance (souvent désignés par les noms « accélérateurs », « booster », ou encore « sprint ») lorsqu'ils souhaitent investir dans des produits dérivés sur actions individuelles. Pour un investissement de départ d'une valeur égale au prix initial de l'action, le flux touché par l'investisseur en cas de hausse de l'action au cours de la période est égal à k fois la hausse de l'action, avec k une constante supérieure à 1. Le prix de l'action considéré à l'échéance est toutefois cappé à un niveau maximum M. En cas de baisse du prix de l'action au cours de la période, l'investisseur est exposé aux pertes, puisqu'il récupère simplement la valeur de l'action à l'échéance. Il ne touche pas les dividendes éventuellement versés par l'action.

a. Montrez que ce certificat de surperformance est un package.

b. Évaluez un tel certificat de surperformance à un an à l'aide de DerivaGem pour un prix initial de l'action de 50 € avec k = 1,5, M = 70 €, un taux sans risque de 5 % et une volatilité de 25 %. Des dividendes d'un montant de 0,50 € doivent être payés par l'action dans 2 mois, 5 mois, 8 mois et 11 mois.

26.34 Évaluez le swap de variance de l'exemple 26.4 pour une durée de vie du swap d'un mois au lieu de trois mois.

26.35 Établissez la relation existant entre un call classique, un call binaire et un call gap.

26.36 Établissez la formule d'évaluation d'une option à cliquets pour laquelle un montant Q est investi afin de délivrer un flux à la fin des n périodes. La rentabilité touchée à la fin de chaque période est le maximum entre la rentabilité de l'indice (dividendes exclus) et zéro.

Chapitre 27

Modèles et méthodes numériques avancés

Aux chapitres précédents, les modèles présentés s'appuyaient sur les hypothèses du modèle de Black et Scholes, et les procédures numériques employées étaient relativement simples. Nous présentons maintenant quelques modèles plus récents ainsi que les méthodes numériques associées.

Nous avons expliqué au chapitre 20 comment les traders pouvaient gérer les faiblesses du modèle fondé sur le mouvement brownien géométrique en ayant recours aux surfaces de volatilité. Ces surfaces donnent la volatilité à utiliser pour évaluer les options vanille avec la formule de Black-Scholes, en fonction de l'échéance et du prix d'exercice du contrat. En revanche, dans les modèles d'évaluation d'options exotiques du chapitre 26, il n'existe pas de moyen simple pour calculer la volatilité qui devrait être utilisée pour tenir compte de la courbe de volatilité qui s'ajuste aux options vanille. Par conséquent, il est difficile pour les traders de « choisir » la courbe de volatilité à introduire dans ces modèles. Par exemple, si la surface de volatilité donne une volatilité de 27 % pour évaluer une option vanille à un an de prix d'exercice 40 €, cette valeur peut être tout à fait inappropriée lorsqu'il s'agit d'évaluer une option barrière de même échéance et de même prix d'exercice.

La première partie de ce chapitre présente quelques alternatives à l'hypothèse de mouvement brownien géométrique pour le prix du sous-jacent. Les paramètres de ces modèles peuvent être choisis de façon à ajuster la courbe de volatilité observée sur le marché.

Dans la seconde partie sont analysées les extensions des méthodes numériques des chapitres précédents. Nous montrons comment utiliser des méthodes d'arborescence pour évaluer des options dont les payoffs dépendent de la trajectoire suivie par le sous-jacent (*path-dependent*). Nous développons quelques cas particuliers d'adaptation des méthodes numériques aux options barrières, ainsi que les techniques permettant d'évaluer des options sur sous-jacents multiples et corrélés. Enfin, nous expliquons comment la simulation de Monte Carlo peut aider à la prise en compte des possibilités d'exercice prématuré.

Comme aux chapitres précédents, les résultats sont présentés pour des actifs dont le sous-jacent paie des flux intermédiaires au taux q. Pour une option sur action, q est le taux de dividende ; s'il s'agit d'une option sur devise, q est le taux sans risque étranger, et si le sous-jacent est un contrat futures, q est le taux sans risque domestique.

27.1 Les alternatives au modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes suppose que le prix du sous-jacent à n'importe quelle date future suit une loi log-normale. Il existe cependant de nombreuses alternatives à cette hypothèse. On peut supposer que, même si les prix changent en temps continu avec des trajectoires continues, la loi suivie par ce prix à un instant donné est autre que la loi log-normale. Une deuxième possibilité consiste à autoriser des sauts dans le processus de prix. Enfin, une troisième voie consiste à supposer que l'évolution des prix se fait uniquement par sauts. Au cours de cette section, nous allons considérer des exemples de chacune de ces possibilités. Nous détaillerons en particulier le modèle à élasticité constante de la variance, le modèle de diffusion à sauts de Merton et le modèle variance-gamma. Ces trois modèles sont intégrés à la version 3.00 du logiciel DerivaGem. Ce type de processus stochastique de prix, tel que considéré dans cette section, est appelé processus de Levy [1].

Le modèle à élasticité constante de la variance

Le modèle à élasticité constante de la variance, ou modèle CEV (*Constant Elasticity of Variance*), suppose que le prix du sous-jacent dans l'univers risque-neutre est de la forme :

$$dS = (r - q)\, S\, dt + \sigma S^{\beta}\, dz$$

où r est le taux sans risque, q est le taux de dividende, z est un mouvement brownien, σ est la volatilité, et β est une constante positive [2]. Le paramètre σ est à peu de chose près équivalent à la volatilité du modèle lognormal usuel multipliée par $F_0^{1-\beta}$.

Quand $\beta = 1$, le modèle CEV s'identifie au mouvement brownien géométrique utilisé jusqu'ici. Quand $\beta < 1$, la volatilité s'accroît quand le prix diminue. Cela induit une distribution de probabilité compatible avec les observations sur les marchés d'actions, c'est-à-dire avec une queue de distribution plus épaisse à gauche qu'à droite [3] (voir graphique 20.4). Quand $\beta > 1$, la volatilité augmente avec le prix de l'actif, induisant une distribution de probabilité avec une queue plus épaisse à droite. Cela correspond à une courbe de volatilité implicite croissante avec le prix d'exercice. Elle est parfois observée sur les options sur futures.

1. De manière schématique, un processus de Lévy est un processus en temps continu dont les accroissements sont indépendants mais dont les trajectoires n'ont pas de raison d'être continues.

2. Voir J. C. Cox et S. M. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, mars 1976, 145-166.

3. Quand le prix de l'action baisse, cela rend encore plus probables d'autres baisses importantes, alors que si le prix monte, la volatilité diminue, rendant moins probables d'autres hausses importantes.

Les formules d'évaluation de calls et puts européens dans ce modèle CEV sont les suivantes :

$$c = S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \left[1 - \chi^2 \left(a,b+2,w\right)\right] - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, \chi^2 \left(w,b,a\right)$$
$$p = K \, \mathrm{e}^{-rT} \left[1 - \chi^2 \left(w,b,a\right)\right] - S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, \chi^2 \left(a,b+2,w\right)$$

quand $0 < \beta < 1$, et :

$$c = S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \left[1 - \chi^2 \left(w,-b,a\right)\right] - K \, \mathrm{e}^{-rT} \, \chi^2 \left(a,2-b,w\right)$$
$$p = K \, \mathrm{e}^{-rT} \left[1 - \chi^2 \left(a,2-b,w\right)\right] - S_0 \, \mathrm{e}^{-qT} \, \chi^2 \left(w,-b,a\right)$$

quand $\beta > 1$, avec :

$$a = \frac{\left[K \, \mathrm{e}^{-(r-q)\,T}\right]^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2 \, v} \quad , \quad b = \frac{1}{(1-\beta)} \quad , \quad w = \frac{S^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2 \, v}$$

et :

$$v = \frac{\sigma^2}{2\,(r-q)\,(\beta-1)} \left[\mathrm{e}^{2(r-q)(\beta-1)\,T} - 1\right]$$

Dans ces expressions, $\chi^2 \left(u,k,h\right)$ est la probabilité pour qu'une variable suivant une loi de χ^2 décentrée à k degrés de liberté, de paramètre de décentrage h, soit inférieure à u. Une procédure de calcul de $\chi^2 \left(u,k,h\right)$ est donnée dans la note technique n° 12 sur le site www.pearson.fr.

Le modèle CEV est très utile pour évaluer les options exotiques sur actions. Les paramètres sont choisis de façon à retrouver les prix des options vanille, dans la mesure du possible, en minimisant la somme des carrés des écarts entre les prix de marché et les prix évalués par le modèle.

Le modèle de diffusion à sauts de Merton

Merton a proposé un modèle dans lequel le prix de l'action suit un mouvement brownien géométrique auquel se superpose un processus à sauts [4].

Notons :

- λ : nombre moyen de sauts par année ;
- k : amplitude moyenne d'un saut, mesurée en pourcentage du prix de l'actif.

L'amplitude du saut est supposée tirée d'une loi de probabilité définie dans le modèle. La probabilité d'un saut pendant un intervalle de longueur Δt est égale à $\lambda \Delta t$. Le taux de croissance espéré du prix de l'actif, dû à la composante discontinue (les sauts), est égal à λk. Le processus de prix est alors :

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \lambda k)\, dt + \sigma \, dz + dp$$

4. Voir R. C. Merton, "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, mars 1976, 125-144.

où z est un mouvement brownien et p le processus qui engendre les sauts, appelé processus de Poisson. σ est la volatilité provenant du mouvement brownien géométrique. Les processus z et p sont supposés indépendants. L'hypothèse essentielle faite par Merton est que la composante discontinue de la rentabilité n'engendre que du risque spécifique (non systématique) et n'est donc pas rémunérée par le marché. Cela implique qu'un portefeuille construit comme dans le modèle de Black et Scholes, neutralisant le risque venant de z, sera rémunéré au taux sans risque.

Un cas particulier important du modèle de Merton est celui dans lequel le logarithme de un plus l'amplitude des sauts suit une loi normale. Si on note s l'écart-type de cette loi, Merton montre que le prix d'un call européen s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} f_n$$

où $\lambda' = \lambda(1+k)$. La variable f_n est le prix donné par le modèle de Black et Scholes quand le taux de dividende est q, la variance est :

$$\sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$$

et le taux sans risque :

$$r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}$$

avec $\gamma = \ln(1+k)$.

Le modèle engendre des queues de distribution épaisses à droite et à gauche ; il est notamment compatible avec les observations faites sur le marché des changes. Comme pour le modèle CEV, les paramètres sont choisis de façon à minimiser la somme des carrés des écarts entre prix de marché et prix théoriques.

La simulation des sauts

Les modèles à sauts peuvent être implémentés dans le cadre de simulations de Monte-Carlo. Avec des sauts engendrés par un processus de Poisson, la probabilité d'observer exactement m sauts au cours d'une période de durée t est égale à :

$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

où λ représente le nombre moyen de sauts par année. Ainsi, λt représente le nombre moyen de sauts sur une période de durée t.

Si l'on suppose une moyenne de 0,5 saut par an, la probabilité d'occurrence de m sauts sur une période de deux ans est donnée par l'expression :

$$\frac{\mathrm{e}^{-0,5\times 2}(0,5\times 2)^m}{m!}$$

Le tableau 27.1 donne les probabilités (a) d'observer exactement m sauts et (b) d'observer jusqu'à m sauts (m variant de 0 à 8) sur une période de deux ans. De telles valeurs peuvent facilement être calculées dans Excel à l'aide de la fonction LOI.POISSON().

Tableau 27.1 : Probabilités d'occurrence d'un nombre donné de sauts sur une période de deux ans

Nombre de sauts *m*	Probabilité d'occurrence de *m* sauts	Probabilité d'occurrence de *m* sauts ou moins
0	0,3679	0,3679
1	0,3679	0,7358
2	0,1839	0,9197
3	0,0613	0,9810
4	0,0153	0,9963
5	0,0031	0,9994
6	0,0005	0,9999
7	0,0001	1,0000
8	0,0000	1,0000

Pour simuler la réalisation d'un processus à sauts sur une période de deux ans, il convient de déterminer préalablement, pour chaque trajectoire simulée :

1. Le nombre de sauts ;
2. L'amplitude de chacun des sauts.

Pour déterminer le nombre de sauts d'une trajectoire donnée, il convient de procéder au tirage aléatoire d'un nombre compris entre 0 et 1 et de se référer au tableau 27.1. En cas de tirage inférieur à 0,3679, on considérera que le prix de l'actif ne subit aucun saut ; en cas de tirage compris entre 0,3679 et 0,7358, un seul saut surviendra ; en cas de tirage compris entre 0,7358 et 0,9197, deux sauts surviendront et ainsi de suite pour toutes les valeurs possibles du tirage. Selon la loi supposée pour l'amplitude des sauts, la détermination de cette dernière nécessite pour chacun un nouveau tirage aléatoire. Une fois le nombre et l'amplitude des sauts obtenus, il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de la variable simulée pour la trajectoire en question.

Dans les modèles de diffusion à sauts, les sauts se superposent sur le mouvement brownien géométrique généralement posé pour le prix des actions. Le processus est donc constitué de deux composantes qui doivent être simulées séparément. La composante de diffusion est simulée comme décrit aux sections 21.6 et 21.7, alors que la composante de saut est simulée comme nous l'avons montré ci-dessus. Dans le cadre de l'évaluation de produits dérivés, la rentabilité espérée de l'actif doit être égale au taux sans risque.

Le modèle variance-gamma

Le modèle variance-gamma est un bon exemple de modèle à sauts pur [5]. On y définit tout d'abord une variable g comme la variation jusqu'en T d'un processus gamma de

5. Voir D. B. Madan, P. P. Carr et E. C. Chang, "The Variance- Gamma Process and Option Pricing", *European Finance Review*, 2, 1998, 7-105.

taux moyen égal à 1 et de taux de variance v. Un processus gamma est un processus à sauts dans lequel des sauts de faible amplitude surviennent très souvent et des sauts de grande amplitude beaucoup plus rarement. La densité de g s'écrit :

$$\phi(g) = \frac{g^{T/(v-1)}\,\mathrm{e}^{-g/v}}{v^{T/v}\Gamma(T/v)}$$

où $\Gamma(.)$ est la densité de la loi gamma. Elle peut être calculée dans Excel à l'aide de la fonction LOI.GAMMA. À l'intérieur de la parenthèse, on a quatre arguments séparés par un point-virgule. Le premier est g, le deuxième T/v, le troisième v et le dernier est FAUX si on souhaite obtenir la valeur de la densité et VRAI si on veut obtenir la valeur de la fonction de répartition. Notons S_T le prix de l'actif à la date T, S_0 le prix aujourd'hui, r le taux d'intérêt sans risque et q le taux de dividende. Dans l'univers risque-neutre et sous les hypothèses du modèle variance-gamma, $\ln(S_T)$ suit une loi normale, conditionnellement à g. L'espérance conditionnelle s'écrit :

$$\ln(S_0) + (r-q)\,T + \omega + \theta g$$

et l'écart-type conditionnel est donné par :

$$\sigma\sqrt{g}$$

avec :

$$\omega = \frac{T}{v}\ln\left(1 - \theta v - \sigma^2 v/2\right)$$

Ce modèle variance-gamma est donc caractérisé par trois paramètres : v, σ, θ[6]. Le paramètre v est le taux de variance du processus gamma, σ est la volatilité et θ est le paramètre définissant l'asymétrie (*skewness*). Quand il est nul, $\ln(S_T)$ suit une loi symétrique. Quand il est négatif, la distribution montre une asymétrie négative (c'est le cas pour les actions). Enfin, lorsqu'il est positif, la distribution est caractérisée par une asymétrie positive.

Supposons maintenant que nous souhaitions utiliser Excel pour engendrer 10 000 tirages des variations de prix entre 0 et T en utilisant le modèle variance-gamma. Nous pouvons fixer les cellules E1 à E7 respectivement égales à T, v, θ, σ, r, q et S_0. En E8, on peut définir ω par la formule :

$$= \$E\$1*LN(1 - \$E\$3*\$E\$2 - \$E\$4*\$E\$4*\$E\$2/2)/\$E\$2$$

On procède alors de la façon suivante.

1. On tire un échantillon de taille 10 000 de g à l'aide de la fonction

   LOI.GAMMA.INVERSE()

   On stocke ces données dans la zone A1:A10000. Le tirage peut se faire à l'aide de la formule :

   $$= \text{LOI.GAMMA.INVERSE(ALEA(),\$E\$1/\$E\$2,\$E\$2)}$$

6. Il est bon de noter que ces paramètres sont susceptibles de modifications quand on passe de l'univers réel à l'univers risque-neutre. En revanche, pour les modèles de diffusion, la volatilité est la même dans les deux univers.

2. Pour chaque valeur de g, on tire au hasard une valeur z selon une loi normale de moyenne θg et d'écart-type $\sigma\sqrt{g}$. On peut pour cela écrire en B1 :

$$= \text{A1*\$E\$3+RACINE(A1)*\$E\$4*LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())}$$

Il suffit ensuite de recopier cette formule vers le bas jusqu'en B10000.

3. Le prix simulé S_T est donné par :

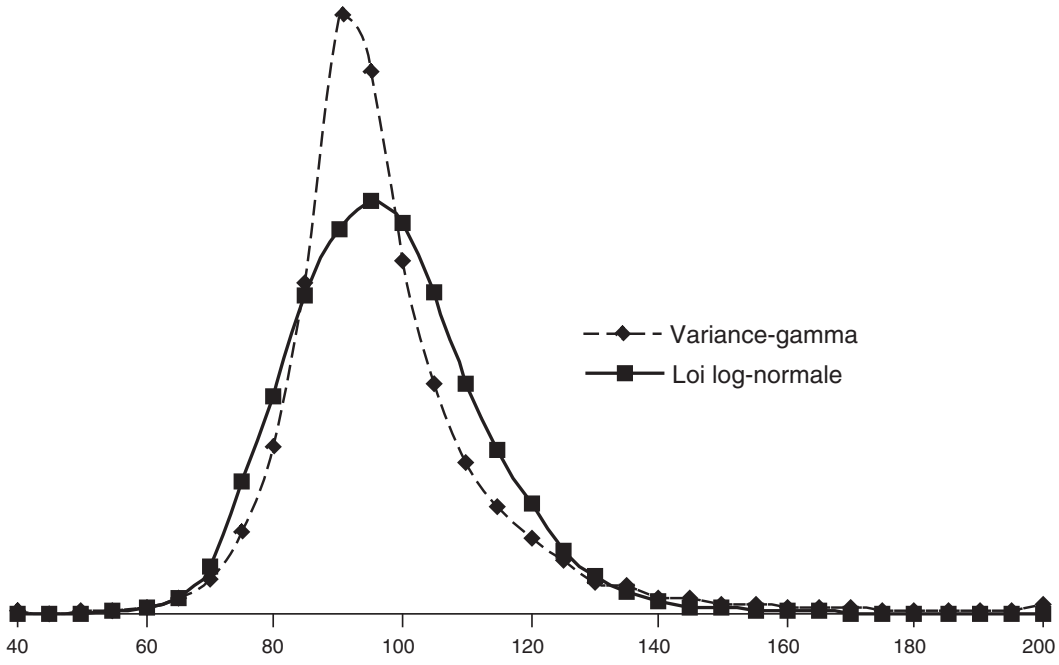
$$S_T = S_0 \exp[(r - q)\, T + \omega + z]$$

Si on entre dans la cellule C1 la formule :

$$= \text{\$E\$7*EXP((\$E\$5 - \$E\$6)*\$E\$1 + B1 + \$E\$8)}$$

et qu'on recopie celle-ci vers le bas jusqu'en C10000, on aura créé un échantillon de la loi de S_T.

Le graphique 27.1 montre la distribution obtenue dans le modèle variance-gamma pour le prix final quand le prix initial est 100, T = 0,5, v = 0,5, θ = 0,1, σ = 0,2 et $r = q = 0$.



Graphique 27.1 : Densités obtenues pour les processus variance-gamma et brownien géométrique

À des fins de comparaison, nous avons aussi fait figurer dans ce graphique la loi log-normale correspondant à une volatilité identique de 20 %. Même si cela ne saute pas aux yeux dans ce graphique, la loi variance-gamma a des queues de distribution plus épaisses que la loi log-normale.

Le paramètre g du modèle variance-gamma définit le taux d'arrivée des informations sur la période T. Pour des valeurs importantes de g, une grande quantité d'informations arrive, avec pour conséquence une moyenne et une variance de la distribution normale tirée à l'étape 2 relativement élevées. Le paramètre T est la mesure usuelle du temps, mais on fait parfois référence à g comme étant une mesure du temps économique ou encore du temps ajusté du flux d'informations.

Des formules quasi analytiques d'évaluation d'options dans le cadre variance-gamma ont été proposées par Madan *et al.* (1998). Le modèle variance-gamma tend à produire une courbe de volatilité en U, mais pas forcément symétrique. Cette forme est très prononcée pour les maturités courtes et s'atténue pour les maturités plus longues. Ce modèle peut être ajusté pour les options vanille sur actions ou sur devises.

27.2 Les modèles à volatilité stochastique

Quand la volatilité est une fonction du temps, comme nous l'avons vu au chapitre 23, le processus risque-neutre du sous-jacent peut s'écrire :

$$dS = (r - q)\, S\, dt + \sigma(t)\, S\, dz \tag{27.1}$$

Les formules de Black et Scholes restent valides à condition de retenir comme volatilité la moyenne des volatilités sur la durée de vie de l'option (voir problème 27.6). Si, par exemple, sur une période d'un an, la volatilité est de 20 % pendant le premier semestre et de 30 % pendant le deuxième, le taux de variance moyen est égal à :

$$0{,}5 \times (0{,}2)^2 + 0{,}5 \times (0{,}3)^2 = 0{,}065$$

Cela correspond à une volatilité de $\sqrt{0{,}065} = 25{,}5\ \%$.

L'équation (27.1) suppose que la volatilité instantanée de l'actif est parfaitement prévisible puisque σ est une fonction de t seulement. En pratique, la volatilité évolue aléatoirement. Cela a conduit les chercheurs à développer des modèles plus sophistiqués dans lesquels deux processus stochastiques sont à l'œuvre : le prix de l'actif et sa volatilité. Hull et White envisagent les processus suivants :

$$\frac{dS}{S} = (r - q)\, dt + \sqrt{V}\, dz_S \tag{27.2}$$

$$dV = a\,(V_L - V)\, dt + \xi\, V^{\alpha}\, dz_V \tag{27.3}$$

où a, α, V_L et ξ sont des constantes, z_V et z_S sont des processus de Wiener. La variable V est donc le taux de variance de l'actif. Le drift de V est conçu de façon à ramener V vers sa moyenne de long terme, V_L, à un rythme a.

Hull et White démontrent que, quand la volatilité stochastique n'est pas corrélée au prix de l'actif, le prix d'une option européenne est le prix de Black-Scholes moyen lorsque la moyenne est calculée selon la distribution de probabilité de la variance moyenne durant la durée de vie de l'option[7]. Le prix de l'option s'écrit donc :

$$\int_0^{+\infty} c(\overline{V})\, g(\overline{V})\, d\overline{V}$$

où $\overline{V}$ est la valeur moyenne du taux de variance, c est le prix du modèle de Black-Scholes, exprimé comme fonction de $\overline{V}$, et g est la densité de probabilité de $\overline{V}$ dans

7. Voir J. C. Hull et A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, juin 1987, 281-300. Ce résultat est indépendant du processus suivi par le taux de variance.

l'univers risque-neutre. Ce résultat peut aussi servir à montrer que le modèle de Black et Scholes surévalue les options proches de la monnaie et sous-évalue les options très en dehors ou très en dedans. Ce modèle est cohérent avec la forme des volatilités implicites observée sur les marchés d'options sur devises (voir section 20.2).

Quand le prix de l'actif et la volatilité sont corrélés, le problème est plus complexe, mais une simulation de Monte-Carlo peut être utilisée. Quand α = 0,5, Hull et White s'appuient sur un développement en série, et Heston fournit une expression analytique [8]. La forme des volatilités implicites obtenue quand la corrélation est négative est identique à celle qui est observée sur les options sur actions [9] (voir section 20.3).

Au chapitre 23, nous avons présenté les modèles EWMA et GARCH(1,1) comme des alternatives cohérentes de modélisation de la volatilité [10] (voir problème 23.14 pour l'équivalence entre le modèle GARCH(1.1) et le modèle à volatilité stochastique).

Le modèle SABR

Le modèle SABR, développé par Hagan *et al.* (2002) [11], est un modèle à volatilité stochastique très populaire dans l'industrie financière pour l'évaluation des options européennes et plus particulièrement des options de taux. L'intérêt de ce modèle repose sur sa capacité à reproduire relativement correctement les courbes de volatilité observés dans la réalité. Il est très utile pour gérer les risques associés aux variations de la courbe de volatilité au cours du temps.

Le modèle s'écrit :

$$dF = \sigma F^{\beta}\, dz$$
$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \nu\, dw$$

où F est le taux d'intérêt forward ou le prix forward d'un actif, dz et dw sont des processus de Wiener, σ est la volatilité stochastique, et β et ν sont des constantes [12]. Trois autres paramètres sont utilisés : ρ, qui représente la corrélation entre dz et dw, σ_0, la valeur initiale de σ, et F_0, la valeur initiale de F.

Hagan *et al.* (2002) développent une formule approchée pour la volatilité implicite du modèle de Black dans SABR pour une option européenne de prix d'exercice K (voir

8. Voir J. C. Hull et A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing caused by a Stochastic Volatility", *Advances in Futures and Options Research*, 3, 1988, 27-61 ; S. L. Heston, "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6 (2), 1993, 327-341.

9. Ce point est expliqué dans la note de bas de page 3 de ce chapitre.

10. Voir J. C. Duan, "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, 5, 1995, 13-32, et J. C. Duan, "Cracking the Smile", *RISK*, décembre 1996, 55-59.

11. Voir P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski et D. Woodward, "Managing Smile Risk", *Wilmott*, septembre 2002, 84-108, ainsi que www.math.ku.dk/~rolf/SABR.pdf. L'acronyme SABR signifie « stochastic alpha, beta et rho ». Nous utiliserons ici la notation σ plutôt que le α utilisé dans Hagan *et al.* (2002).

12. Il s'agit du processus pour F dans un univers où il a une tendance nulle. Quand les taux d'intérêt sont stochastiques, il convient, dans cet univers, d'actualiser le payoff espéré de l'actif dérivé entre la date T et la date 0 au taux prévalant pour une durée T. Nous verrons cela au chapitre suivant.

aux sections 18.7 et 18.8 pour le modèle de Black). Notons :

$$x = (F_0 K)^{(1-\beta)/2} \quad , \quad y = (1-\beta)\ln(F_0/K)$$
$$A = \frac{\sigma_0}{x\left(1 + y^2/24 + y^4/1920\right)} \quad , \quad B = 1 + \left(\frac{(1-\beta)^2\sigma_0^2}{24x^2} + \frac{\rho\beta\nu\sigma_0}{4x} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)T$$
$$\phi = \frac{\nu x}{\sigma_0}\ln(F_0/K) \quad , \quad \chi = \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\phi+\phi^2}+\phi-\rho}{1-\rho}\right)$$

La volatilité implicite s'écrit alors $AB\phi/\chi$. Pour $F = K$, cela donne[13] : $\sigma_0 B/(F_0^{1-\beta})$.

Le paramètre σ_0 définit le niveau de volatilité. (Cela correspond à peu de chose près à la volatilité du modèle lognormal usuel multipliée par $F_0^{1-\beta}$.) Le paramètre ρ définit la forme du smile de volatilité. La courbe est croissante pour les valeurs largement positives de ρ, décroissante pour les valeurs largement négatives de ρ, et en forme de U pour les valeurs intermédiaires de ρ. Le smile s'accentue avec l'augmentation de la valeur du paramètre ν (voir problème 27.24). Le modèle SABR est implémenté dans la dernière version de DerivaGem.

Le paramètre β est souvent fixé à $0{,}5$ quand le modèle SABR est utilisé pour évaluer des produits de taux. Les valeurs des paramètres ρ, σ_0 et ν qui permettent de reproduire la courbe de volatilité dépendent de la maturité T considérée. Il convient toutefois de noter, comme nous l'avons évoqué précédemment, que le modèle SABR a fait preuve de son utilité pour la gestion des risques de variations de la courbe de volatité.

27.3 La fonction de volatilité implicite

Pour évaluer des options exotiques, les institutions financières préfèrent utiliser des modèles qui sont déjà capables d'évaluer correctement les options classiques (vanille)[14]. Les modèles présentés jusqu'ici peuvent être calibrés chaque jour de façon à évaluer correctement les options vanille cotées sur le marché, mais l'ajustement n'est jamais parfait. En 1994, Derman et Kani, Dupire ainsi que Rubinstein ont développé un outil appelé « fonction de volatilité implicite » ou « arbre implicite » (modèle IVF, ***Implied Volatility Function***)[15]. Ce modèle est conçu pour ajuster parfaitement les prix d'options européennes observés aujourd'hui, indépendamment de l'allure des surfaces de volatilité. Le processus risque-neutre de prix de l'actif dans ce modèle est donné par :

$$dS = [r(t) - q(t)]\,S\,dt + \sigma(S,t)\,S\,dz$$

où $r(t)$ est le taux forward instantané pour un contrat d'échéance t et $q(t)$ est le taux de dividende comme fonction du temps. La volatilité $\sigma(S,t)$ dépend à la fois de S

13. D'autres chercheurs ont développé des formules légèrement plus précises, mais celle-ci est la plus utilisée en pratique.

14. Il y a une raison pratique à cela. Si une banque n'utilise pas un tel modèle, il y a un risque pour que les traders travaillant pour cette banque cherchent à arbitrer les modèles internes de la banque.

15. Voir B. Dupire, "Pricing with a Smile", *RISK*, février 1994, 18-20 ; E. Derman et I. Kani, "Riding on a Smile", *RISK*, février 1994, 32-39 ; M. Rubinstein, "Implied Binomial Trees", *Journal of Finance*, 49 (3), juillet 1994, 771-818.

et de t ; elle est choisie de façon à évaluer correctement les options cotées aujourd'hui. Dupire, Andersen ainsi que Brotherton-Ratcliffe obtiennent une expression analytique pour $\sigma(S,t)$ sous la forme [16] :

$$[\sigma(K,T)]^2 = 2\frac{\partial c_{\text{mkt}}/\partial T + q(T)\, c_{\text{mkt}} + K\,[r(T) - q(T)]\,\partial c_{\text{mkt}}/\partial K}{K^2\,(\partial^2 c_{\text{mkt}}/\partial K^2)} \tag{27.4}$$

où $c_{\text{mkt}}(K,T)$ est le prix d'un call européen de prix d'exercice K et de maturité T. Si un nombre suffisant de calls européens est coté sur le marché, cette équation peut être utilisée pour estimer $\sigma(S,\, t)$ [17].

Andersen et Brotherton-Ratcliffe mettent ce modèle en œuvre en utilisant l'équation (27.4) conjointement avec un schéma implicite aux différences finies. Une approche alternative, appelée méthode de l'arbre implicite, est suggérée par Derman et Kani ainsi que par Rubinstein. Elle consiste à construire un arbre de prix de l'actif cohérent avec les prix des options cotées sur le marché.

Quand le modèle IVF est utilisé par les professionnels, il est recalibré quotidiennement ; c'est donc un outil utile pour évaluer des options exotiques en cohérence avec les prix observés pour les options vanille. Comme nous l'avons montré au chapitre 20, les prix des options vanille permettent la détermination de la loi de probabilité du prix du sous-jacent à une date future quelconque. Il s'ensuit qu'avec le modèle IVF, on obtient une distribution de probabilité correcte pour le sous-jacent aux dates futures considérées. Par conséquent, les options qui engendrent un seul flux à une date donnée sont évaluées correctement par ce modèle. Cependant, la distribution jointe des prix pour un ensemble de dates futures, obtenue dans le cadre du modèle IVF, n'est pas forcément la bonne [18].

27.4 Les obligations convertibles

Nous allons maintenant voir comment modifier les méthodes du chapitre 21 pour résoudre des problèmes d'évaluation spécifiques, comme celui des obligations convertibles.

Le détenteur d'une obligation convertible a la possibilité d'échanger son obligation contre des actions, à certaines périodes de la vie de l'obligation. Le ratio de conversion est le nombre d'actions obtenues pour une obligation en cas de conversion. Le plus souvent, l'émetteur dispose d'une option de remboursement anticipé à un prix spécifié.

16. Voir B. Dupire, "Pricing With a Smile", *RISK*, février 1994, 18-20 ; L. B. G. Andersen et R. Brotherton-Ratcliffe, "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach", *Journal of Computational Finance*, 1 (2), hiver 1997/98, 5-37. Dupire considère le cas où r et q sont nuls. Andersen et Brotherton-Ratcliffe intègrent des considérations plus générales.

17. Une procédure de lissage est nécessaire pour obtenir la surface de volatilité.

18. Les options exotiques, comme les options composées ou à barrière, ne sont donc pas forcément évaluées de manière adéquate. Hull et Suo (2001) ont testé le modèle IVF en supposant que les prix des options étaient déterminés par un modèle à volatilité stochastique. Ils constatent que les options composées sont correctement évaluées, alors que des erreurs importantes sont commises pour les options à barrière (voir J. C. Hull et W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37 (2), juin 2002, 297-318).

Cependant, en cas d'exercice de cette option, le détenteur a la possibilité d'exercer son droit de conversion d'abord. Le remboursement est en fait, dans certains cas, un moyen de forcer la conversion. Il arrive aussi que l'option de remboursement ne puisse être exercée que si le cours de l'action est au-dessus d'un certain seuil.

Le risque de crédit joue un rôle important dans l'évaluation des obligations convertibles. Si l'on n'en tient pas compte, les coupons et le principal de l'obligation seront surévalués car actualisés au taux sans risque. Ingersoll a proposé un modèle d'évaluation des obligations convertibles, dans un cadre proche de celui du modèle de Merton (1974) décrit à la section 24.6 [19]. Il suppose que la valeur de l'entreprise émettrice suive un mouvement brownien géométrique et modélise les actions, les obligations convertibles et la dette classique comme des actifs contingents à la valeur de l'entreprise. Le risque de crédit est pris en compte en considérant que les créanciers sont complètement remboursés si et seulement si la valeur de la firme est supérieure à celle des dettes.

Les praticiens utilisent un modèle plus simple pour décrire l'évolution du prix de l'action à partir d'un arbre binomial classique. L'horizon temporel de l'arbre est la durée de vie de l'obligation convertible. On calcule la valeur de l'obligation convertible à l'échéance en tenant compte de l'option de conversion à cette date. Par induction arrière, on teste l'optimalité d'une conversion sur chacun des nœuds, ainsi que l'optimalité d'un remboursement anticipé. Si tel est le cas, on teste à nouveau l'optimalité de la conversion. En d'autres termes, la valeur à chaque nœud s'écrit :

$$\max[\min(Q_1\,;Q_2)\,;Q_3]$$

où Q_1 est la valeur en l'absence d'exercice des options détenues par l'émetteur et le souscripteur, Q_2 la valeur en cas de remboursement anticipé et Q_3 la valeur en cas de conversion.

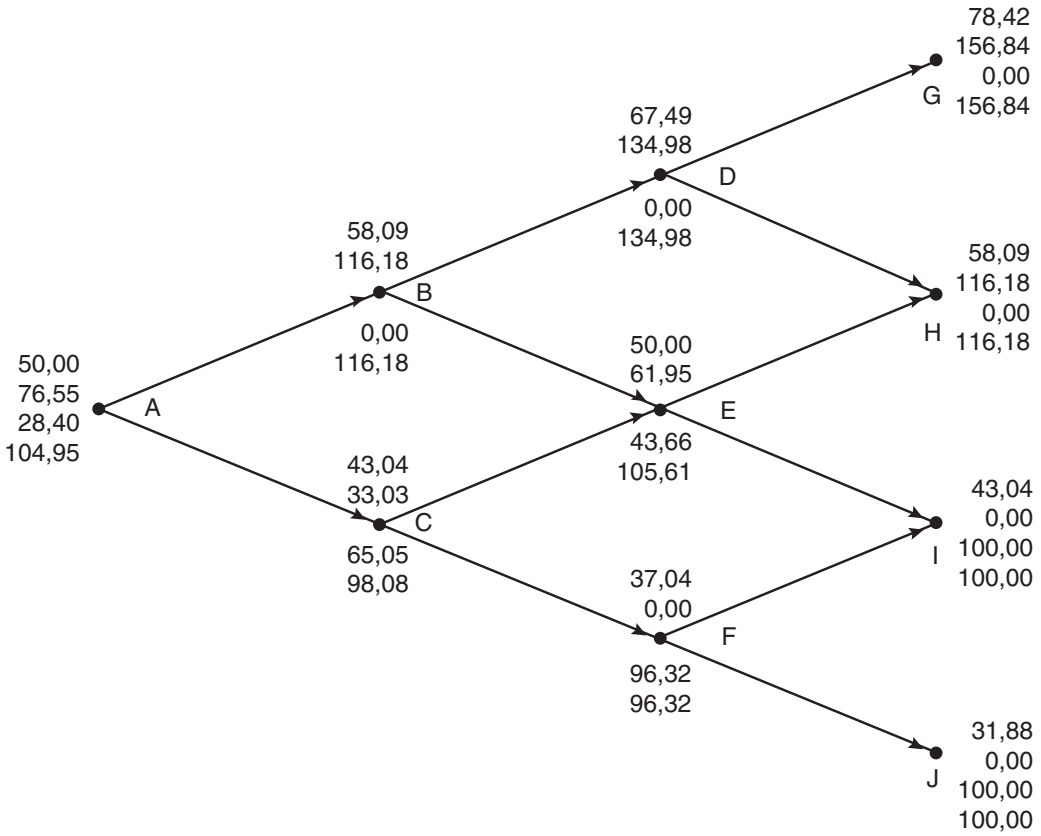
Quel taux d'actualisation faut-il retenir sur l'arbre ? Supposons tout d'abord que l'obligation ne puisse être convertie ou remboursée par anticipation. Il est alors approprié de retenir un taux d'actualisation « risqué ». En revanche, si l'on est certain de la conversion, il faut utiliser le taux sans risque. En pratique, on ne sait pas si l'obligation sera convertie ou non. On divise alors, à chaque nœud, le prix de la convertible en deux composantes. La première tient compte des cas qui conduisent à la conversion et la seconde des situations dans lesquelles l'obligation reste une obligation. Chaque composante se voit alors affecter le taux d'actualisation pertinent [20].

■ **Exemple 27.1** Considérons, à titre d'exemple simple, un zéro-coupon convertible de maturité 9 mois, de nominal 100 €, émis par une société XYZ. Cette obligation peut être échangée contre deux actions de la société à tout moment. Elle est remboursable par anticipation au prix de 115 €. L'action cote initialement 50 €, ne paie pas de dividendes pendant la durée de vie de la convertible, et sa volatilité est de 30 %. La courbe des taux ZC sans risque est plate à 10 % et celle des taux risqués

19. Voir J. E. Ingersoll, "A Contingent Claims Valuation of Convertible Securities", *Journal of Financial Economics*, 4, mai 1977, 289-322.

20. Cette démarche est formalisée dans K. Tsiveriotis et C. Fernandes, "Valuing Convertible Bonds with Credit Risk", *Journal of Fixed Income*, septembre 1998, 95-102.

correspondant à la société XYZ est plate à 15 %. Le graphique 27.2 montre comment l'arbre de l'action peut servir à évaluer la convertible.



Graphique 27.2 : Arbre d'évaluation d'une obligation convertible

Le chiffre supérieur est le prix de l'action, le deuxième la valeur de la composante action de la convertible, le troisième la valeur de la composante obligation, et le dernier est la somme des deux précédents, soit la valeur de l'obligation convertible. Les paramètres sont u = 1,1618, d = 0,8607, $a = \mathrm{e}^{r\Delta t}$ = 1,0253 et p = 0,5467. Aux nœuds terminaux, la convertible vaut $\max(100\,;2S_T)$. Par exemple, au nœud G, l'action vaut 78,42, la convertible 156,84 et cette valeur vient uniquement de la conversion ; il n'y a plus de composante obligataire. À l'inverse, au nœud I, l'obligation n'est pas convertie et vaut 100. On procède ensuite à l'induction arrière en testant chaque fois l'optimalité de la conversion ou du remboursement anticipé. Par exemple, au nœud D, on a une composante action qui vaut :

$$(0{,}5467 \times 156{,}84 + 0{,}4533 \times 116{,}18) \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 0{,}25} = 134{,}98$$

La composante obligataire a une valeur nulle. Au nœud F, on a une composante obligataire qui vaut :

$$100 \times \mathrm{e}^{-0{,}15\times 0{,}25} = 96{,}32$$

et la composante action est nulle.

Le nœud E est plus intéressant car les deux composantes sont positives. La composante action vaut :

$$(0{,}5467 \times 116{,}18 + 0{,}4533 \times 0) \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 0{,}25} = 61{,}95$$

et la composante obligation :

$$(0{,}5467 \times 0 + 0{,}4533 \times 100) \times \mathrm{e}^{-0{,}15 \times 0{,}25} = 43{,}66$$

ce qui conduit à une valeur de $61{,}95 + 43{,}66 = 105{,}61$ pour l'obligation convertible. On peut remarquer en outre qu'au nœud B, il y aura exercice de l'option de remboursement anticipé et conversion forcée. En effet, par le même type de calcul, on obtient une valeur de l'obligation convertible égale à 118,42. Il est donc optimal pour l'émetteur d'exercer son option à 115. Mais, dans ce cas, il est plus judicieux pour le souscripteur de convertir, puisque 2 actions valent 116,18. On obtient finalement au nœud A un prix de 104,95 pour la convertible, alors qu'une obligation classique sans clause optionnelle émise par cette même société vaudrait 89,36. L'option de conversion vaut donc $104{,}95 - 89{,}36 = 15{,}59$.

Quand des dividendes sur l'action ou des coupons sur l'obligation sont payés, il faut en tenir compte. À chaque nœud, on suppose d'abord que la convertible est une obligation et on inclut dans la composante obligataire la valeur actuelle des coupons payables à l'étape suivante. Pour tester si la conversion est optimale, on prend en compte la valeur actuelle des dividendes payables à l'étape suivante. Il est possible d'affiner les calculs en autorisant les taux sans risque et « risqués » à dépendre du temps, en s'appuyant sur les taux forward observés en date 0. L'arbre est alors construit selon la méthode décrite à la section 21.4. Les cash-flows survenant entre t et $t + \Delta t$ sont alors actualisés au taux forward pertinent pour cette période.

27.5 Les actifs dérivés dépendant de la trajectoire du support

Un actif dérivé dépendant de la trajectoire suivie par le support (path-dependent) est caractérisé par un payoff s'écrivant comme une fonction plus ou moins complexe de l'historique des prix du sous-jacent. Les options asiatiques ou les options lookback sont des exemples de tels actifs dérivés. Comme nous l'avons vu au chapitre 26, le payoff d'une option asiatique dépend du prix moyen du support, alors que le payoff d'une option lookback dépend du prix maximal ou minimal du sous-jacent. Lorsque des résultats analytiques ne peuvent être obtenus, on peut recourir aux simulations de Monte-Carlo pour évaluer des options path-dependent (voir chapitre 21). Il faut alors tirer un échantillon de trajectoires de prix du sous-jacent, calculer le payoff de l'option pour chacune d'entre elles, déterminer le payoff moyen sur l'échantillon et actualiser au taux sans risque. Quand l'échantillon comporte un grand nombre de trajectoires, la moyenne des valeurs d'option obtenues peut être considérée comme un bon estimateur.

Le problème essentiel est le plus souvent le temps de calcul nécessaire pour obtenir une estimation d'une précision raisonnable. De ce fait, il est délicat d'évaluer les options de type américain par cette méthode. Dans cette section, nous montrons comment les méthodes du chapitre 21 peuvent être étendues de façon à être applicables à certaines

options path-dependent [21]. Cette extension est plus efficace que la simulation de Monte-Carlo et peut être utilisée pour des options exotiques de type américain. Deux conditions d'application doivent cependant être vérifiées :

1. Le payoff doit dépendre d'une seule fonction F des trajectoires ;
2. Il doit être possible de calculer la valeur de F en $\tau + \Delta t$ à partir de la valeur de F à la date τ et de la valeur du support à la date $\tau + \Delta t$.

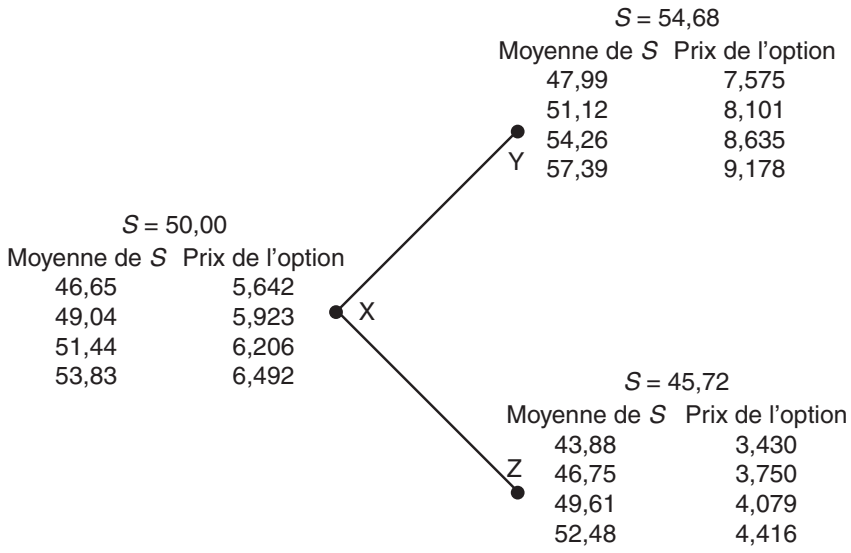
Dans un premier temps, il convient de construire l'arbre pour le prix du sous-jacent de la manière usuelle. L'étape suivante est réalisée par induction avant, pour calculer les minima et les maxima du support sur les trajectoires aboutissant à chaque nœud. En supposant que la valeur de la fonction F en $\tau + \Delta t$ dépend seulement de sa valeur en τ et du sous-jacent en $\tau + \Delta t$, les valeurs maximales et minimales de F en $\tau + \Delta t$ peuvent être facilement obtenues. Il convient alors de sélectionner des valeurs représentatives de F à chaque nœud. Une approche possible consiste à retenir le maximum, le minimum et un certain nombre d'autres valeurs régulièrement espacées entre ce maximum et ce minimum. Dans l'induction arrière appliquée ensuite, l'actif dérivé est évalué pour chaque valeur représentative de F. Quand la valeur de l'actif dérivé est requise pour évaluer d'autres valeurs de F sur l'arbre, on procède par interpolation des valeurs précédemment calculées.

Pour illustrer cette démarche, reprenons le call sur moyenne présenté dans l'exemple 26.3 à la section 26.13 et analysons le cas où le payoff dépend de la moyenne arithmétique des prix. Le prix initial de l'action est de 50 €, de même que le prix d'exercice ; le taux sans risque est 10 %, la volatilité 40 % et la maturité 1 an. Considérons ici un arbre comportant 20 pas de temps ; les paramètres sont alors $\Delta t = 0{,}05$, $u = 1{,}0936$, $d = 0{,}9144$, $p = 0{,}5056$ et $1 - p = 0{,}4944$. La fonction F est la moyenne arithmétique des prix du support.

Le graphique 27.3 montre les calculs sur une petite partie de l'arbre (à la fin de la quatrième sous-période). Le nœud X est situé à la date 0,2, alors que les nœuds Y et Z sont à la date 0,25 et peuvent être atteints à partir de X. Le prix en X est 50. L'induction avant permet de savoir que la moyenne arithmétique maximale en X est 53,83 et la moyenne minimale 46,65 (le prix initial et le prix atteint au nœud X entrent dans le calcul de ces moyennes). Au nœud Y, le prix est 54,68 et les moyennes maximale et minimale deviennent 57,39 et 47,99. De même, en Z, le prix est 45,72 et les moyennes maximale et minimale sont 52,48 et 43,88.

Supposons que nous ayons choisi quatre valeurs de F également réparties entre maximum et minimum. Au nœud X sont donc retenues les valeurs 46,65 ; 49,04 ; 51,44 et 53,83, alors qu'au nœud Y, elles sont égales à 47,99 ; 51,12 ; 54,26 et 57,39. Enfin, au nœud Z, elles valent 43,88 ; 46,75 ; 49,61 et 52,48. Nous supposons que l'induction arrière a déjà été réalisée pour calculer la valeur de l'option pour chaque valeur possible de la moyenne en Y et en Z. Ces valeurs apparaissent dans le graphique 27.3. Par exemple, en Y, l'option vaut 8,101 € quand la moyenne est 51,12 €.

21. Cette démarche a été suggérée par J. C. Hull et A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options", *Journal of Derivatives*, 1 (1), hiver 1993, 21-31.



Graphique 27.3 : Partie de l'arbre pour évaluer l'option sur moyenne arithmétique

Considérons le calcul de la valeur de l'option au nœud X quand la moyenne est 51,44 €. Si le prix du support devient celui du nœud Y, la nouvelle moyenne s'écrit :

$$\frac{5 \times 51{,}44 + 54{,}68}{6} = 51{,}98$$

La valeur de l'actif dérivé pour cette moyenne est obtenue par interpolation entre les deux valeurs d'options correspondant aux moyennes 51,12 et 54,26. Ce calcul donne :

$$8{,}247 = \frac{(51{,}98 - 51{,}12) \times 8{,}635 + (54{,}26 - 51{,}98) \times 8{,}101}{54{,}26 - 51{,}12}$$

La même démarche appliquée au nœud Z donne une valeur de 4,182 pour l'actif dérivé. On en déduit au nœud X, quand la moyenne est 51,44, une valeur d'option égale à :

$$(0{,}5056 \times 8{,}247 + 0{,}4944 \times 4{,}182)\, \mathrm{e}^{-0{,}1 \times 0{,}05} = 6{,}206$$

Les autres valeurs au nœud X sont obtenues de la même façon. En itérant le processus, on finit par obtenir la valeur de l'option au nœud initial, soit 7,17 €. Lorsque le nombre de pas de temps augmente ainsi que le nombre de valeurs représentatives de F à chaque nœud, le prix calculé pour l'option converge vers la valeur exacte. Avec soixante pas de temps et cent valeurs à chaque nœud, le prix est de 5,58 €, à comparer avec l'approximation analytique de l'exemple 26.3 qui valait 5,62 €.

L'avantage essentiel de cette méthode réside dans sa capacité à intégrer le caractère américain des options dans la procédure d'évaluation. Par rapport à ce qui vient d'être décrit, le seul changement consiste à tester à chaque nœud si l'exercice prématuré est optimal, pour chaque valeur représentative de F. Si l'option considérée précédemment était américaine, l'arbre à vingt pas de temps et trois ou quatre valeurs représentatives conduiraient à un prix de 7,77 € ; avec soixante pas de temps et cent valeurs représentatives, le prix obtenu serait égal à 6,17 €.

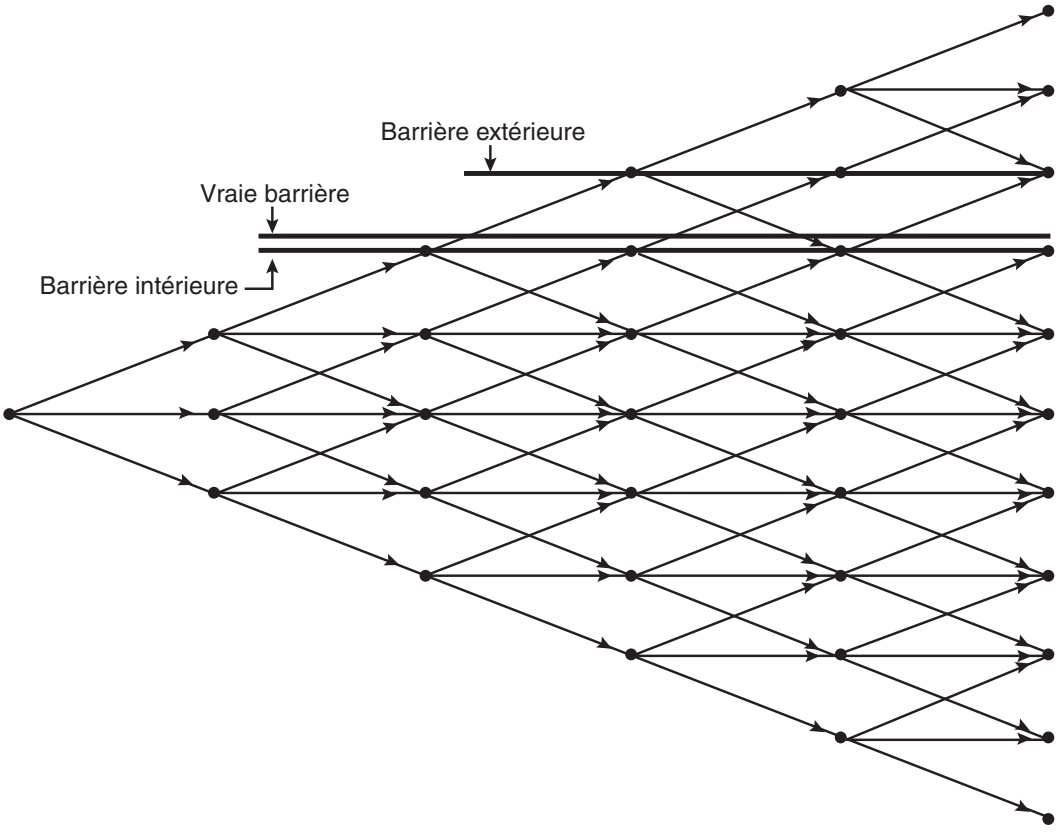
L'approche précédente est utile dans nombre de situations ; la précision des calculs peut être accrue par l'utilisation d'une interpolation quadratique plutôt que linéaire.

27.6 Les options barrières

Au chapitre 26, nous avons exposé les résultats analytiques permettant l'évaluation des options barrières standard. Nous traitons ici des procédures numériques utilisables quand des solutions analytiques ne sont pas disponibles.

En principe, ces options peuvent être évaluées à l'aide des arbres binomiaux et trinomiaux présentés au chapitre 21. Considérons par exemple une option up-and-out ; il est possible de l'évaluer simplement comme une autre option, à ceci près que si un nœud situé au-dessus de la barrière est atteint, la valeur de l'option devient nulle.

Malheureusement, la convergence est ici aussi très lente. Des subdivisions très fines sont nécessaires pour atteindre une approximation raisonnable. Ceci s'explique par le fait que la barrière sur l'arbre n'est pas située exactement au même niveau que la barrière réelle [22]. Définissons la barrière intérieure comme les nœuds se situant juste en dessous de la vraie barrière (c'est-à-dire plus proches du centre de l'arbre) et la barrière extérieure comme les nœuds se situant juste au-dessus de la vraie barrière (c'est-à-dire plus éloignés du centre de l'arbre que la barrière réelle). Le graphique 27.4 montre ces deux barrières, intérieure et extérieure, pour un arbre trinomial, en supposant que la vraie barrière est horizontale.



Graphique 27.4 : Barrières intérieure et extérieure pour un arbre trinomial

22. Pour une discussion sur ce point, voir P. P. Boyle et S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", *Journal of Derivatives*, 1 (4), été 1994, 6-14.

La procédure de calcul suppose en fait que la barrière extérieure est la vraie barrière car les conditions d'annulation de la valeur de l'option sont atteintes sur ces nœuds. Quand le pas de temps est Δt, l'espace vertical entre deux nœuds est d'ordre $\sqrt{\Delta t}$. Les erreurs commises en assimilant la barrière extérieure à la vraie barrière sont donc d'ordre $\sqrt{\Delta t}$.

Pour améliorer l'évaluation, on utilise la démarche suivante.

1. On calcule la valeur de l'actif dérivé en supposant que la barrière intérieure est correcte.
2. On calcule la valeur de l'actif dérivé en supposant que la barrière extérieure est correcte.
3. On interpole entre les deux prix obtenus.

Une approche alternative consiste à supposer que les nœuds se situent sur la barrière. Notons S_0 le prix initial de l'actif et H la barrière. Dans un arbre trinomial, il y a trois mouvements possibles à chaque nœud pour le sous-jacent : un mouvement proportionnel de hausse u, un prix inchangé ou un mouvement proportionnel de baisse d, avec $d = 1/u$. Il est toujours possible de choisir u pour qu'il y ait des nœuds sur la barrière. Il faut pour cela :

$$H = S_0\, u^N$$

ou encore :

$$\ln(H) = \ln(S_0) + N\, \ln(u)$$

pour un entier N, positif ou négatif.

Quand les arbres trinomiaux ont été analysés à la section 21.4, la valeur $u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$ a été suggérée, ou encore $\ln(u) = \sigma\sqrt{3\Delta t}$. Dans la situation considérée ici, il est bon de choisir $\ln(u)$ aussi proche que possible de cette valeur, en cohérence avec ce qui a été présenté précédemment. Il faut donc :

$$\ln(u) = \frac{\ln(H) - \ln(S_0)}{N}$$

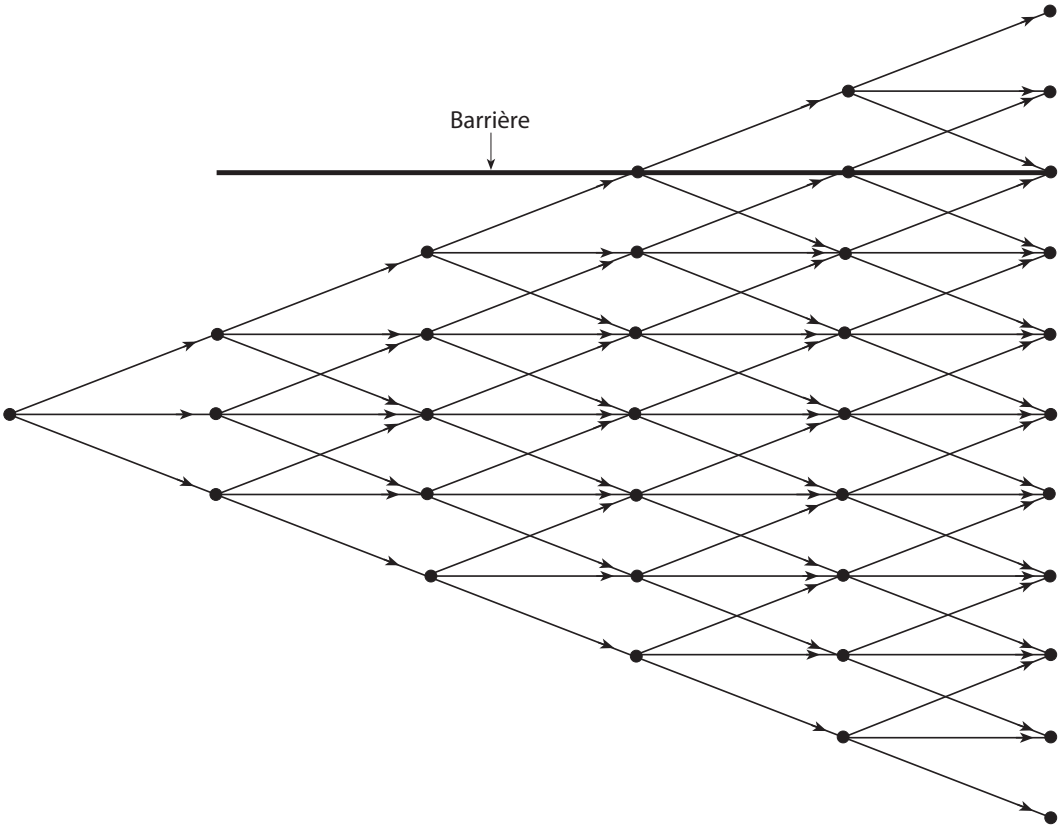
avec :

$$N = \mathbf{Int}\left[\frac{\ln(H) - \ln(S_0)}{\sigma\sqrt{3\Delta t}} + 0{,}5\right]$$

où Int[x] désigne la partie entière de x.

L'arbre trinomial obtenu est celui représenté dans le graphique 27.5. Les probabilités sur les différentes branches sont données par (avec les notations habituelles) :

$$p_d = -\frac{(r - q - \sigma^2/2)\Delta t}{2\ln(u)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2\,(\ln(u))^2},\ p_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln(u))^2},$$
$$p_u = \frac{(r - q - \sigma^2/2)\Delta t}{2\ln(u)} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2\,(\ln(u))^2}$$



Graphique 27.5 : Arbre binomial avec des nœuds sur la barrière

Les méthodes présentées jusqu'ici fonctionnent correctement si le prix initial du sous-jacent n'est pas trop proche d'une barrière. Quand ce n'est pas le cas, la méthode du maillage adaptatif, évoquée à la section 21.4, peut être suivie [23]. L'intuition qui sous-tend cette approche est que l'efficacité numérique peut être améliorée en greffant sur un maillage grossier un second maillage beaucoup plus fin dans les régions où cela est nécessaire. Dans le cas des options barrières, il s'agit donc d'avoir un arbre présentant un maillage plus fin au voisinage des barrières et des nœuds situés sur les barrières.

27.7 Les options sur deux actifs corrélés

Un autre problème numérique délicat est celui de l'évaluation d'options dépendant de deux actifs sous-jacents dont les prix sont corrélés. Parmi les nombreuses approches possibles, nous en présentons trois ci-après.

La transformation des variables

Il est relativement facile de construire un arbre tridimensionnel pour représenter l'évolution de deux variables non corrélées. Il suffit de construire un arbre bidimensionnel pour chacune d'elles, puis de les combiner. Les probabilités des branches de l'arbre

23. Voir S. Figlewski et B. Gao, "The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing", *Journal of Financial Economics*, 53, 1999, 313-351.

résultant sont simplement les produits des probabilités des branches des arbres bidimensionnels. Considérons par exemple deux actions de prix S_1 et S_2 ; chacune peut être représentée par un arbre à la Cox-Ross-Rubinstein. Notons p_1 et p_2 les probabilités de hausse de chacun des deux titres ; l'arbre tridimensionnel est alors construit ainsi :

S_1 et S_2 augmentent avec une probabilité : $p_1 p_2$;
S_1 augmente et S_2 baisse avec une probabilité : $p_1 (1 - p_2)$;
S_1 baisse et S_2 augmente avec une probabilité : $p_2 (1 - p_1)$;
S_1 et S_2 baissent avec une probabilité : $(1 - p_2)(1 - p_1)$.

Supposons maintenant que S_1 et S_2 soient corrélés et que les processus risque-neutre d'évolution des prix soient :

$$dS_1 = (r - q_1)\, S_1\, dt + \sigma_1\, S_1\, dz_1$$

$$dS_2 = (r - q_2)\, S_2\, dt + \sigma_2\, S_2\, dz_2$$

On note ρ la corrélation instantanée des deux processus z_1 et z_2. Définissons alors deux nouveaux processus x_1 et x_2 de la manière suivante [24] :

$$x_1 = \sigma_2 \ln(S_1) + \sigma_1 \ln(S_2)$$

$$x_2 = \sigma_2 \ln(S_1) - \sigma_1 \ln(S_2)$$

Le lemme d'Itô permet d'écrire :

$$d \ln (S_1) = (r - q_1 - \sigma_1^2/2)\ dt + \sigma_1\, dz_1$$

$$d \ln (S_2) = (r - q_2 - \sigma_2^2/2)\ dt + \sigma_2\, dz_2$$

On peut donc en déduire :

$$dx_1 = [\sigma_2 (r - q_1 - \sigma_1^2/2) + \sigma_1 (r - q_2 - \sigma_2^2/2)]\, dt + \sigma_1\sigma_2 (\, dz_1 + \, dz_2)$$

$$dx_2 = [\sigma_2 (r - q_1 - \sigma_1^2/2) - \sigma_1 (r - q_2 - \sigma_2^2/2)]\, dt + \sigma_1\sigma_2 (\, dz_1 - \, dz_2)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} V(dz_1 + dz_2) &= 2\,(1 + \rho)\, dt \\ V(dz_1 - dz_2) &= 2\,(1 - \rho)\, dt \\ \text{cov}(dz_1 + dz_2 \ ;\ dz_1 - dz_2) &= 0 \end{aligned}$$

on peut écrire :

$$dx_1 = [\sigma_2 (r - q_1 - \sigma_1^2/2) + \sigma_1 (r - q_2 - \sigma_2^2/2)]\, dt + \sigma_1\sigma_2 \sqrt{2\,(1 + \rho)}\, dz_A$$

$$dx_2 = [\sigma_2 (r - q_1 - \sigma_1^2/2) - \sigma_1 (r - q_2 - \sigma_2^2/2)]\, dt + \sigma_1\sigma_2 \sqrt{2\,(1 - \rho)}\, dz_B$$

où z_A et z_B sont des processus de Wiener standard non corrélés.

24. Cette idée a été suggérée par J. C. Hull et A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 1990, 87-100.

Les processus x_1 et x_2 peuvent alors être représentés par deux arbres séparés. Dans un intervalle de longueur Δt, x_i a une probabilité p_i d'augmenter de h_i et une probabilité $1 - p_i$ de baisser de h_i. Les variables p_i et h_i sont choisies de façon à ajuster les deux premiers moments de x_1 et x_2. Comme ces deux processus ne sont pas corrélés, les deux arbres peuvent être combinés en un seul arbre tridimensionnel, comme nous l'avons décrit précédemment. À chaque nœud de cet arbre, on peut facilement retrouver les valeurs correspondantes de S_1 et S_2 sous la forme :

$$S_1 = \exp\left(\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}\right) \text{ et } \quad S_2 = \exp\left(\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_1}\right)$$

L'évaluation d'un actif dérivé par induction arrière se fait alors selon la procédure habituelle.

L'utilisation d'arbres non rectangulaires

Rubinstein a suggéré le recours à un arbre non rectangulaire pour représenter deux actifs corrélés [25]. À partir d'un nœud quelconque où les prix sont S_1 et S_2, chacun des quatre nœuds suivants peut être atteint avec une probabilité 0,25. Ils sont définis ainsi :

$$(S_1u_1,\, S_2A)\,;\, (S_1u_1,\, S_2B)\,;\, (S_1d_{1,}S_2C)\,;\, (S_2d_1,\, S_2D)$$

avec :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \exp\left[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\,\Delta t + \sigma_1\sqrt{\Delta t}\right] \\
d_1 &= \exp\left[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)\,\Delta t - \sigma_1\sqrt{\Delta t}\right] \\
A &= \exp\left[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\,\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho + \sqrt{1-\rho^2}\right)\right] \\
B &= \exp\left[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\,\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho - \sqrt{1-\rho^2}\right)\right] \\
C &= \exp\left[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\,\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho - \sqrt{1-\rho^2}\right)\right] \\
D &= \exp\left[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)\,\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}\left(\rho + \sqrt{1-\rho^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Quand la corrélation est nulle, cette formulation est équivalente à la construction d'arbres séparés en utilisant la méthode présentée à la section 21.4.

L'ajustement des probabilités

Une troisième approche consiste à construire d'abord un arbre tridimensionnel en faisant comme si S_1 et S_2 n'étaient pas corrélés, puis à ajuster les probabilités pour tenir compte de la corrélation [26]. Nous utilisons ici la méthode présentée à la section 21.4,

25. Voir M. Rubinstein, "Return to Oz", *RISK*, novembre 1994, 67-70.

26. Cette approche a été suggérée dans le contexte des taux d'intérêt par J. C. Hull et A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II : Two-Factor Models", *Journal of Derivatives*, hiver 1994, 37-48.

dans laquelle chacun des quatre mouvements possibles du couple (S_1, S_2) a une probabilité d'occurrence égale à 0,25 (voir tableau 27.2). Pour tenir compte des corrélations, on ajuste les probabilités, comme cela est indiqué dans le tableau 27.3.

Tableau 27.2 : Combinaison de variables binomiales non corrélées

	Mouvement de S_1	
Mouvement de S_2	**Baisse**	**Hausse**
Hausse	0,25	0,25
Baisse	0,25	0,25

Tableau 27.3 : Combinaison de variables binomiales dont la corrélation est ρ

	Mouvement de S_1	
Mouvement de S_2	**Baisse**	**Hausse**
Hausse	0,25 $(1-\rho)$	0,25 $(1+\rho)$
Baisse	0,25 $(1+\rho)$	0,25 $(1-\rho)$

27.8 Simulation de Monte-Carlo et options américaines

La simulation de Monte-Carlo est bien adaptée à l'évaluation d'options dont le payoff dépend de la trajectoire suivie par le sous-jacent (path-dependent), ou dépend de plusieurs variables. De même, les arborescences et les schémas aux différences finies fonctionnent bien pour les options américaines. Comment donc évaluer les options qui sont à la fois américaines et path-dependent, ou les options américaines dont le payoff dépend de plusieurs variables ?

À la section 27.5, nous avons montré comment modifier la construction des arbres pour tenir compte de la dépendance des payoffs aux trajectoires du sous-jacent. Un certain nombre de chercheurs ont adopté une approche différente en tentant d'utiliser la simulation de Monte-Carlo pour les options américaines[27]. Nous exposons ci-après deux approches de ce type.

27. Tilley fut le premier à publier une solution de ce type ; voir J. A. Tilley, "Valuing American Options in a Path Simulation Model", *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 1993, 83-104.

L'approche par les moindres carrés

Quand une option est américaine, il faut, à chaque date possible d'exercice, choisir si l'on exerce ou non. La valeur d'exercice est en général facile à calculer. Plusieurs chercheurs, notamment Longstaff et Schwartz, indiquent un moyen de déterminer la valeur de l'option, si celle-ci n'est pas exercée, dans le cadre d'une simulation de Monte-Carlo [28]. Ils s'appuient sur une méthode des moindres carrés pour déterminer le meilleur ajustement entre la valeur de continuation (non exercice) de l'option et les variables pertinentes pour la décision d'exercice, à chaque date où celui-ci est possible. Cette méthode est illustrée ci-après par l'exemple figurant dans l'article de Longstaff et Schwartz.

Considérons un put américain de maturité 3 ans sur une action ne payant pas de dividendes. Le put peut être exercé à la fin de chaque année, le taux sans risque continu est 6 %, le prix de l'action est égal à 1,0 et le prix d'exercice 1,1. Supposons que l'échantillon de huit trajectoires du cours du support donné dans le tableau 27.4 ait été tiré (en pratique, on tirerait bien évidemment un échantillon beaucoup plus important).

Tableau 27.4 : Échantillon de trajectoires pour l'évaluation du put

N° trajectoire	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

Si l'option pouvait seulement être exercée à l'échéance, le payoff serait égal à la valeur intrinsèque à cette date ; celle-ci apparaît dans la dernière colonne du tableau 27.5.

Si le put est dans la monnaie à la fin de l'année 2, le détenteur doit décider s'il exerce ou non. Dans le tableau 27.4, on voit que cette question se pose pour les trajectoires 1, 3, 4, 6, 7. Pour celles-ci, on suppose une relation du type :

$$V = a + bS + cS^2$$

où S est le prix du sous-jacent en fin d'année 2 et V la valeur de l'option (actualisée en date 0) si elle n'est pas exercée à cette date. Les cinq observations de S sont ici 1,08, 1,07, 0,97, 0,77 et 0,84.

28. Voir F. A. Longstaff et E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach", *Review of Financial Studies*, 14 (1), printemps 2001, 113-147.

Tableau 27.5 : Flux en cas d'exercice en fin d'année 3

N° trajectoire	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,00	0,00	0,18
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,20
7	0,00	0,00	0,09
8	0,00	0,00	0,00

Dans le tableau 27.5, les valeurs correspondantes de V sont $0{,}00\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}18\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 1}$; $0{,}20\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 1}$ et $0{,}09\,\mathrm{e}^{-0{,}06\times 1}$. On utilise ces données pour déterminer les valeurs de a, b et c qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^{5}\left(V_i - a - b\,S_i - c\,S_i^2\right)^2$$

où V_i et S_i correspondent à la i-ème observation de V et S. On obtient alors $a=-1{,}07$; $b=2{,}983$ et $c=-1{,}813$. La relation s'écrit donc :

$$V = -1{,}070 + 2{,}983\,S - 1{,}813\,S^2$$

Les valeurs de l'option en fin d'année 2 sur les trajectoires 1, 3, 4, 6 et 7 sont donc 0,0369 ; 0,0461 ; 0,1176 ; 0,1520 et 0,1565. À partir du tableau 27.4, on sait que les valeurs d'exercice en date 2 sont 0,02 ; 0,03 ; 0,13 ; 0,33 et 0,26. L'option devrait donc être exercée à cette date sur les trajectoires 4, 6 et 7. Le tableau 27.6 résume ces éléments en envisageant l'exercice aux dates 2 ou 3.

Tableau 27.6 : Flux en cas d'exercice en fins d'années 2 ou 3

N° trajectoire	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,00	0,13	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,33	0,00
7	0,00	0,26	0,00
8	0,00	0,00	0,00

On poursuit le raisonnement en déterminant les trajectoires pour lesquelles l'option est dans la monnaie en date 1. Il s'agit des trajectoires 1, 4, 6, 7 et 8. Le tableau 27.4

indique que les prix correspondants du sous-jacent sont 1,09 ; 0,93 ; 0,76 ; 0,92 et 0,88, respectivement. Les valeurs correspondantes de V, déduites du tableau 27.6, sont alors $0{,}00\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; $0{,}13\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; $0{,}33\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; $0{,}26\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$ et $0{,}00\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$.

La relation des moindres carrés est cette fois :

$$V = 2{,}038 - 3{,}335\,S + 1{,}356\,S^2$$

Les valeurs de continuation de l'option en date 1 sur les trajectoires 1, 4, 6, 7 et 8 sont alors 0,0139 ; 0,1092 ; 0,2866 ; 0,1175 et 0,1533. Le tableau 27.4 montre par ailleurs que les valeurs d'exercice en date 1 sont 0,01 ; 0,17 ; 0,34 ; 0,18 et 0,22. On en déduit qu'un exercice prématuré est optimal sur les trajectoires 4, 6, 7 et 8. Le tableau 27.7 récapitule ces résultats. La valeur de l'option est déterminée, sur chaque trajectoire, par l'actualisation au taux sans risque des flux correspondants. La moyenne sur les huit trajectoires donne l'estimation finale de la valeur de l'option, c'est-à-dire ici 0,1144. Cette valeur étant supérieure à 0,1 (valeur intrinsèque de l'option en date 0), il n'est pas optimal d'exercer immédiatement.

Tableau 27.7 : Flux de l'option

N° trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,17	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,34	0,00	0,00
7	0,18	0,00	0,00
8	0,22	0,00	0,00

Cette méthode se généralise aisément ; quand l'option peut être exercée à tout moment, il suffit de multiplier le nombre de dates et ainsi d'augmenter le nombre de prix simulés sur chaque trajectoire. On peut aussi supposer que la relation existant entre V et S est plus compliquée, cubique plutôt que quadratique, par exemple. La méthode peut aussi être utilisée dans le cas où la décision d'exercice dépend de plusieurs variables d'état. On impose une forme fonctionnelle à la relation existant entre V et les variables, et on en estime les paramètres avec les moindres carrés, comme dans l'exemple précédent.

Paramétrisation de la frontière d'exercice prématuré

Plusieurs contributions, celle d'Andersen notamment, ont proposé une approche consistant à paramétrer la frontière d'exercice prématuré. Les valeurs optimales des paramètres sont déterminées par une méthode itérative, en débutant à la date d'échéance

de l'option et en procédant par induction arrière [29]. Pour illustrer cette approche, continuons sur l'exemple du put avec les huit trajectoires du tableau 27.4. Dans ce cas, la frontière d'exercice prématuré à la date t peut être paramétrée par une valeur critique, notée $S^*(t)$, de S. Si le prix du sous-jacent à la date t passe en deçà de $S^*(t)$, l'option est exercée. La valeur de $S^*(3)$ est bien sûr 1,1, prix d'exercice de l'option. Déterminons maintenant $S^*(2)$; choisissons tout d'abord une valeur inférieure à 0,77 ; l'option n'est alors jamais exercée en date 2. Ses valeurs sur chacune des huit trajectoires sont 0,00 ; 0,00 ; $0{,}07\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; $0{,}18\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; 0,00 ; $0{,}20\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; $0{,}09\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$ et 0,00. La valeur moyenne est ici 0,0636. Si l'on choisit $S^*(2)$ = 0,77, les valeurs de l'option sur les huit trajectoires deviennent 0,00 ; 0,00 ; $0{,}07\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; $0{,}18\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$; 0,00 ; 0,33 ; $0{,}09\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1}$ et 0,00. La moyenne est dans ce cas 0,0813. On fait les mêmes calculs quand $S^*(2)$ prend les valeurs 0,84 ; 0,97 ; 1,07 et 1,08. Les valeurs moyennes de l'option pour ces quatre cas sont 0,1032 ; 0,0982 ; 0,0938 et 0,0963. La valeur maximale est donc obtenue pour $S^*(2)$ = 0,84. Pour être tout à fait précis, la valeur optimale est située entre 0,84 et 0,97.

On calcule ensuite $S^*(1)$ en supposant tout d'abord $S^*(1) < 0{,}76$; dans ce cas, l'option n'est jamais exercée en $t = 1$ et elle vaut $0{,}1032\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1} = 0{,}0972$. Avec $S^*(1) = 0{,}76$, les valeurs de l'option pour les différentes trajectoires, calculées comme précédemment, ont une moyenne égale à 0,1008. On essaie ensuite pour $S^*(1)$ les valeurs 0,88 ; 0,92 ; 0,93 et 1,09. Les valeurs moyennes d'options obtenues sont respectivement 0,1283 ; 0,1202 ; 0,1215 et 0,1228. Il s'ensuit que la valeur optimale de $S^*(1)$ se situe entre 0,88 et 0,92. Enfin, en date 0, la valeur de l'option sans exercice prématuré est égal à $0{,}1283\,\mathrm{e}^{-0,06\times 1} = 0{,}1208$. Cette valeur est supérieure à la valeur d'exercice immédiat de 0,1.

En pratique, des dizaines de milliers de simulations sont mises en œuvre pour déterminer la frontière d'exercice prématuré dans cette méthode. Quand cette frontière a été obtenue, de nouvelles simulations sont réalisées pour, cette fois, évaluer l'option en tenant compte de la frontière d'exercice prématuré déterminée dans l'étape précédente. Cet exemple de put américain est un cas simple car le seuil d'exercice prématuré à une date donnée dépend uniquement de la valeur du sous-jacent à cette date. Dans certains produits plus complexes, la paramétrisation de la frontière d'exercice ne trouve pas de solution aisée.

Les bornes supérieures

Les deux approches qui viennent d'être décrites tendent à sous-évaluer les options américaines car la frontière d'exercice prématuré déterminée par ces méthodes n'est pas exactement la frontière optimale. Cette remarque a conduit Andersen et Broadie à proposer une procédure fournissant une borne supérieure à la valeur de l'option [30]. Cette technique peut être utilisée conjointement avec n'importe laquelle des méthodes four-

29. Voir L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudean Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model", *Journal of Computational Finance*, 3 (2), hiver 2000, 1-32.

30. Voir L. Andersen et M. Broadie, "A Primal-Dual Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options", *Management Science*, 50 (9), 2004, 1222-34.

nissant une borne inférieure du prix de l'option pour obtenir un encadrement du vrai prix de l'option américaine considérée.

Résumé

Plusieurs modèles ont été développés dans le but d'ajuster les courbes de volatilité observées en pratique. Le modèle à élasticité constante de la variance (CEV) engendre une courbe de volatilité analogue à celle qui est observée sur les options sur actions. Le modèle de diffusion à sauts permet quant à lui d'obtenir une courbe telle que celle qui est observée pour les options sur devises. Les modèles à volatilité stochastique, plus souples, permettent d'engendrer les deux types de courbes observées sur les options sur actions ou sur devises. La fonction de volatilité implicite procure encore une plus grande souplesse. Elle permet d'ajuster parfaitement une courbe de volatilité aux prix des options européennes cotées sur le marché.

La simulation de Monte-Carlo est l'approche la plus naturelle pour l'évaluation des options path-dependent. Elle présente cependant deux inconvénients : le temps de calcul nécessaire est important et elle ne peut être utilisée aisément pour les options américaines.

Heureusement, des modèles d'arbres permettent d'évaluer de nombreuses options path-dependent. Cette approche consiste à choisir quelques valeurs représentatives de la fonction reliant payoffs et trajectoires à chaque nœud, et à procéder par induction arrière.

L'évaluation des options lookback par cette méthode est un peu plus subtile. Plutôt que d'évaluer l'option en unités monétaires, il faut retenir le prix du sous-jacent comme numéraire.

L'approche binomiale peut aussi être adaptée pour l'évaluation des obligations convertibles. Il convient de prendre en compte l'éventualité de l'optimalité de la conversion sur chacun des nœuds, de même que celle de l'optimalité d'un remboursement anticipé. Le taux d'actualisation à appliquer dépend de la conversion ou non de l'obligation.

Les méthodes d'arbres peuvent aussi servir à l'évaluation de nombreuses options barrières, mais la convergence est lente lorsqu'on affine la subdivision du temps. Une des possibilités pour gérer ce problème consiste à modifier l'arbre de façon qu'il y ait toujours des nœuds sur les barrières. Une autre méthode consiste en une interpolation pour tenir compte du fait que les nœuds se situent en général de part et d'autre des barrières. Enfin, il est aussi possible d'affiner le maillage dans les zones critiques, proches des barrières.

Lorsque les payoffs des options dépendent de deux actifs sous-jacents corrélés, il est nécessaire de construire des variables non corrélées à partir de ces sous-jacents. L'évolution de ces variables est modélisée selon le schéma usuel, et les deux arbres sont ensuite combinés pour obtenir un seul arbre tridimensionnel. À chaque nœud, on procède à la transformation inverse pour retrouver les valeurs des variables corrélées. Une autre solution consiste à construire l'arbre comme si les variables n'étaient pas corrélées, puis à ajuster les probabilités sur les branches de façon à tenir compte de la corrélation.

La simulation de Monte-Carlo n'est pas, *a priori*, adaptée à l'évaluation des options américaines. Cependant, deux transformations de cette méthode existent, qui peuvent pallier cet inconvénient. La première est fondée sur une méthode de moindres carrés permettant de lier la valeur de l'option non exercée aux variables pertinentes. La seconde consiste à paramétrer la frontière d'exercice prématuré et à la déterminer de manière itérative par induction arrière.

Références complémentaires

Andersen L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model", *Journal of Computational Finance*, 3 (2), hiver 2000, 1-32.

Andersen L. B. G. et R. Brotherton-Ratcliffe, "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach", *Journal of Computational Finance*, 1 (2), hiver 1997/98), 3-37.

Bodurtha J. N. et M. Jermakyan, "Non-Parametric Estimation of an Implied Volatility Surface", *Journal of Computational Finance*, 2 (4), été 1999, 29-61.

Boyle P. P. et S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", *Journal of Derivatives*, 1 (4), été 1994, 6-14.

Conze A. et R. Viswanathan, "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options", *Journal of Finance*, 46, 1991, 1893-1907.

Cox J. C. et S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, mars 1976, 145-166.

Derman E. et I. Kani, "Riding on a Smile", *RISK*, février 1994, 32-39.

Duan J.-C., "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, 5, 1995, 13-32.

Duan J.-C., "Cracking the Smile", *RISK*, décembre 1996, 55-59.

Dupire B., "Pricing With a Smile", *RISK*, février 1994, 18-24.

Figlewski S. et B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing", *Journal of Financial Economics*, 53, 1999, 313-351.

Heston S. L., "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6 (2), 1993, 327-343.

Hull J. et A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options", *Journal of Derivatives*, 1 (1), hiver 1993, 21-31.

Hull J. C. et A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, juin 1987, 281-300.

Hull J. C. et W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37 (2), juin 2002, 297-318.

Longstaff F. A. et E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", *Review of Financial Studies*, 14 (1), printemps 2001, 113-147.

Madan D. B., P. P. Carr et E. C. Chang, "The Variance- Gamma Process and Option Pricing", *European Finance Review*, 2, 1998, 7-105.

Merton R. C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, mars 1976, 125-144.

Rebonato R., *Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox*, 2nd ed., Wiley, Chichester, 2004.

Ritchken P. et R. Trevor, "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes", *Journal of Finance*, 54 (1), février 1999, 377-402.

RUBINSTEIN M., "Implied Binomial Trees", *Journal of Finance*, 49 (3), juillet 1994, 771-818.

RUBINSTEIN M., "Return to Oz", *RISK*, novembre 1994, 67-70.

STUTZER M., "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation", *Journal of Finance*, 51, décembre 1996, 1633-1652.

TILLEY J. A., "Valuing American Options in a Path Simulation Model", *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 1993, 83-104.

Problèmes et exercices

27.1 Vérifiez que les formules du modèle CEV satisfont la relation de parité call-put.

27.2 Déterminez le prix d'un call européen dans le modèle de diffusion à sauts de Merton dans le cas où $r = 0{,}05$, $q = 0$, $\lambda = 0{,}3$, $k = 0{,}5$, $\sigma = 0{,}25$, $S_0 = 30$, $K = 30$, $s = 0{,}5$ et $T = 1$. Utilisez DerivaGem pour vérifier votre résultat.

27.3 Vérifiez que la relation de parité call-put est satisfaite dans le modèle de diffusion à sauts de Merton lorsque l'amplitude du saut est log-normale.

27.4 Supposons que la volatilité d'un actif soit de 20 % entre les mois 0 et 6, de 22 % entre les mois 6 et 12, et de 24 % entre les mois 12 et 24. Quelle volatilité doit-on utiliser dans le modèle de Black et Scholes pour évaluer une option à 2 ans ?

27.5 Dans le cadre du modèle de diffusion à sauts de Merton, considérons le cas où les sauts ramènent le prix de l'actif vers 0. λ désigne le nombre moyen de sauts par an. Montrez que le prix d'un call européen dans cet univers est le même que celui d'un call de mêmes caractéristiques, avec un processus de prix ne comportant pas de sauts mais un taux sans risque égal à $r + \lambda$ au lieu de r. La possibilité de sauts réduit-elle ou augmente-t-elle la valeur du call dans ce cas ? (Indication : évaluez l'option en l'absence de sauts, puis avec un ou plusieurs sauts. La probabilité qu'il n'y ait pas de saut avant la date T est $\mathrm{e}^{-\lambda T}$).

27.6 Soit S_0 le prix de date 0 d'une action en payant pas de dividendes ; l'intervalle $[0;T]$ est divisé en deux sous-périodes de longueurs t_1 et t_2. Pendant la première sous-période, le taux sans risque et la volatilité de l'action sont notés r_1 et σ_1 ; r_2 et σ_2 désignent les mêmes variables pendant la seconde sous-période. L'univers est supposé risque-neutre.

a. Utilisez les résultats du chapitre 15 pour déterminer la loi du prix en date T en fonction de r_1, r_2, σ_1, σ_2, t_1, t_2, S_0.

b. Soit $\overline{r}$ le taux sans risque moyen entre 0 et T, et $\overline{V}$ la variance moyenne sur $[0;T]$; quelle est la loi du prix en T en fonction de $\overline{r}$, $\overline{V}$, T et S_0 ?

c. Comment se modifient les résultats des questions **a.** et **b.** s'il y a trois sous-périodes avec des taux sans risque et des volatilités différents ?

d. Montrez que si le taux sans risque, r, et la volatilité, σ, sont des fonctions déterministes du temps, la loi de probabilité du prix de l'action en T dans l'univers risque-neutre s'écrit :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln(S_0) + \left(\overline{r} - \frac{1}{2}\overline{V}\right) T; \sqrt{\overline{V}T}\right)$$

où $\overline{r}$ est le taux sans risque moyen, $\overline{V}$ la moyenne de σ^2, et S_0 le prix initial.

27.7 Écrivez les équations permettant de simuler la trajectoire du prix de l'actif dans le modèle à volatilité stochastique des équations (27.2) et (27.3).

27.8 « Le modèle IVF ne donne pas forcément la surface de volatilité correcte. » Expliquez cette affirmation.

27.9 « Le modèle IVF modélise correctement la valeur de tout actif dérivé dont le payoff dépend du prix du sous-jacent à une seule date. » Expliquez pourquoi.

27.10 Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer un call lookback américain sur une devise quand le taux de change initial est 1,6, le taux sans risque domestique 5 % par an, le taux sans risque étranger 8 %, la volatilité du taux de change 15 % et la maturité 18 mois. Utilisez l'approche de la section 27.5.

27.11 Qu'arrive-t-il au modèle variance-gamma quand le paramètre v tend vers 0 ?

27.12 Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer un put américain sur la moyenne géométrique des prix d'une action ne versant pas de dividendes. L'action cote 40 €, le prix d'exercice est 40 €, le taux sans risque 10 % par an, la volatilité 35 % par an et la maturité 3 mois. La moyenne géométrique est mesurée entre aujourd'hui et l'échéance de l'option.

27.13 Peut-on utiliser l'approche d'évaluation d'options path-dependent présentée à la section 27.5 pour évaluer une option américaine d'échéance 2 ans procurant un payoff $\max(S_{\text{moy}} - K\,;0)$, où S_{moy} est le prix moyen du sous-jacent sur les trois mois précédant la date d'exercice ? Justifiez votre réponse.

27.14 Vérifiez que le nombre 6,492 dans le graphique 27.3 est correct.

27.15 Dans l'exemple de la section 27.8, analysez la décision d'exercice prématuré pour les huit trajectoires. Quelle est la différence entre ces décisions dans l'approche par moindres carrés et dans l'approche consistant à paramétrer la frontière d'exercice prématuré ? Pour l'échantillon de trajectoires considéré, quelle méthode donne la valeur d'option la plus élevée ?

27.16 Une action cote 100 € et ne verse pas de dividendes ; un put européen sur cette action a un prix d'exercice de 110 € et une échéance à 1 an. Le taux sans risque est 5 % et la variance moyenne sur la durée de vie de l'option est de 0,06 avec une probabilité 0,2 ; 0,09 avec une probabilité de 0,5 et 0,12 avec une probabilité de 0,3. La volatilité n'est pas corrélée avec le prix. Utilisez DerivaGem pour estimer la valeur de l'option.

27.17 Quand il existe deux barrières dans la définition du contrat d'option, comment peut-on construire un arbre dont les nœuds se situent sur les barrières ?

27.18 Considérons un ZC à 18 mois de nominal 100 € qui peut être converti en cinq actions de l'entreprise A, pendant toute sa durée de vie. L'action cote aujourd'hui 20 € et ne paie pas de dividendes. Le taux sans risque est de 6 % par an en composition continue, et la volatilité de l'action en l'absence de défaut est de 25 % par an. Le taux actuariel des obligations (classiques) émises par cette société est de 10 % pour toutes les maturités. L'obligation est remboursable par anticipation à 110 €. Utilisez un arbre à trois périodes pour calculer la valeur de l'obligation convertible. Quelle est celle de l'option de conversion (nette de l'option de remboursement anticipé) ?

Questions complémentaires

27.19 Un call lookback européen flottant sur indice, d'une durée de vie de 9 mois, vient d'être émis. L'indice vaut aujourd'hui 400, le taux sans risque est de 6 % par an, le rendement en dividende de l'indice est de 4 % et la volatilité de l'indice de 20 %. Utilisez l'approche de la section 27.5 pour évaluer l'option et comparez votre réponse à celle qui est donnée par DerivaGem en utilisant la formule analytique d'évaluation.

27.20 La note technique n° 13 sur le site www.pearson.fr présente une méthode d'évaluation des options lookback différente. Évaluez l'option lookback du problème 27.19 avec cette méthode et montrez qu'elle donne un résultat identique à celui obtenu à la section 27.5.

27.21 Les volatilités employées pour évaluer une option sur devise de maturité 6 mois sont celles du tableau 20.2. Les taux sans risque domestique et étranger sont égaux à 5 % et le taux de change aujourd'hui est égal à 1,0000. Considérez un bull spread consistant en l'achat d'un call de prix d'exercice 1,05 et la vente d'un call de prix d'exercice 1,10, les deux options ayant une durée de vie de 6 mois.

a. Quelle est la valeur du spread ?

b. Quelle volatilité pour les deux options donne la valeur correcte du bull spread (utilisez le développeur d'applications de DerivaGem conjointement avec le solveur d'Excel) ?

c. Les réponses précédentes appuient-elles l'affirmation énoncée au début de ce chapitre, selon laquelle la volatilité à utiliser pour évaluer des options exotiques va parfois à l'encontre de l'intuition ?

d. La fonction de volatilité implicite (IVF) donne-t-elle le prix correct pour le spread ?

27.22 Reprenez l'analyse de la section 27.8 concernant l'exemple du put, sous l'hypothèse d'un prix d'exercice à 1,13. Utilisez à la fois l'approche des moindres carrés et la paramétrisation de la frontière d'exercice prématuré.

27.23 Considérons un modèle SABR dans lequel on a $F_0 = 5$, $\beta = 0{,}5$, $\sigma_0 = 0{,}447$ (ce qui équivaut à une volatilité de 20 % dans un modèle lognormal) et $T = 1$. Montrez comment la courbe de volatilité varie en fonction de ρ pour (a) $\nu = 0{,}6$ et (b) $\nu = 1{,}2$. Vous pourrez prendre des valeurs de ρ comprises entre $-0{,}4$ et $0{,}4$ et des prix d'exercice distants de 0,5 et compris entre 4 et 6.

27.24 Considérons un call européen d'échéance 6 mois et de prix d'exercice 100 € sur une action ne versant pas de dividendes. L'action vaut aujourd'hui 100 € et le taux d'intérêt sans risque est de 5 %. Répondez aux questions suivantes en vous aidant de DerivaGem.

a. Quel est le prix de Black-Scholes de l'option si la volatilité est de 30 % ?

b. Dans un modèle CEV avec $\beta = 0{,}5$, quelle volatilité donne le même prix d'option qu'en **a.** ?

c. Considérons un modèle de diffusion à sauts de Merton, avec une fréquence moyenne d'un saut par an, une amplitude moyenne de saut de 2 %, et un écart-type de un plus l'amplitude de saut de 20 %. Quelle est la volatilité

de la composante continue du processus qui donne le même prix d'option qu'en **a.** ?

d. Considérons un modèle variance-gamma avec $\theta = 0$ et $v = 40$ %. Quelle volatilité donne le même prix d'option qu'en **a.** ?

e. Pour les modèles utilisés en **b.**, **c.** et **d.**, déterminez le smile de volatilité à partir des calls européens de prix d'exercice 80 et 120. Décrivez la nature des distributions de probabilité induites par les smiles obtenus.

27.25 Une obligation convertible (OC) à 3 ans, de nominal 100 €, a été émise par la société ABC. Le taux de coupon est de 5 %, payable en fin de chaque année. Cette OC peut être convertie en titres ABC à la fin des deux premières années, en 3,6 actions en année 1 et 3,5 actions en année 2, juste après le paiement de coupon. L'action cote aujourd'hui 25 €, la volatilité est de 25 %, et elle ne paie pas de dividendes. Le taux sans risque continu est de 5 % et le taux actuariel continu des obligations ABC est de 7 %.

a. Utilisez un arbre à trois périodes pour évaluer l'OC.

b. Combien vaut l'option de conversion ?

c. Si l'émetteur peut rembourser par anticipation à 115 € pendant les deux premières années, quelle influence cela a-t-il sur le prix de l'OC et sur la valeur de l'option de conversion ?

d. Comment modifiez-vous votre analyse si l'action paie un dividende de 1 € après 6 mois, 18 mois et 30 mois ? Il n'est pas utile de détailler les calculs.

27.26 Montrez qu'en l'absence totale de recouvrement en cas de défaut de l'obligation, une obligation convertible peut être évaluée en supposant que (a) la rentabilité espérée et le taux d'actualisation sont égaux à $r + \lambda$ et (b) la probabilité de défaut est nulle.

Chapitre 28

Martingales, changements de mesure et de numéraire

Dans les chapitres précédents, nous avons évalué les options avec des taux d'intérêt constants. Nous abandonnons maintenant cette hypothèse restrictive, de façon à préparer le lecteur à l'évaluation des produits dérivés de taux, question qui sera traitée aux chapitres 29 à 34.

L'évaluation dans un univers risque-neutre, présentée dans les chapitres précédents, repose sur deux étapes : (a) la détermination des flux futurs espérés de l'actif dérivé sous la probabilité risque-neutre et (b) l'actualisation de ces flux espérés au taux sans risque.

Quand les taux d'intérêt sont constants et les marchés complets, cette méthode permet d'évaluer les actifs dérivés sans ambiguïté. Quand les taux sont stochastiques, le problème est plus délicat. Que signifie l'actualisation au taux sans risque dans ce cadre ? Doit-on considérer que, chaque jour, la rentabilité espérée est égale au taux (sans risque) pour l'horizon d'une journée ? Doit-on plutôt retenir un horizon d'un an, de cinq ans ? En d'autres termes, il s'agit de définir l'actualisation au taux sans risque.

Dans ce chapitre, nous montrons que les choix possibles sont multiples et que chacun d'eux correspond à un univers risque-neutre particulier. Nous définissons tout d'abord le *prix de marché du risque* et nous montrons que la rentabilité en excès du taux sans risque est, pour tout actif dérivé, proportionnelle à ce prix de marché du risque, calculé par rapport à chacune des variables déterminant les rentabilités, c'est-à-dire par rapport aux variables fondamentales jugées pertinentes pour la description de l'incertitude dans l'économie. L'univers risque-neutre « classique » est celui dans lequel tous les prix de marché du risque sont nuls. Nous verrons cependant que des descriptions alternatives sont parfois bien utiles.

Les *martingales* sont des processus stochastiques essentiels dans l'évaluation risque-neutre. Une martingale est un processus constant en espérance conditionnelle. En d'autres termes, l'espérance de la valeur future d'un tel processus, conditionnellement à l'information présente, est égale à sa valeur présente. En particulier, ce processus a un

drift nul. Un résultat fondamental de ce chapitre est l'existence d'une mesure martingale équivalente. Il s'agit d'une probabilité sous laquelle les prix, exprimés en unités d'un numéraire convenablement choisi, sont des martingales.

Ce résultat est appliqué à l'évaluation des options sur actions quand les taux d'intérêt sont stochastiques (extension du modèle de Black de la section 18.7) et à l'évaluation des options d'échange d'un actif contre un autre. Au chapitre 29, ces résultats permettront de comprendre les modèles de marché standard, utilisés dans l'évaluation des dérivés de taux d'intérêt. Au chapitre 30, ils apparaissent dans l'évaluation de produits non standard, et au chapitre 32, ils seront d'une grande utilité pour la présentation du modèle de marché LIBOR.

28.1 Le prix de marché du risque

Nous étudions dans un premier temps les propriétés des actifs dérivés ne dépendant que d'une seule variable, notée θ (appelée variable d'état), qui suit un processus de diffusion décrit par :

$$\frac{d\theta}{\theta} = m\,dt + s\,dz \tag{28.1}$$

où z est un processus de Wiener.

Les paramètres m et s sont respectivement le taux de croissance espéré et la volatilité de θ. Ils dépendent uniquement de θ et t. La variable θ n'est pas forcément le prix d'un actif d'investissement. Il peut par exemple s'agir d'une température, mesurée dans une station météo donnée, ou de la valeur d'un indice de sinistralité d'un pool de polices d'assurance.

Notons f_1 et f_2 les prix de deux actifs dérivés dépendant uniquement de θ et t. Ces actifs peuvent être des options ou, plus généralement, des titres dont les payoffs futurs dépendent d'une façon ou d'une autre de θ et t. Nous supposons pour le moment que ces actifs n'engendrent pas de flux avant leur date d'échéance [1]. Leurs dynamiques sont décrites par les processus suivants :

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1\,dt + \sigma_1\,dz$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2\,dt + \sigma_2\,dz$$

où μ_1,μ_2,σ_1,σ_2 dépendent de θ et t. Le processus z est le même processus de Wiener que celui de l'équation (28.1), car c'est ici la seule source d'incertitude.

Nous relions maintenant les prix de ces deux processus en utilisant une analyse similaire à celle du modèle de Black et Scholes de la section 15.6. Les versions de ces processus en temps discret s'écrivent :

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z \tag{28.2}$$

1. Cette hypothèse peut être abandonnée sans difficulté majeure (voir problème 28.7).

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z \tag{28.3}$$

En formant un portefeuille localement sans risque (sur un intervalle de temps de longueur infinitésimale), on peut éliminer Δz ; il faut pour cela acheter $\sigma_2 f_2$ unités de l'actif 1 et vendre $\sigma_1 f_1$ unités de l'actif 2. Si on note Π la valeur du portefeuille, on peut écrire :

$$\Pi = (\sigma_2 f_2)\, f_1 - (\sigma_1 f_1)\, f_2 \tag{28.4}$$

et donc :

$$\Delta\Pi = (\sigma_2 f_2)\, \Delta f_1 - (\sigma_1 f_1)\, \Delta f_2$$

En substituant (28.2) et (28.3) dans cette équation, on obtient :

$$\Delta\Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_2 f_1 - \mu_2 \sigma_1 f_2 f_1)\, \Delta t \tag{28.5}$$

Comme ce portefeuille est localement sans risque, il est rémunéré au taux sans risque sur un intervalle de longueur Δt. Par conséquent :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Cette équation, associée aux équations (28.4) et (28.5), conduit à :

$$\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 = r(\sigma_2 - \sigma_1)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \tag{28.6}$$

On remarque que le membre de gauche de l'équation (28.6) dépend uniquement des paramètres du processus f_1, alors que le membre de droite dépend uniquement des paramètres du processus f_2.

Notons λ la valeur de chacun des deux membres de l'équation (28.6). Le raisonnement précédent montre (en abandonnant ici les indices) que le prix, f, d'un actif dérivé quelconque vérifie :

$$\frac{df}{f} = \mu\, dt + \sigma\, dz \tag{28.7}$$

et :

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \tag{28.8}$$

Le paramètre λ est appelé ***prix de marché du risque***. Dans le contexte de la gestion de portefeuille, c'est simplement le ratio de Sharpe du portefeuille. Il peut dépendre à la fois de θ et t, mais ne dépend pas de la nature de l'actif dérivé. À tout instant, il doit être identique pour tous les actifs dérivés considérés ne dépendant que de θ et t.

Le prix de marché du risque mesure le taux de substitution entre rentabilité (en excès du taux sans risque) et risque, pour les actifs dépendant de θ. L'équation (28.8) se réécrit :

$$\mu - r = \lambda\, \sigma \tag{28.9}$$

Pour donner un contenu intuitif à cette équation, σ peut s'interpréter comme la quantité de risque (relatif à θ) présente dans l'actif dérivé f. Le membre de gauche de l'équation est la rentabilité espérée, en excès du taux sans risque, exigée pour ce titre. L'équation (28.9) établit donc un lien entre cette rentabilité espérée et le risque de l'actif.

Dans ce chapitre, nous ne serons pas concernés par la mesure du prix de marché du risque ; ce point sera vu au chapitre 36 dans le contexte de l'évaluation des options réelles.

Il est bon de noter que le paramètre σ est le coefficient de dz dans l'équation (28.7). Il peut être positif ou négatif. En effet, si s est positif et si f est négativement corrélé à θ, alors σ sera négatif puisqu'une hausse de θ dont l'origine est une variation positive de z doit correspondre à une baisse de f. C'est donc en fait la valeur absolue de σ qui est usuellement appelée volatilité de f. Cela s'explique car le processus de Wiener standard est symétrique au sens où z a les mêmes propriétés $-z$.

Au chapitre 5, nous avons distingué actifs d'investissement et actifs de consommation. Un actif d'investissement est acheté ou vendu aux seules fins d'investir, par une majorité des intervenants. Il peut entrer dans une stratégie dont l'objet est la composition d'un portefeuille sans risque. Les actifs de consommation sont prioritairement destinés à être consommés et ne peuvent avoir le même usage. Par conséquent, si θ lui-même est un actif d'investissement, on doit avoir $m - r = \lambda s$, mais si ce n'est pas le cas, cette égalité ne sera pas toujours vérifiée.

■ **Exemple 28.1** Considérons un actif dérivé dont le prix est positivement corrélé au prix du pétrole mais ne dépend d'aucune autre variable. Ce contrat a une rentabilité espérée de 12 % par an et une volatilité annuelle de 20 %. Si le taux sans risque est égal à 8 %, le prix de marché du risque (de la variable prix du pétrole) est donné par :

$$\frac{0{,}12 - 0{,}08}{0{,}2} = 0{,}2$$

Cependant, comme le pétrole est un actif de consommation, le prix de marché du risque de l'actif dérivé ne peut être obtenu par l'équation (28.8).

■ **Exemple 28.2** Considérons deux actifs dont les prix sont positivement reliés au taux d'intérêt à 90 jours. Le premier a une rentabilité espérée de 3 % et une volatilité de 20 %, alors que le second a une volatilité de 30 %. Si le taux sans risque est 6 %, le premier titre a un prix de marché du risque égal à :

$$\frac{0{,}03 - 0{,}06}{0{,}2} = -0{,}15$$

L'équation (28.9), appliquée au second actif, montre que celui-ci doit avoir une rentabilité espérée égale à $0{,}06 - 0{,}15 \times 0{,}3 = 0{,}015$, soit 1,5 % par an.

Les différents univers risque-neutre

Le processus de l'actif dérivé est caractérisé par :

$$df = \mu f\, dt + \sigma f\, dz$$

La valeur de μ dépend de l'attitude face au risque des investisseurs. Dans un univers où le prix de marché du risque est nul, λ est nul et dans ce cas μ est égal à r. Le processus de f s'écrit alors :

$$df = \mu r\, dt + \sigma f\, dz$$

L'univers dans lequel le processus de prix des actifs a un drift égal à r sera qualifié d'univers risque-neutre classique.

Mais d'autres hypothèses peuvent être posées concernant le prix de marché du risque. De manière générale, le processus de f s'écrit, en utilisant l'équation (28.9) :

$$df = (r + \lambda\sigma)\, f\, dt + \sigma f\, dz \tag{28.10}$$

Le prix de marché du risque d'une variable donnée détermine le taux de croissance espéré des prix des actifs dérivés qui dépendent de cette variable. On constate que si le prix de marché du risque est modifié, les taux de croissance espérés changent eux aussi, mais les volatilités restent inchangées. Ce résultat (qui est en fait le théorème de Girsanov) a déjà été illustré à la section 13.7. Le choix d'un prix de marché du risque revient en fait à définir une probabilité sous laquelle sont calculées les rentabilités espérées des actifs. Pour une certaine valeur de λ, l'univers obtenu est l'univers réel, et les rentabilités espérées sont celles qui sont pertinentes sur les marchés réels.

28.2 Le cas de plusieurs variables d'état

Considérons maintenant n variables θ_1, θ_2, …, θ_n, chacune caractérisée par un processus du type suivant :

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i\, dt + s_i\, dz_i \tag{28.11}$$

pour i=1, 2, …, n, les z_i désignant des processus de Wiener. Les paramètres m_i et s_i sont les taux de croissance et volatilités espérés et peuvent dépendre des θ_i et du temps. L'équation (14A.10) de l'annexe du chapitre 14 donne une version multidimensionnelle du lemme d'Itô, montrant que le prix d'un actif dérivé f dépendant des n variables θ_i s'écrit :

$$\frac{df}{f} = \mu\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\, dz_i \tag{28.12}$$

Dans cette équation, μ est la rentabilité espérée de l'actif et $\sigma_i\, dz_i$ est la composante risquée relative à la i-ème variable d'état. μ et σ_i peuvent éventuellement dépendre du temps et de la valeur de la variable θ_i.

La note technique n° 30 sur le site www.pearson.fr montre la relation suivante :

$$\mu - r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \sigma_i \tag{28.13}$$

où λ_i est le prix de marché du risque relatif à θ_i. L'équation (28.9) est donc un cas particulier quand $n = 1$. Chaque terme $\lambda_i\sigma_i$ mesure la part de la i-ème variable d'état dans l'espérance de rentabilité exigée par les investisseurs. Quand ce terme est nul, les investisseurs n'exigent aucune prime pour le risque apporté par cette variable, et quand il est positif, les investisseurs exigent une rémunération supplémentaire pour supporter ce risque. Quand $\lambda_i\sigma_i$ est négatif, cela signifie que la variable θ_i a pour effet la réduction du risque global supporté par un investisseur.

■ **Exemple 28.3** Le prix d'une action donnée dépend de trois facteurs : le prix du pétrole, le prix de l'or et la performance d'un indice boursier. Supposons que les prix de marché du risque pour ces trois variables soient respectivement 0,2, $-0{,}1$ et 0,4. Les volatilités de ces trois facteurs apparaissant dans l'équation (28.12) sont respectivement égales à 5 %, 10 % et 15 % . La prime de risque (rentabilité en excès du taux sans risque) demandée sur cette action sera alors égale à :

$$0{,}2 \times 0{,}05 - 0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}4 \times 0{,}15 = 0{,}06$$

soit 6 % par an. Si d'autres variables affectent le prix de cette action, la relation précédente reste valide à condition que le prix de marché du risque de ces autres variables soit nul.

L'équation (28.13) est étroitement liée au modèle APT (*Arbitrage Pricing Theory*) développé par Ross en 1976[2]. La version en temps continu du CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) ou modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) est aussi un cas particulier de cette équation. En effet, le CAPM (voir annexe du chapitre 3) stipule que la rentabilité espérée exigée par les investisseurs est égale au taux sans risque, auquel s'ajoute une prime de risque proportionnelle à l'excès de rentabilité du portefeuille de marché par rapport au taux sans risque. Si ce modèle est correct, les λ_i sont proportionnels aux corrélations entre les variations des θ_i et celles du portefeuille de marché. Si θ_i n'est pas corrélé avec la rentabilité du marché, alors $\lambda_i = 0$.

28.3 Les martingales

Un processus de diffusion θ qui est une martingale a un drift nul[3]. En d'autres termes, il vérifie :

$$d\theta = \sigma\, dz$$

où z est un mouvement brownien. La volatilité σ peut elle-même être stochastique et dépendre de θ et éventuellement d'autres variables. Une des propriétés importantes des martingales est la constance de l'espérance. Pour toute date t, on a :

$$E(\theta_t) = \theta_0$$

L'intuition de ce résultat est que, sur un court intervalle de temps, la variation de ce processus est proportionnelle à la variation du mouvement brownien, processus dont les accroissements ont une espérance nulle. La variation entre 0 et t étant la somme des variations sur de courts intervalles, elle aura aussi une espérance nulle.

---

2. Voir S. A. Ross, "The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, décembre 1976, 343-362.

3. Plus formellement, un processus stochastique $(X_t, t = 0,1,\ldots)$ est une martingale si :

$$E(X_t \,|I_{t-1}\,) = X_{t-1}$$

où I_{t-1} est l'information disponible à la date $t-1$ et E représente l'espérance mathématique.

L'existence d'une mesure martingale équivalente

Notons f et g les prix de deux actifs échangés, dépendant d'une seule source d'incertitude. Nous supposons que ces titres ne paient pas de flux aux dates intermédiaires [4] et que le prix g est toujours strictement positif. Si on note $\phi = f/g$, cette variable définit le prix relatif de f par rapport à g. En d'autres termes, le prix de f est exprimé en unités d'actif g plutôt qu'en unités monétaires. L'actif g sert de numéraire.

Dire qu'il existe une mesure martingale équivalente signifie qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage, il existe un choix de prix de marché du risque (et donc une probabilité) tel que le processus ϕ soit une martingale sous cette probabilité. Cette propriété n'aurait pas d'intérêt si la probabilité en question dépendait de l'actif f considéré. On peut en fait montrer que ce n'est pas le cas. En opérant ce choix particulier de prix de marché du risque, les prix de tous les actifs, exprimés en unités de numéraire, sont des martingales. Le prix de marché du risque pertinent est alors la volatilité de g. On peut donc affirmer que, pour tout processus de prix d'actif f, les processus f/g suivent des martingales quand le prix de marché du risque est la volatilité de g.

Pour démontrer ce résultat, notons σ_f et σ_g les volatilités de f et g. De l'équation (28.10) on déduit, dans l'univers où le prix de marché du risque est σ_g :

$$\begin{aligned} df &= (r + \sigma_f \sigma_g)\, f\, dt + \sigma_f f\, dz \\ dg &= \left(r + \sigma_g^2\right) g\, dt + \sigma_g\, g\, dz \end{aligned}$$

En appliquant le lemme d'Itô aux fonctions $\ln(f)$ et $\ln(g)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} d\ln(f) &= \left(r + \sigma_g \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2}\right) dt + \sigma_f\, dz \\ d\ln(g) &= \left(r + \frac{\sigma_g^2}{2}\right) dt + \sigma_g\, dz \end{aligned}$$

On a alors :

$$d\ln(f) - d\ln(g) = \left(\sigma_g \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \frac{\sigma_g^2}{2}\right) dt + (\sigma_f - \sigma_g)\, dz$$

qui s'écrit encore :

$$d\ln\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2}\, dt + (\sigma_f - \sigma_g)\, dz$$

On applique à nouveau le lemme d'Itô pour retrouver le processus suivi par f/g à partir de celui qui est décrit ci-dessus. On obtient alors :

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g)\, \frac{f}{g}\, dz \tag{28.14}$$

et on a bien montré que f/g est une martingale. En particulier, le drift de ce processus est nul puisqu'il n'y a plus de terme en *dt*. Un univers dans lequel le prix de marché du risque est σ_g est appelé univers *forward-neutre* de numéraire g.

4. Le problème 28.8 étend l'analyse au cas où les titres paient des flux intermédiaires.

Comme f/g est une martingale dans cet univers, on peut écrire :

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

ou encore :

$$f_0 = g_0 E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{28.15}$$

E_g désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre de numéraire g.

28.4 Le choix du numéraire

Nous présentons maintenant diverses possibilités de choix de numéraire. Nous montrons dans un premier temps que le résultat de la section précédente est compatible avec ce qui a été fait jusqu'à présent, c'est-à-dire avec les méthodes d'évaluation dans l'univers risque-neutre classique. Les autres exemples sont exposés en vue d'introduire le chapitre 29, qui présentera les méthodes d'évaluation d'options sur obligations, de caps de taux d'intérêt et d'options de swap.

Le compte d'épargne comme numéraire

Nous appelons compte d'épargne un actif qui vaut une unité monétaire en date 0 et dont la valeur augmente au rythme du taux sans risque instantané[5] r. Ce dernier peut être aléatoire. Si l'on note g le processus de valeur du compte d'épargne, il est caractérisé par :

$$dg = r\, g\, dt \tag{28.16}$$

Le drift de g est stochastique ; en revanche, sa volatilité est nulle. La section 28.3 implique que f/g est une martingale dans l'univers où le prix de marché du risque est nul. C'est en fait l'univers risque-neutre classique des chapitres précédents, dans lesquels r était, de plus, constant. L'équation (28.15) se réécrit alors :

$$f_0 = g_0 \hat{E}\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{28.17}$$

où $\hat{E}$ est l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre classique. De plus, la valeur du numéraire en date 0 est égale à 1, et sa valeur en date T s'écrit :

$$g_T = \mathrm{e}^{\int_0^T r dt}$$

L'équation (28.17) s'écrit donc :

$$f_0 = \hat{E}\left(f_T\, \mathrm{e}^{-\int_0^T r dt}\right) \tag{28.18}$$

5. Le compte d'épargne est un actif dont le processus de valeur est la limite quand Δt tend vers zéro du processus suivant. En date 0, une unité monétaire est investie au taux sans risque pour une durée Δt. À la date Δt, le résultat de l'investissement (l'unité initiale plus les intérêts) est investi à nouveau pendant une durée Δt au taux sans risque prévalant à cet instant, et ainsi de suite.

En posant $\bar{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r dt$, l'équation (28.18) se réécrit sous une forme familière :

$$f_0 = \hat{E}\left(f_T \, \mathrm{e}^{-\bar{r}T}\right) \tag{28.19}$$

Cette équation montre que, pour évaluer un dérivé de taux, on peut simuler le taux sans risque dans l'univers risque-neutre classique. À chaque valeur de taux simulée, le payoff est calculé et actualisé au taux moyen sur la trajectoire considérée.

Lorsque le taux r est constant, l'équation (28.19) se simplifie en (voir chapitres précédents) :

$$f_0 = \mathrm{e}^{-rT}\,\hat{E}\,(f_T)$$

Un zéro-coupon comme numéraire

Notons $P(t,T)$ le prix de date t d'un zéro-coupon payant 1 euro en date T ; l'opérateur d'espérance dans cet univers sera noté E_T car c'est en date T que la valeur du numéraire est ici égale à 1. L'équation (28.15) s'écrit donc :

$$f_0 = P(0,T)\,E_T(f_T) \tag{28.20}$$

La différence essentielle entre l'équation (28.20) et l'équation (28.19) est que dans cette dernière, le terme relatif à la valeur du numéraire est en dehors de l'espérance. Par conséquent, choisir ce numéraire simplifie considérablement les calculs lorsqu'on cherche à évaluer un actif ne payant qu'un seul flux en date T.

Considérons une variable θ quelconque qui ne soit pas un taux d'intérêt [6]. Un contrat forward sur θ d'échéance T, est un contrat qui paie $\theta_T - K$ à la date T où θ_T est la valeur de θ à la date T. Notons f la valeur de ce contrat. L'équation (28.20) implique que :

$$f_0 = P(0,T)\,[E_T(\theta_T) - K]$$

Le prix forward, noté F, de θ pour un contrat d'échéance T est la valeur de K pour laquelle $f_0 = 0$. Il s'ensuit que :

$$P(0,T)\,[E_T(\theta_T) - F] = 0$$

ou encore :

$$F = E_T(\theta_T) \tag{28.21}$$

L'équation (28.21) montre que, dans l'univers forward-neutre associé au numéraire zéro-coupon d'échéance T, le prix forward d'un actif (à l'exception d'un taux d'intérêt), pour un contrat d'échéance T, est égal à l'espérance du prix spot futur à la date T. On peut noter ici la différence entre prix forward et prix futures. L'argument de la section 18.7 montre que le prix futures est le prix espéré en T dans l'univers risque-neutre classique.

L'équation (28.20) montre qu'on peut évaluer n'importe quel actif en calculant son payoff espéré, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T, et en actualisant au taux sans risque. L'équation (28.21), quant à elle, montre qu'il est correct, dans cet univers, de supposer que le prix forward de l'actif, observé aujourd'hui, est égal à son prix futur espéré en date T.

6. Nous verrons un peu plus loin que les contrats forward sur taux d'intérêt sont définis différemment des contrats forward sur d'autres variables économiques.

Le comportement des taux quand le numéraire est un zéro-coupon

Notons maintenant T et T^* deux dates futures et $F(t)$ le taux forward pour la période séparant T et T^*, vu de la date t. Ce taux est exprimé avec un rythme de composition des intérêts égal à $T^* - T$ (si $T^* - T = 0{,}5$, il s'agit de taux semestriels, et si $T^* - T = 0{,}25$, les taux sont trimestriels). Le prix forward, vu de la date t, d'un zéro-coupon pour la période $[T\,;T^*]$ s'écrit :

$$\frac{P\,(t,T^*)}{P\,(t,T)}$$

Comme un taux d'intérêt forward est le taux induit par le prix forward du zéro-coupon correspondant, on a :

$$\frac{1}{1+(T^*-T)\,F\,(t)} = \frac{P\,(t,T^*)}{P\,(t,T)}$$

On en déduit alors le taux forward :

$$F\,(t) = \frac{1}{(T^*-T)}\left(\frac{P\,(t,T)}{P\,(t,T^*)} - 1\right)$$

ou encore :

$$F\,(t) = \frac{1}{T^*-T}\left(\frac{P\,(t,T) - P\,(t,T^*)}{P\,(t,T^*)}\right)$$

On pose alors :

$$f = \frac{1}{T^*-T}\left[P\,(t,T) - P\,(t,T^*)\right]$$

et $g = P(t,T^*)$. Il existe alors une probabilité sous laquelle le processus de taux forward $F(t)$ est une martingale quand le numéraire est g. On peut en particulier écrire :

$$F(t) = E_{T^*}(R) \tag{28.22}$$

où E_{T^*} est l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T^* et R est le taux spot constaté à la date T pour la période sur $[T\,;T^*]$.

Dans ce résultat, $F(t)$ et R peuvent être calculés à partir de n'importe quelle courbe de taux zéro-coupon. Il n'est pas indispensable que ce soit celle qui permet de définir le zéro-coupon d'échéance T^*. En particulier, $F(t)$ et R peuvent être calculés à partir de taux LIBOR même si le taux sans risque est un taux OIS. Cette propriété, combinée au résultat donné dans l'équation (28.20), sera très utile pour l'évaluation des caps de taux au chapitre suivant.

Une annuité comme numéraire

Nous présentons maintenant une application supplémentaire du résultat général sur le changement de mesure et de numéraire. Pour cela, considérons un swap débutant à une date future $T = T_0$, avec des dates de paiement T_1, T_2, …, T_N. Le principal est égal à 1 €. Le taux de swap forward, vu de la date $t < T$, est noté $s(t)$. Il s'agit du taux

de swap pour lequel la valeur du swap est nulle. La valeur de la jambe fixe du swap est égale à :

$$s(t)\,A(t)$$

avec :

$$A\,(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (T_{i+1} - T_i)\,P\,(t,T_{i+1})$$

Notons $V(t)$ la valeur de la jambe variable. En égalisant les valeurs des deux jambes du swap, on a :

$$s(t)\,A(t) = V(t)$$

ou encore :

$$s\,(t) = \frac{V(t))}{A\,(t)} \tag{28.23}$$

On peut maintenant appliquer les résultats des sections précédentes en choisissant l'annuité comme numéraire et en posant $f = V(t)$ et $g = A(t)$. On a alors :

$$s(t) = E_A(s(T)) \tag{28.24}$$

où E_A est l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est l'annuité. Dans cet univers, l'espérance du taux de swap futur est égale au taux de swap présent.

Le résultat de l'équation (28.15) permet d'écrire :

$$V_0 = A\,(0)\,E_A\left(\frac{V_T}{A\,(T)}\right) \tag{28.25}$$

Ce résultat, combiné à l'équation (28.24), sera essentiel pour la compréhension du modèle de marché standard et son application à l'évaluation des options de swap européennes au chapitre suivant. Ici encore, $V(t)$ peut être calculé à partir de n'importe quelle courbe de taux, alors que $A(t)$ est déduit de la courbe des taux zéro-coupon sans risque. En particulier, le swap peut être un swap LIBOR contre taux fixe, alors que le taux sans risque est défini à partir d'une courbe de taux zéro-coupon OIS.

28.5 Extension au cas de plusieurs facteurs indépendants

Les résultats des sections 28.3 et 28.4 peuvent être étendus pour couvrir les situations où plusieurs sources d'incertitude indépendantes[7] sont à l'œuvre. S'il y a n facteurs indépendants, on peut écrire, pour deux actifs f et g quelconques, dans l'univers risque-neutre classique :

$$df = r\,f\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i}\,f\,dz_i$$

7. L'hypothèse d'indépendance n'est pas cruciale ; si elle n'est pas vérifiée, il est toujours possible de trouver des facteurs orthogonaux qui décrivent l'incertitude de la même façon (procédé d'orthogonalisation).

et :

$$dg = r\, g\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i}\, g\, dz_i$$

Les résultats de la section 28.2 montrent que l'on peut choisir des univers différents dans lesquels ces processus s'écrivent :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i} \right) f\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i}\, f\, dz_i$$

et :

$$dg = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \sigma_{g,i} \right) g\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i}\, g\, dz_i$$

où les coefficients λ_i sont les prix de marché du risque des différents facteurs. L'un de ces univers est l'univers réel. L'univers forward-neutre, dont le numéraire est g, correspond au choix $\lambda_i = \sigma_{g,i}$. Le lemme d'Itô permet alors de montrer, du fait de l'indépendance des n facteurs, que le processus f/g est une martingale (voir problème 28.12). Les autres résultats des deux sections précédentes (à partir de l'équation (28.15)) restent inchangés.

28.6 Retour sur le modèle de Black

Dans la section 18.8, nous avons expliqué que le modèle de Black est très populaire pour évaluer des options européennes en termes de prix forward ou futures de l'actif sous-jacent, lorsque les taux d'intérêt sont constants. Nous sommes maintenant en mesure d'abandonner cette hypothèse restrictive en gardant le même type de résultat.

L'équation (28.20) permet d'écrire :

$$c = P(0,T)\, E_T(\max(S_T - K; 0)) \tag{28.26}$$

où K est le prix d'exercice, S_T la valeur du sous-jacent à l'échéance de l'option, et E_T l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T. Notons F_0 et F_T les prix forward du sous-jacent en dates 0 et T. Comme $F_T = S_T$, on a :

$$c = P(0,T)\, E_T(\max(F_T - K; 0))$$

Si F_T est log-normal dans l'univers forward-neutre considéré, et si l'écart-type de $\ln(F_T)$ est noté $\sigma_F \sqrt{T}$, l'équation (15A.1) conduit à :

$$E_T(\max(F_T - K; 0)) = E_T(F_T)\, N(d_1) - K N(d_2) \tag{28.27}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_T\left(F_T\right)/K\right) + \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(E_T\left(F_T\right)/K\right) - \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

Par l'équation (28.21) on sait que $E_T(F_T) = E_T(S_T) = F_0$, c'est-à-dire :

$$c = P(0,T)\left[F_0 N(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{28.28}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma_F^2 T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

De la même façon, on a :

$$p = P(0,T)\left[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)\right] \tag{28.29}$$

où p est le prix d'un put européen sur le même sous-jacent avec un prix d'exercice K et une date d'échéance T. C'est en fait le modèle de Black. Il s'applique aussi bien aux actifs d'investissement qu'aux actifs de consommation et, comme nous venons de le voir, il reste valide avec des taux stochastiques, à condition que F_0 soit le prix forward du sous-jacent en date 0. σ_F s'interprète comme la volatilité (constante) du prix forward.

28.7 L'option d'échange d'un titre contre un autre

Considérons maintenant une option permettant d'échanger, à une date future T, un actif d'investissement de valeur U contre un autre actif d'investissement de valeur V. Ce type d'option a déjà été analysé à la section 26.14. Les volatilités des deux actifs sont notées σ_U et σ_V, et la corrélation entre U et V est notée ρ. Les deux actifs ne paient pas de flux avant la date T. L'actif U est choisi comme numéraire g, et en faisant jouer à V le rôle de f dans l'équation (28.15), on obtient :

$$V_0 = U_0 E_U\left(\frac{V_T}{U_T}\right) \tag{28.30}$$

où E_U est l'espérance dans l'univers forward-neutre de numéraire U.

Si la variable f de l'équation (28.15) définit maintenant la valeur de l'option d'échange, on a :

$$f_T = \max(V_T - U_T\ ;\ 0)$$

Il s'ensuit que :

$$f_0 = U_0 E_U\left(\frac{\max(V_T - U_T; 0)}{U_T}\right)$$

ou encore :

$$f_0 = U_0 E_U\left(\max\left(\frac{V_T}{U_T} - 1; 0\right)\right) \tag{28.31}$$

Si l'on note $\hat{\sigma}$ la volatilité du rapport V/U, on a (voir exercice 28.14) :

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V$$

En utilisant l'annexe du chapitre 15 et l'équation (28.31), on peut écrire :

$$f_0 = U_0\left[E_U\left(\frac{V_T}{U_T}\right)N(d_1) - N(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \hat{\sigma}^2 T/2}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

En substituant maintenant l'équation (28.30), on aboutit à :

$$f_0 = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2) \tag{28.32}$$

Le problème 28.8 montre que si $f$et g paient des revenus intermédiaires aux taux q_f et q_g, l'équation (28.15) devient :

$$f_0 = g_0 \, \mathrm{e}^{(q_f - q_g)\,T} \, E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

Les équations (28.30) et (28.31) peuvent être réécrites comme suit :

$$E_U\left(\frac{V_T}{U_T}\right) = \mathrm{e}^{(q_U - q_V)\,T}\,\frac{V_0}{U_0}$$

et :

$$f_0 = \mathrm{e}^{-q_U T}\, U_0 E_U\left(\max\left(\frac{V_T}{U_T} - 1; 0\right)\right)$$

L'équation (28.32) devient alors :

$$f_0 = \mathrm{e}^{-q_V T}\, V_0 N(d_1) - \mathrm{e}^{-q_U T}\, U_0 N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)\,T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

On retrouve ici le résultat de l'équation (26.5).

28.8 Changement de numéraire

Lorsque le numéraire est différent, le processus stochastique suivi par une variable économique est susceptible d'être modifié. Dans cette section, nous étudions l'impact d'un tel changement. Dans l'univers forward-neutre de numéraire g, le processus suivi par une variable f s'écrit :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i}\sigma_{f,i}\right) f\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f\,dz_i$$

Si le numéraire est un autre actif h, on aura de la même façon :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{h,i}\sigma_{f,i}\right) f\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f\,dz_i$$

où $\sigma_{h,i}$ est la i-ème composante de la volatilité de h.

L'effet du changement de numéraire porte uniquement sur le drift du processus de f qui est modifié de :

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i})\, \sigma_{f,i}$$

Considérons maintenant une variable v, fonction des prix des actifs échangés sur le marché. v n'est pas forcément le prix d'un actif échangé en tant que tel. Nous montrons dans la note technique n° 20n sur le site www.pearson.fr, que le drift de v est modifié de la même manière que celui des actifs échangés sur le marché. Le drift de v est donc modifié de :

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i})\, \sigma_{v,i} \tag{28.33}$$

où $\sigma_{v,i}$ la i-ème composante de la volatilité de v.

Définissons maintenant le processus $w = h/g$, appelé ratio des numéraires, et $\sigma_{w,i}$ la i-ème composante de la volatilité de w. En appliquant à nouveau le lemme d'Itô (voir problème 28.13), on peut montrer que :

$$\sigma_{w,i} = \sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}$$

L'équation (28.33) est donc équivalente à :

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{v,i}\sigma_{w,i} \tag{28.34}$$

On a alors :

$$\alpha_v = \rho\, \sigma_v \sigma_w \tag{28.35}$$

où σ_v, σ_w sont les volatilités totales de v et w, et ρ est le coefficient de corrélation instantanée de v et w [8].

Ce résultat est remarquable de simplicité. L'ajustement du drift du processus v quand on passe d'un numéraire à un autre est la covariance entre la variation en pourcentage de v et la variation en pourcentage du ratio des numéraires. Ce résultat sera appliqué aux quantos et aux ajustements temporels au chapitre 30.

Un cas particulier des résultats de cette section est celui du passage de l'univers réel à l'univers risque-neutre classique (où tous les prix de marché du risque sont nuls).

---

8. Pour voir cela, remarquez que les variations de v et w sur de courts intervalles de temps de longueur Δt sont données par :

$$\Delta v = \cdots + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{v,i} v \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \;\text{ et }\; \Delta w = \cdots + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{w,i} w \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Les processus de Wiener ne sont pas corrélés, par conséquent $E(\varepsilon_j \varepsilon_i) = 0$ si $i \neq j$. Par définition du coefficient de corrélation, on a $\rho v \sigma_v w \sigma_w = E(\Delta v \Delta w) - E(\Delta v)\, E(\Delta w)$.
En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt, on aboutit à :

$$\rho \sigma_v \sigma_w = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{v,i}\sigma_{w,i}$$

L'équation (28.33) montre que le drift de v change de $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{v,i}$. C'est le résultat obtenu par l'équation (28.13) quand v est un actif échangé sur le marché. Nous avons aussi montré que c'est vrai quand v n'est pas un actif échangé. En général, le passage d'un univers à l'autre se fait de la même maniére pour les variables qui sont des prix d'actifs échangés et pour celles qui ne le sont pas.

Résumé

Le prix de marché du risque d'une variable définit le taux de substitution entre rentabilité et risque pour les actifs dont les payoffs dépendent de cette variable. Quand il y a une seule variable d'état, l'excès de rentabilité d'un actif par rapport au taux sans risque est égal au prix de marché du risque multiplié par la volatilité de la variable. Quand plusieurs variables d'état interviennent, cet excès de rentabilité est obtenu en sommant les produits des prix de marché du risque de ces différentes variables avec les volatilités des dites variables.

Le changement de probabilité est une technique performante pour l'évaluation des actifs dérivés. Elle avait déjà été introduite aux chapitres 13 et 15. Le principe d'évaluation risque-neutre permet de faire comme si les agents étaient neutres face au risque pour l'évaluation des actifs dérivés, mais les prix obtenus sont corrects dans tous les univers, l'univers réel en particulier. Dans l'univers risque-neutre classique, le prix de marché du risque de toutes les variables est nul. De plus, le prix futures d'un actif est égal à l'espérance de son prix à la date d'échéance du contrat considéré.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des extensions de ces principes. Ainsi, quand les taux d'intérêt sont stochastiques, il y a plusieurs choix possibles pour définir l'univers risque-neutre qui, dans ce contexte, est appelé univers forward-neutre. Quand il y a une seule variable d'état, un univers forward-neutre dont le numéraire est le prix d'un actif échangé peut être défini en choisissant comme prix de marché du risque la volatilité du numéraire. Une définition du même type s'applique quand il y a plusieurs variables d'état. De manière générale, nous avons montré que, dans un univers de numéraire g, les processus de prix d'actifs f/g, exprimés en unités de numéraire, sont des martingales. Une martingale est, en particulier, un processus d'Itô dont le drift est nul. De plus, à toute date, la valeur d'un tel processus est égale à sa valeur future espérée, conditionnellement à l'information détenue. De ce fait, l'évaluation de nombreux actifs dérivés de taux peut être simplifiée en choisissant judicieusement le numéraire.

Nous avons aussi montré comment des extensions de l'approche risque-neutre permettaient d'étendre le modèle de Black au cas où les taux sont stochastiques et d'évaluer des options d'échange d'un actif contre un autre. Aux chapitres 29 à 34, ces extensions seront aussi très utiles pour l'évaluation des dérivés de taux d'intérêt.

Références complémentaires

Baxter M. et A. Rennie, *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Cox J. C., J. E. Ingersoll et S. A. Ross, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53, 1985, 363-384.

DUFFIE D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

HARRISON J. M. et D. M. KREPS, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, 1979, 381-408.

HARRISON J. M. et S. R. PLISKA, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 1981, 215-260.

Problèmes et exercices

28.1 Comment le prix de marché du risque d'une variable qui n'est pas le prix d'un actif d'investissement est-il défini ?

28.2 Si le prix de marché du risque de l'or est nul, les coûts de stockage de 1 % par an et le taux sans risque de 6 %, quel est le taux de croissance espéré du prix de l'or ? Vous supposerez que l'or ne procure pas de revenus intermédiaires.

28.3 Considérons deux titres dépendant de la même variable de marché. Leurs rentabilités espérées sont respectivement de 8 % et 12 %. La volatilité du premier titre est de 15 % et le taux sans risque instantané est de 4 %. Quelle est la volatilité du second titre ?

28.4 Une compagnie pétrolière est constituée dans l'unique but d'explorer une petite zone du Texas. Sa valeur dépend de deux variables : le prix du pétrole et la quantité de réserves qu'elle peut découvrir et prouver. Pensez-vous que le prix de marché du risque de la seconde variable soit positif, nul ou négatif ?

28.5 Écrivez l'équation aux dérivées partielles satisfaite par un actif dont la valeur dépend de celle de deux actions ne payant pas de dividendes, en construisant un portefeuille sans risque à partir de l'actif dérivé et des deux actions, et en utilisant un raisonnement d'arbitrage.

28.6 Supposez qu'un taux d'intérêt suive le processus suivant :

$$dx = a\,(x_0 - x)\;dt + c\sqrt{x}\,dz$$

où a, x_0 et c sont des constantes positives. Le prix de marché du risque est noté λ. Quel est le processus suivi par x dans l'univers risque-neutre traditionnel ?

28.7 Montrez que si l'actif f procure un dividende au taux q, l'équation (28.9) devient $\mu + q - r = \lambda\sigma$. (Indication : construisez un nouvel actif f^*, ne produisant pas de revenus intermédiaires mais qui correspond à l'actif f quand tous les revenus sont réinvestis dans f.)

28.8 Montrez que si f et g procurent des revenus aux taux q_f et q_g, l'équation (28.15) devient :

$$f_0 = g_0\,\mathrm{e}^{(q_f - q_g)\,T}\,E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

(Indication : construisez deux nouveaux actifs f^* et g^* ne produisant pas de revenus intermédiaires mais qui correspondent aux actifs f et g quand tous les revenus sont réinvestis dans f et g.)

28.9 « La valeur future espérée d'un taux d'intérêt dans l'univers risque-neutre est supérieure à celle dans l'univers réel. » Quelles sont les implications de cette affirmation quant au prix de marché du risque pour (a) un taux d'intérêt et (b) un

prix d'obligation ? Pensez-vous que cette affirmation soit correcte ? Justifiez votre réponse.

28.10 La variable S est le prix d'un actif d'investissement qui procure un dividende au taux q dans la devise A. Elle suit le processus :

$$dS = \mu_S S\, dt + \sigma_S S\, dz$$

dans l'univers réel.

Écrivez le processus suivi par S et le prix de marché du risque correspondant, en définissant de nouvelles variables si nécessaire, dans :

a. l'univers risque-neutre traditionnel dans la devise A ;

b. l'univers risque-neutre traditionnel dans la devise B ;

c. l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise A ;

d. l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise B.

28.11 Expliquez la différence de définition entre un taux forward et la valeur forward d'autres variables comme les prix d'action ou de matières premières.

28.12 Montrez le résultat de la section 28.5, c'est-à-dire si :

$$df = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i} \right) f\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f\, dz_i$$

et :

$$dg = \left(r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{g,i} \right) g\, dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g\, dz_i$$

avec des processus de Wiener indépendants, le processus f/g est une martingale pour $\sigma_{g,i} = \lambda_i$. (Indication : commencez en utilisant l'équation (14A.11)) pour obtenir les processus $\ln(f)$ et $\ln(g)$.)

28.13 Montrez que si $w = h/g$, où h et g dépendent de n processus de Wiener, la i-ème composante de la volatilité de w est la différence des i-èmes composantes des volatilités de h et g. (Indication : commencez en utilisant l'équation (14A.11)) pour obtenir les processus $\ln(g)$ et $\ln(h)$).

28.14 Si X est un processus défini par $X_t = E_t(Y|I_t)$, où Y est une variable alétoire et I_t est l'information de date t, montrez que X est une martingale.

Questions complémentaires

28.15 Le prix d'un actif est positivement corrélé à deux variables : le prix du cuivre et le taux de change yen japonais/dollar US. Les prix de marché du risque pour ces deux variables sont respectivement 0,5 et 0,1. Si le prix du cuivre restait fixe, la volatilité du prix de l'actif serait égale à 8 % par an. Si le taux de change restait fixe, la volatilité de l'actif serait de 12 %. Le taux sans risque est de 7 % par an. Quelle est la rentabilité espérée de cet actif ? Si les deux variables d'état sont indépendantes, quelle est la volatilité de l'actif ?

28.16 Le prix d'un zéro-coupon d'échéance T suit le processus :

$$dP(t,T) = \mu_P P(t,T)\,dt + \sigma_P P(t,T)\,dz_t$$

et le processus de prix d'un actif dérivé, noté f, dont le sous-jacent est cette obligation, est caractérisé par :

$$df = \mu_f f\,dt + \sigma_f f\,dz_t$$

Il y a une seule source d'incertitude et f ne verse pas de revenus intermédiaires.

a. Quel est le prix forward, F, de f pour un contrat d'échéance T ?

b. Quel est le processus suivi par F dans un univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T ?

c. Quel est le processus suivi par F dans l'univers risque-neutre classique ?

d. Quel est le processus suivi par f dans un univers forward-neutre dont le numéraire est un zéro-coupon d'échéance T^* différente de T ? On notera σ_P^* la volatilité de cette obligation.

28.17 Considérons une variable qui n'est pas un taux d'intérêt.

a. Dans quel univers son prix futures est-il une martingale ?

b. Dans quel univers son prix forward est-il une martingale ?

c. En définissant d'autres variables si nécessaire, donnez l'expression de la différence entre le drift du prix futures et le drift du prix forward dans l'univers risque-neutre traditionnel.

d. Montrez que ce résultat est cohérent avec les points mentionnés dans la section 5.8 à propos des circonstances dans lesquelles le prix futures est supérieur au prix forward.

Chapitre 29

Les dérivés de taux : les modèles de marché standard

Les contrats dérivés de taux d'intérêt sont des actifs financiers dont les payoffs dépendent d'une façon ou d'une autre du niveau des taux. Dans les années 1980 et 1990, les volumes de transactions sur ces actifs ont très rapidement augmenté, que ce soit sur les marchés de gré à gré ou sur les marchés organisés. Le défi pour les opérateurs fut alors de trouver des modèles d'évaluation et de couverture efficaces et robustes pour ces actifs financiers.

Les dérivés de taux sont plus difficiles à évaluer que les dérivés sur actions ou sur devises pour les raisons suivantes.

1. L'évolution d'un taux d'intérêt est plus compliquée à modéliser que celle d'une action ou d'une devise.
2. Pour l'évaluation de nombreux produits, il est indispensable de recourir à un modèle d'évolution de la courbe des taux dans son ensemble.
3. Les volatilités en différents points de la courbe des taux sont différentes.
4. Les taux d'intérêt interviennent à la fois dans la définition des payoffs de ces actifs et dans l'actualisation de ceux-ci.

Dans ce chapitre, nous analysons les trois modèles d'évaluation d'options de taux les plus classiques : il s'agit des options sur obligations, des caps/floors et des options de swap ou *swaptions*. Nous montrons comment ces contrats fonctionnent et de quelle manière ils sont évalués par des modèles classiques.

29.1 Les options sur obligations

Une option sur obligation est le droit d'acheter ou de vendre une obligation particulière à une date future donnée et à un prix spécifié. Ces options sont en général cotées sur le marché OTC, mais des options de ce type sont souvent incluses dans des émissions

d'obligations (obligations à bons de souscription d'obligations, ou OBSO) pour rendre celles-ci plus attractives.

Obligations à clauses optionnelles

Certaines obligations donnent la possibilité à l'émetteur de rembourser par anticipation à un prix fixé à certaines dates futures (elles sont appelées *callable bonds* ou obligations remboursables au gré de l'émetteur). Le détenteur d'une option de ce type a vendu un call à l'émetteur. Le prix d'exercice est le prix auquel l'émetteur convient de rembourser l'obligation. En général, l'option de remboursement anticipé ne peut être exercée dans les premières années de vie de l'obligation. À partir du moment où cet exercice est possible, le prix d'exercice est le plus souvent une fonction décroissante du temps. Par exemple, si l'obligation a une échéance 10 ans, il peut être interdit d'exercer pendant les deux premières années, puis l'exercice peut avoir lieu à 110 dans les années 3 et 4, 107,5 dans les années 5 et 6, 106 dans les années 7 et 8, et enfin 103 dans les deux dernières années. L'existence de cette option de remboursement anticipé est reflétée dans le taux actuariel de ce type d'obligation. Il est en général plus élevé que celui d'obligations classiques de mêmes caractéristiques (en termes de taux de coupon et de maturité).

L'option de remboursement anticipé peut aussi être donnée au souscripteur (on parle alors de *puttable bond* ou obligation remboursable au gré du souscripteur). L'acheteur de ce titre a alors acquis une option de vente sur l'obligation. Par conséquent, la valeur d'une telle obligation est supérieure à celle d'une obligation classique de mêmes caractéristiques. Il s'ensuit que les taux actuariels de ces titres sont en général plus faibles que ceux des obligations sans clause optionnelle. Un exemple de ce type de titre est une obligation à 10 ans remboursable au bout de 5 ans.

Les emprunts auprès des banques ou les comptes de dépôts contiennent souvent des clauses optionnelles. Les possibilités de remboursement anticipé sur les emprunts immobiliers sont les exemples les plus classiques. Elles peuvent en fait s'interpréter comme des options américaines sur obligations.

Dans certains cas, la clause optionnelle saute moins aux yeux. Supposons qu'une banque propose à un client un prêt au taux de 3 % pour cinq ans et lui donne deux mois pour se décider. C'est comme si le client avait obtenu une option de vente dont la durée de vie est de deux mois et dont le sous-jacent est une obligation à 5 ans avec un taux de coupon de 3 %. Cette option est exercée en cas de hausse des taux.

Les options européennes sur obligations

De nombreuses options sur obligations négociées sur le marché OTC ainsi que certaines clauses optionnelles d'emprunts obligataires sont de type européen. Nous analysons dans ce qui suit les modèles usuels d'évaluation de telles options.

L'hypothèse la plus commune est que le prix de l'obligation suit, à l'échéance de l'option, une loi log-normale. Le modèle de Black analysé dans la section 28.6 est adapté à l'évaluation de ces options. Les équations (28.28) et (28.29) peuvent alors être utilisées pour évaluer l'option en considérant que F_0 est le prix forward F_B de l'obligation et que σ_F est égal à σ_B.

Les équations définissant les prix d'options sur cette obligation sont :

$$c = P(0,T)\left[F_B N(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{29.1}$$
$$p = P(0,T)\left[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)\right] \tag{29.2}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(F_B/K\right) + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma_B\sqrt{T}$$

K est le prix d'exercice de l'option et T sa maturité.

En utilisant les résultats de la section 5.5, F_B peut être calculé par la formule :

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P\left(0,T\right)} \tag{29.3}$$

où B_0 est le prix de l'obligation à la date 0 et I la valeur actuelle des coupons qui sont payables pendant la durée de vie de l'option. Dans cette formule, il est bon de noter que les prix de l'obligation (au comptant et forward) sont des prix coupon couru. La relation entre prix coupon couru et prix pied de coupon est examinée à la section 6.1.

Le prix d'exercice des équations (29.1) et (29.2) devrait être un prix d'exercice coupon couru. Il faut donc être vigilant dans la définition des caractéristiques de l'option. Si le prix d'exercice est défini comme le montant qui sera échangé au moment de l'exercice, le prix K devra être égal à ce montant. Si, en revanche, comme c'est plus courant, le prix d'exercice est le prix pied de coupon applicable à la date d'exercice, K doit être égal au prix d'exercice plus le coupon couru. On peut noter que les traders appellent le prix pied de coupon *clean price* et le prix coupon couru *dirty price.*

■ **Exemple 29.1** Considérons une option de durée de vie 10 mois sur une obligation de maturité 9,75 ans et de nominal 1 000 €. Le prix coupon couru est aujourd'hui de 960 € et le prix d'exercice est 1 000 €. Le taux sans risque à 10 mois est 10 % et la volatilité du prix forward à 10 mois est 9 % par an. Le taux de coupon de l'obligation est de 10 %, mais le coupon est semestriel ; le premier est payé dans 3 mois et le second dans 9 mois. On suppose que les taux sans risque à 3 mois et 9 mois sont respectivement 9 % et 9,5 %. La valeur actuelle des coupons est donc :

$$50 \times \quad \mathrm{e}^{-0,25\times 0,09} + 50 \times \quad \mathrm{e}^{-0,75\times 0,095} = 95,45$$

soit 95,45 €. De l'équation (29.3), on déduit :

$$F_B = (960 - 95,45)\,\mathrm{e}^{\frac{10}{12}\times 0,1} = 939,68$$

a. Si le prix d'exercice est le prix coupon couru qui serait payé pour obtenir l'obligation à la date d'exercice, les paramètres de l'équation (29.1) sont :

$$F_B = 939,68\,;\ K = 1\,000\,;\ P\left(0,T\right) = \mathrm{e}^{-\frac{10}{12}\times 0,1} = 0,92\,;\ \sigma_B = 0,09 \text{ et } T = \frac{10}{12}.$$

Le prix de l'option est alors 9,49 €.

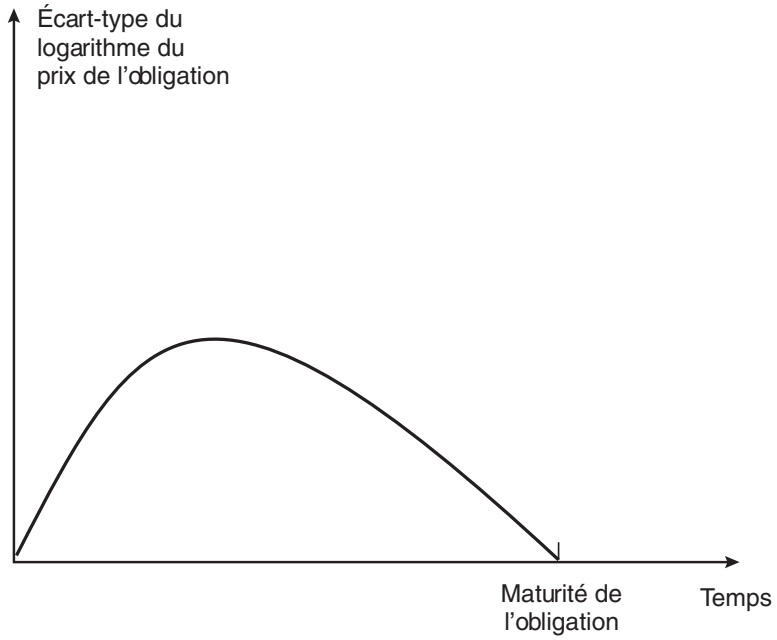
b. Si le prix d'exercice est le prix pied de coupon qui serait payé pour obtenir l'obligation à la date d'exercice, un mois de coupon couru doit être ajouté à K puisque l'échéance de l'option survient un mois après le paiement du second coupon. Cela donne une valeur de K égale à :

$$K = 1\,000 + 50 \times \frac{1}{6} = 1\,008{,}33$$

Les valeurs des autres paramètres de l'équation (29.1) sont inchangées et l'option vaut alors 7,97 €.

Le graphique 29.1 montre comment la volatilité du logarithme du prix de l'obligation change au cours du temps. La volatilité est nulle aujourd'hui, puisque le prix est connu, mais aussi à la date de maturité de l'obligation, puisque le prix de remboursement est connu. Entre ces deux dates, la volatilité augmente, puis diminue. La volatilité σ qui devrait être employée pour évaluer une option européenne sur obligation s'écrit :

$$\frac{\text{Écart-type du logarithme du prix de l'obligation à l'échéance de l'option}}{\sqrt{\text{Durée de vie de l'option}}}$$



Graphique 29.1 : Écart-type du logarithme du prix de l'obligation en fonction du temps

Le graphique 29.2 donne l'allure de σ_B en fonction de la durée de vie de l'option. En général, σ_B diminue quand la durée de vie de l'option augmente.

Volatilités des taux

Dans le contexte des options sur obligations, les volatilités auxquelles il est fait référence sont plus souvent des volatilités de taux actuariels que des volatilités de prix. Le concept

de duration, introduit au chapitre 4, est utilisé pour convertir une volatilité de taux en volatilité de prix. Notons D la duration modifiée de l'obligation qui sert de sous-jacent au contrat d'option ; la relation entre les variations du prix forward, ΔF_B, et les variations du taux forward, Δy_F, s'écrit :

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D \times \Delta y_F$$

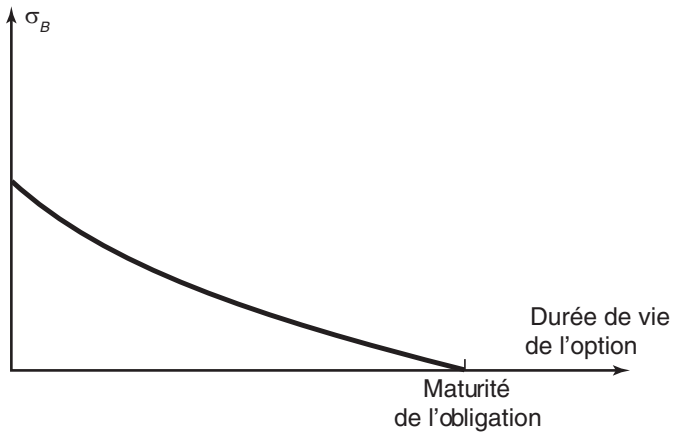
ou encore :

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D\, y_F \times \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

Cette relation suggère qu'utilisée dans le modèle de Black, la volatilité du prix forward de l'obligation, σ_B, peut être reliée – au moins approximativement – à celle du taux actuariel par la relation :

$$\sigma_B = D\, y_0\, \sigma_y \tag{29.4}$$

où y_0 est la valeur initiale de y_F.



Graphique 29.2 : Variation de la volatilité σ_B en fonction de la durée de vie de l'option

Quand un trader fait référence à une volatilité de taux, il est implicite que la conversion en volatilité de prix se fait par l'intermédiaire de l'équation (29.4) et que le prix de l'option est évalué par les équations (29.1) et (29.2). Supposons qu'une obligation, support d'un call, ait une duration modifiée de 5 ans à la date d'échéance de l'option, que le taux forward initial soit 8 % et que la volatilité du taux cotée par le broker soit 20 %. Cela signifie que le prix de marché de l'option doit être calculé par l'équation (29.1) *via* un paramètre $\sigma_B = 5 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}08$, c'est-à-dire 8 % par an. Le graphique 29.2 montre que la volatilité forward des obligations dépend de l'option considérée. La volatilité forward des taux actuariels est plus stable, c'est pourquoi elle est souvent choisie par les traders.

La feuille de calcul Bond_Options du logiciel DerivaGem accompagnant ce livre peut être utilisée pour évaluer des options européennes sur obligations par le modèle de Black, en sélectionnant « Black-European » comme modèle d'évaluation. L'utilisateur entre alors la volatilité du taux actuariel qui est transformée comme ci-dessus par le programme pour évaluer l'option. Le prix d'exercice peut être coupon couru ou pied de coupon.

■ **Exemple 29.2** Considérons un put sur une obligation à 10 ans de nominal 100 €. Le taux de coupon est 8 %, payable semestriellement. La durée de vie de l'option est 2,25 ans avec un prix d'exercice de 115 €. La volatilité du taux forward est 20 %. La courbe des taux zéro-coupon est plate au niveau de 5 %. DerivaGem montre que l'obligation cote alors 122,82 €, pied de coupon. Quand le prix d'exercice est donné pied de coupon, l'option vaut 2,36 €. En revanche, si le prix d'exercice est donné coupon couru, le prix de l'option est 1,74 €. (Précisons que les prix obtenus ne sont pas forcément identiques à ceux qui sont calculés « à la main », car DerivaGem suppose 365 jours par an et arrondit la durée de vie au nombre entier de jours le plus proche ; voir problème 29.16 pour le calcul « manuel ».)

29.2 Caps et floors de taux

Les caps de taux sont des options très couramment négociées par les institutions financières sur le marché OTC. Pour comprendre de quoi il retourne, considérons un bon à taux variable pour lequel l'intérêt est périodiquement réajusté au niveau du LIBOR. Le délai entre deux réajustements est appelé *tenor*. Supposons que le tenor soit de trois mois ; le taux du bon pour les trois premiers mois est le LIBOR initial ; pour les trois mois suivants, le taux d'intérêt payé par le bon est le LIBOR qui prévaut à la fin du premier trimestre, et ainsi de suite.

Un cap de taux procure une assurance contre une hausse des taux au-delà d'un seuil spécifié appelé taux plafond (*cap rate*). Supposons que le principal soit de 10 millions, le tenor de trois mois, la durée du cap de 5 ans et le taux plafond de 4 %. Imaginons qu'à une date de réajustement quelconque, le LIBOR atteigne 5 %. À la fin du trimestre qui suit cette date, le bon doit payer un intérêt égal à :

$$0{,}25 \times 0{,}05 \times 10\,000\,000 = 125\,000$$

Si le LIBOR était à 4 %, le paiement serait de 100 000 ; dans ces conditions, le cap que nous venons de décrire engendrera un flux de $25\,000 = 125\,000 - 100\,000$. Ce calcul suppose qu'il y a exactement 0,25 an entre deux dates de réajustement. En pratique, le calcul tient compte du nombre exact de jours entre ces deux dates, avec des règles précises quant au décompte des jours.

Le payoff du cap ne survient pas à la date à laquelle le taux est arrivé à 5 %, mais trois mois plus tard. Cela est dû au fait que les intérêts à 5 % sur le bon seront aussi payés trois mois après l'observation d'un LIBOR à 5 %.

À chaque date de réajustement, le taux LIBOR est constaté. S'il est inférieur à 4 %, le cap n'engendre aucun flux (trois mois plus tard) ; en revanche, s'il dépasse 4 %, le payoff engendré 3 mois plus tard est calculé comme ci-dessus, c'est-à-dire 1/4 du différentiel de taux d'intérêt entre le taux LIBOR observé et le taux plafond, appliqué au principal de 10 millions. Les caps sont définis de façon que, même si le taux initial est supérieur au taux plafond, cela n'engendre pas de flux à la première date de réajustement (puisqu'il n'y a pas de risque sur ce premier flux). Dans notre exemple, le cap dure 5 ans, il y a donc 19 dates de réajustement correspondant aux fins de trimestres 1 à 19, et 19 paiements potentiels aux fins de trimestres 2 à 20.

Le cap comme portefeuille d'options de taux

Considérons un cap de durée de vie T avec un principal L et un taux plafond R_K. Les dates de réajustement sont notées t_1, t_2, …, t_n et on note $t_{n+1} = T$. Soit R_k le taux effectif pour la période $[t_k,t_{k+1}[$, observé à la date t_k. Le payoff du cap en t_{k+1} s'écrit :

$$L\delta_k \max(R_k - R_K\,;0) \tag{29.5}$$

où $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ [1]. Les deux taux intervenant dans cette formule sont composés au rythme δ_k.

L'équation (29.5) est le paiement d'un call sur LIBOR d'échéance t_{k+1}. Le cap peut donc être vu comme un portefeuille de n options de ce type. Les taux LIBOR sont observés aux dates t_1, t_2, …, t_n et les paiements sont réalisés aux dates t_2, t_3, …, t_{n+1}. Les n options qui constituent le cap sont appelées ***caplets***.

Le cap comme portefeuille d'options sur obligations

Un cap peut aussi être défini comme un portefeuille de puts sur obligations zéro-coupon, les payoffs des puts survenant à la date à laquelle ils sont calculés. Dans l'équation (29.5), le payoff de date t_{k+1} est équivalent à un payoff de date t_k égal à :

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max(R_k - R_K\,;0)$$

Quelques lignes de calcul élémentaire permettent de réécrire ce payoff sous la forme :

$$\max\left[L - \frac{L(1 + R_K\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}\,;0\right] \tag{29.6}$$

L'expression :

$$\frac{L\,(1 + R_K\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}$$

est la valeur en t_k d'un zéro-coupon qui paie $L(1 + R_K\delta_k)$ en t_{k+1}. L'expression (29.6) est donc le payoff d'un put d'échéance t_k sur un zéro-coupon d'échéance t_{k+1} avec un prix d'exercice L et une valeur nominale du zéro-coupon égale à $L(1 + R_K\delta_k)$. Le cap peut donc bien être analysé comme un portefeuille de puts européens sur obligations sans coupons.

Floors et collars

Les floors et les collars sont définis dans le même esprit que les caps. Un floor engendre un flux quand le taux de référence du bon tombe en deçà d'un seuil donné, appelé taux plancher. Avec les notations précédentes, le payoff d'un floor en t_{k+1} s'écrit :

$$L\delta_k \max(R_K - R_k\,;0)$$

1. Les conventions en matière de décompte des jours sont précisées à la fin de cette section.

Un floor est donc un portefeuille de puts sur taux ou un portefeuille de calls sur obligations zéro-coupon. Chaque option composant le floor est appelée *floorlet*.

Un *collar* est destiné à assurer une protection contre une variation du taux en dehors d'un intervalle défini. Il s'agit donc de la combinaison d'une position longue sur un cap et d'une position courte sur un floor. Il est généralement conçu pour que sa valeur initiale soit nulle, c'est-à-dire de façon que le cap et le floor qui le composent aient même valeur initiale. Comme le montre l'encadré 29.1, il existe aussi une relation de parité call-put entre caps et floors.

Encadré 29.1 La parité call-put pour les caps et les floors

Il existe entre caps et floors une relation de parité du type Call-Put, qui s'écrit :

Prix du cap = Prix du floor + Valeur du swap

Dans cette égalité, le cap et le floor ont même prix d'exercice R_K. Le swap est le contrat qui engage à recevoir le taux LIBOR et à payer le taux fixe R_K, sans échange de flux, à la première date d'ajustement des taux. Les trois instruments ont une même durée de vie et la même fréquence de payoffs. Ce résultat peut être compris en considérant une position longue sur le cap, combinée à une position courte sur le floor. Le cap engendre un flux égal à $\text{LIBOR} - R_K$ pendant les périodes où le taux LIBOR est plus grand que R_K. La position courte sur le floor engendre un flux égal à $-(R_K - \text{LIBOR}) = \text{LIBOR} - R_K$ pendant les périodes où le taux LIBOR est plus petit que R_K. En définitive, le cash-flow est toujours $\text{LIBOR} - R_K$. C'est en même temps le cash-flow du swap. Il s'ensuit que la différence entre la valeur du cap et celle du floor est la valeur du swap. Notez que, le plus souvent, les swaps sont construits de sorte que le paiement à la première date de réajustement soit défini par le taux LIBOR de la date initiale. En revanche, les caps et les floors sont structurés de sorte qu'il n'y ait pas de paiement à la première date de réajustement. C'est pourquoi, dans ce cas, le swap doit être défini de façon à ne pas engendrer de paiement à la première date de réajustement.

Évaluation des caps et des floors

Comme l'indique l'équation (29.5), le caplet correspondant au taux observé en t_k engendre un payoff en t_{k+1} égal à :

$$L\delta_k \max(R_k - R_K\,;0)$$

Avec le modèle de marché standard, la valeur du caplet est donnée par :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \tag{29.7}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_K) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_K) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k\sqrt{t_k}$$

où F_k est le taux forward entre t_k et t_{k+1} vu de la date 0. C'est une extension naturelle du modèle de Black. La volatilité σ_k est multipliée par $\sqrt{t_k}$ car le taux d'intérêt R_k est observé à la date t_k, mais le facteur d'actualisation $P(0,t_{k+1})$ traduit le fait que le payoff survient en t_{k+1} et pas en t_k.

La valeur du *floorlet* correspondant est donnée de la même façon par :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \tag{29.8}$$

■ **Exemple 29.3** Considérons un contrat de cap sur un emprunt de 10 000 € qui plafonne le taux d'intérêt à 8 % (en composition trimestrielle) pour trois mois débutant dans un an. Ce contrat est un caplet qui pourrait être composant d'un cap. Supposons que la courbe des taux soit plate au niveau de 7 % (en composition trimestrielle) et que la volatilité du taux sous-jacent au contrat soit de 20 % par an. Le taux zéro-coupon continu pour toutes les maturités est 6,5 %. Dans l'équation (29.7), on a F_k = 0,07 ; δ_k = 0,25 ; L = 10 000 ; R_K = 0,08 ; t_k = 1 ; t_{k+1} = 1,25 ; $P(0, t_{k+1}) = \mathrm{e}^{-0,0695\times 1,25}$ = 0,9220 et σ_k = 0,2. Par conséquent :

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}07/0{,}08) + 0{,}2^2 \times 1/2}{0{,}20 \times 1} = -0{,}5677$$
$$d_2 = d_1 - 0{,}20 = -0{,}7677$$

On en déduit la valeur du caplet :

$$0{,}25 \times 10\,000 \times 0{,}9220 \times [0{,}07N(-0{,}5677) - 0{,}08N(-0{,}7677)] = 5{,}19$$

Ce résultat peut être obtenu à l'aide de DerivaGem.

L'équation (29.7) permet d'évaluer séparément chaque caplet composant d'un cap, et l'équation (29.8) de valoriser séparément chaque floorlet. On peut éventuellement utiliser des volatilités différentes pour chaque caplet ; on les appelle alors *volatilités spot*. Une alternative consiste à employer les mêmes volatilités pour tous les caplets d'un cap, mais à autoriser des volatilités différentes pour des caps n'ayant pas la même durée de vie. On parle alors de volatilités plates (*flat volatilities*) [2]. Habituellement, les volatilités utilisées sur les marchés sont plates. Cependant, de nombreux traders préfèrent les volatilités spot car elles leur permettent d'identifier les caplets surévalués ou sous-évalués. Les options sur contrat futures Eurodollar sont très semblables à des caplets, et les volatilités spot employées pour les caplets sur LIBOR 3 mois sont souvent comparées à celles qui sont calculées à partir des options sur contrat futures Eurodollar.

2. Les volatilités spot peuvent être déduites des volatilités plates et *vice versa* (voir problème 29.20).

Justification théorique du modèle

On peut montrer la cohérence de l'extension du modèle de Black pour un caplet en considérant un univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon de maturité t_{k+1}. L'analyse de la section 28.4 montre que :

1. La valeur aujourd'hui de n'importe quel actif est sa valeur espérée à la date t_{k+1} multipliée par $P(0,t_{k+1})$ (équation (28.20)) ;
2. L'espérance du taux d'intérêt pour la période $[t_k\,;\,t_{k+1}]$ est le taux forward dans cet univers (équation (28.22)).

Le premier de ces deux résultats implique que le prix du caplet dont le payoff survient à la date t_{k+1} est :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})\,E_{k+1}\left[\max(R_k - R_K\,;0)\right] \tag{29.9}$$

où E_{k+1} désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance t_{k+1}. Quand le taux forward sous-jacent au cap (initialement F_k) a une volatilité constante σ_k, le taux R_k est log-normal dans l'univers considéré et son écart-type est $\sigma_k\sqrt{t_k}$. L'annexe du chapitre 15 permet d'écrire l'expression (29.9) sous la forme :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})\left[E_{k+1}(R_k)\,N(d_1) - R_K N(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_{k+1}\left(R_k\right)/R_K\right) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(E_{k+1}\left(R_k\right)/R_K\right) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k\sqrt{t_k}$$

Mais le second résultat implique que :

$$E_{k+1}(R_k) = F_k$$

Ce résultat est correct si on actualise au taux LIBOR dans l'équation (28.22). À la section 28.4, nous montrons que c'est aussi vrai quand on actualise avec des taux OIS, si les taux forward LIBOR sont calculés de manière cohérente avec l'actualisation retenue. On retrouve en fait la formule d'évaluation de l'équation (29.7). On peut donc bien actualiser au taux observé aujourd'hui pour la maturité t_{k+1} tant que l'espérance du taux d'intérêt est considérée comme égale au taux forward.

Utilisation de DerivaGem

Le logiciel DerivaGem qui accompagne ce livre peut être utilisé pour évaluer des caps et des floors par le modèle de Black. Dans la feuille Cap_and_Swap_Option, choisissez Cap/ Floor dans la catégorie « Underlying Type », et « Black-European » dans la catégorie modèle d'évaluation. La courbe des taux zéro-coupon LIBOR/swap utilisée s'entend en taux continus (la courbe des taux OIS est aussi un input du modèle, si on actualise avec ces taux). Les données à introduire sont les dates de départ et de fin du cap, la volatilité plate et le tenor, c'est-à-dire la fréquence de réajustement. Le programme calcule les

dates de paiement par induction arrière. Le premier *caplet*/*floorlet* est supposé couvrir une période située entre 0,5 et 1,5 fois le tenor. Supposons par exemple que la période couverte par le cap se situe entre 1,22 et 2,8 années et que le tenor soit de trois mois. Il y a six caplets, correspondant aux périodes allant de 2,55 à 2,8 ans, de 2,3 à 2,55 ans, et ainsi de suite jusqu'à la première période allant de 1,22 à 1,55 an, cette dernière étant plus longue que les autres.

L'impact des conventions de décompte des jours

Les formules présentées jusque-là ne tenaient pas compte des conventions de décompte des jours (voir la section 6.1 pour une explication sur ce point). Supposons que le taux de cap R_K soit exprimé avec une convention Exact/360 (pratique courante aux États-Unis). Cela signifie que l'intervalle de longueur δ_k devrait être remplacé par un intervalle de longueur a_k correspondant à la partie effective concernée par la capitalisation entre t_k et t_{k+1}. Supposons que t_k et t_{k+1} correspondent respectivement au 1er mai et au 1er août. Dans la convention Exact/360 il y a 92 jours et on devrait avoir a_k = 92/360 = 0,2556. Il faut aussi exprimer le taux forward F_k avec cette même convention. Il faut donc le définir en résolvant l'équation :

$$1 + a_k F_k = \frac{P(0,t_k)}{P(0,t_{k+1})}$$

L'impact de cette transformation est du même ordre que celui résultant d'un calcul de δ_k en base Exact/Exact. C'est comme si on convertissait R_K d'une base Exact/360 à une base Exact/Exact en calculant F_k par la résolution de l'équation suivante :

$$1 + \delta_k F_k = \frac{P(0,t_k)}{P(0,t_{k+1})}$$

Le cas des taux négatifs

L'apparition de taux négatifs sur les marchés remonte à 2014. À la fin de l'année 2016, des taux négatifs avaient été observés sur les couronnes suédoise et danoise, le yen, l'euro et le franc suisse. On a estimé à plus de 10 000 milliards le montant d'obligations payant des taux négatifs.

Du point de vue strictement économique, cela n'a pas de sens (pourquoi placer l'argent chez un intermédiaire qui ne vous rendra pas cette somme en totalité ?). C'est aussi une difficulté dans l'élaboration des modèles. Par exemple, si un modèle d'évaluation de caps ou de floors suppose que les taux suivent une loi log-normale, ceux-ci ne peuvent prendre une valeur négative. Une astuce consiste à utiliser le modèle log-normal décalé, en supposant que F_k et R_k sont remplacés par $F_k + \alpha$ et $R_k + \alpha$, où α dépend éventuellement de la maturité. Le modèle SABR du chapitre 27 peut être ajusté de la même manière.

Une alternative consiste à utiliser le modèle gaussien de Bachelier. Dans un univers où le numéraire est $P(0,t_{k+1})$, le processus de taux forward pertinent pour un caplet sur l'intervalle (t_k,t_{k+1}) dans le modèle de marché standard est de la forme :

$$dF_k = \sigma_k F_k \, dz$$

où z est un processus de Wiener standard. Dans le modèle gaussien de Bachelier, ce processus s'écrit :

$$dF_k = \sigma_k^* \, dz$$

Les deux processus sont des martingales, ce qui est cohérent avec les résultats du chapitre 27. Le modèle de Bachelier conduit à un processus gaussien plutôt que log-normal pour le taux d'intérêt sous-jacent ; il peut donc devenir négatif. L'équation (29.7) devient :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[(F_k - R_K)N(d) + \sigma_k^* \sqrt{t_k} N'(d)]$$

et l'équation (29.8) pour un floorlet s'écrit :

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[(R_K - F_k)N(-d) + \sigma_k^* \sqrt{t_k} N'(d)]$$

avec :

$$d = \frac{F_k - R_K}{\sigma_k^* \sqrt{t_k}}$$

où $N'(x)$ est la densité de la loi normale centrée réduite calculée en x (équation (19.2)). Les deux paramètres de volatilité σ_k et σ_k^* sont sensiblement différents. Par exemple, quand le taux forward est de 3 %, σ_k peut être égal à 33 %, alors que σ_k^* n'est qu'à 1 %. Les deux modèles (le modèle gaussien de Bachelier ou celui dans lequel on décale les taux) peuvent être utilisés dans DerivaGem 4.00.

29.3 Options de swap européennes

Les options de swap ou *swaptions* sont des options sur des swaps de taux. Elles donnent le droit à leur détenteur de conclure un swap à une date future déterminée. De nombreuses institutions financières qui proposent des swaps de taux à leurs clients négocient aussi ce type d'options. Comme le montre l'encadré 29.2, une swaption peut aussi s'analyser comme une option sur obligation.

Pour illustrer la façon dont une option de swap peut être utilisée, considérons une entreprise qui sait que, dans six mois, elle accordera un prêt à taux variable à cinq ans, mais qui souhaiterait échanger les intérêts à taux variable contre des intérêts à taux fixe (voir chapitre 7 sur l'utilisation des swaps). L'entreprise peut alors acheter une swaption (en supportant un coût) qui lui donne le droit, dans six mois, de recevoir le LIBOR et de payer un taux fixe en contrepartie, par exemple 3 % pour cinq ans. Si le taux fixe des swaps dans six mois est inférieur à 3 %, l'entreprise n'exercera pas son option et conclura le swap à ce moment-là sur le marché. À l'inverse, si le taux fixe du swap est supérieur à 3 % à cette date, elle exercera son droit et obtiendra un swap à des conditions meilleures que celles qui sont proposées sur le marché.

Les swaptions offrent donc la garantie que le taux fixe qui sera payé à une date future sera inférieur à un seuil fixé. Il s'agit donc d'une alternative aux *forward swaps* (ou swaps différés). Ces contrats n'entraînent pas de coût initial, mais engagent l'entreprise à conclure le swap à la date spécifiée. Avec une swaption, la possibilité est laissée de profiter de conditions de marché plus favorables, tout en se protégeant contre une dégradation de ces conditions. La différence entre une swaption et un forward swap est de même nature que celle qui existe entre une option et un contrat forward.

Encadré 29.2 Le lien avec les options sur obligations

Au chapitre 7, nous avons montré qu'un swap est équivalent à l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable. À la date de départ du swap, la valeur de l'obligation à taux variable est égale au principal du swap. Une option de swap peut ainsi être interprétée comme une option d'échange d'une obligation à taux fixe contre le principal du swap. Si une option de swap donne le droit à son détenteur de payer le taux fixe et de recevoir le taux variable, c'est un put sur l'obligation à taux fixe, dont le prix d'exercice est le principal du swap. En revanche, si elle donne le droit de payer le taux variable en recevant le taux fixe, c'est un call sur l'obligation à taux fixe, avec un prix d'exercice égal au principal du swap.

Valorisation des options de swap européennes

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 7, le taux de swap pour une maturité donnée, à un instant t, est le taux fixe qui serait échangé contre le LIBOR dans un swap émis en date t. Le modèle classique utilisé pour valoriser les options de swap européennes suppose que le taux de swap à la maturité de l'option est log-normal. Considérons une option de swap donnant le droit de payer le taux s_K et de recevoir le LIBOR dans un swap qui dure n années et qui démarre dans T années. Nous supposons que le swap donne lieu à m paiements par an et le principal est noté L.

Au chapitre 7, nous avons vu que les conventions de décompte des jours pouvaient conduire à de légères différences dans les paiements de la jambe fixe d'une date à l'autre. Ici, nous ignorons cet effet et supposons que le paiement fixe est toujours égal à L/m. Le cas général sera abordé à la fin de cette section.

Notons s_T le taux de swap pour un swap de durée n années à la date d'échéance T de l'option de swap. En comparant les cash-flows du swap à taux s_T avec ceux du swap à taux s_K, on constate que la swaption engendre une série de flux définis par :

$$\frac{L}{m}\max\left(s_T - s_K\,;0\right)$$

Les flux sont reçus m fois par an pendant n années ; notons donc $T_1, T_2, \ldots, T_{mn}$ les dates de paiement, mesurées en années à compter d'aujourd'hui (on a approximativement $T_i = T + \frac{i}{m}$). Chaque cash-flow est le payoff d'un call sur s_T de prix d'exercice s_K. En utilisant le modèle de marché standard, la valeur du cash-flow reçu en T_i est donnée par :

$$\frac{L}{m}P\left(0,T_i\right)\left[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(s_0/s_K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\ln\left(s_0/s_K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où s_0 est le taux de swap forward calculé comme indiqué à l'équation (28.23).

La valeur totale de la swaption est donc :

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

C'est à nouveau une extension naturelle du modèle de Black. La volatilité σ est multipliée par $\sqrt{T}$. Le terme $\sum_{i=1}^{mn} P(0,T_i)$ est le coefficient d'actualisation pour l'ensemble des *mn* payoffs.

Notons A la valeur d'un contrat qui paie $1/m$ aux dates (T_i, i=1, ...,*mn*) ; la valeur de la swaption devient :

$$LA\,[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \tag{29.10}$$

où A est défini par :

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0,T_i)$$

Si, en revanche, la swaption donne le droit à son détenteur de recevoir le taux fixe s_K au lieu de le payer, le payoff s'écrit :

$$\frac{L}{m} \max(s_K - s_T\,; 0)$$

Il s'agit alors d'un put sur s_T. Comme précédemment, les flux sont reçus aux dates (T_i, i= 1, ...,*mn*). La valeur de la swaption donnée par le modèle de marché standard est donc :

$$LA\,[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)] \tag{29.11}$$

On peut évaluer des swaptions avec DerivaGem en choisissant la feuille Cap_and_Swap_Options et en sélectionnant Swap Options comme sous-jacent, et Black-European comme modèle. La courbe LIBOR/swap et, si nécessaire, la courbe OIS sont supposées en composition continue.

■ **Exemple 29.4** Supposons que la courbe des taux sans risque est plate au niveau de 6 % (continu) et considérons une option de swap qui donne à son détenteur le droit de payer 6,2 % dans un swap de trois ans débutant dans cinq ans. Le taux de swap forward est de 6,1 % en composition continue, c'est-à-dire 6,194 % en composition semestrielle. La volatilité du taux de swap est 20 %, les paiements sont semestriels et le principal est 100 €. Dans ce cas :

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-0{,}06\times 5{,}5} + \mathrm{e}^{-0{,}06\times 6} + \mathrm{e}^{-0{,}06\times 6{,}5} + \mathrm{e}^{-0{,}06\times 7} + \mathrm{e}^{-0{,}06\times 7{,}5} + \mathrm{e}^{-0{,}06\times 8}\right) = 2{,}0035$$

Un taux de 6 % continu devient 6,09 % en composition semestrielle. Il s'ensuit dans cet exemple que s_0 = 0,06194 ; s_K = 0,062 ; T = 5 ; σ = 0,2. On en déduit alors :

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}06194/0{,}062) + 0{,}2^2 \times 5/2}{0{,}2\sqrt{5}} = 0{,}2214$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{5} = -0{,}2258$$

L'équation (29.10) permet alors d'obtenir la valeur de la swaption :

$$100 \times 2{,}0035 \times [0{,}06194 \times N(0{,}2214) - 0{,}062N(-0{,}2258)] = 2{,}19$$

qui correspond au prix trouvé dans DerivaGem.

Justification théorique du modèle d'évaluation des swaptions

On peut montrer la cohérence du modèle de Black pour les swaptions en considérant un univers forward-neutre avec l'annuité A comme numéraire. L'analyse de la section 28.4 montre que :

1. La valeur, aujourd'hui, de n'importe quel actif est égale à la valeur aujourd'hui de l'annuité multipliée par l'espérance du rapport :

   $$\text{Prix de l'actif à la date } T / \text{Valeur de l'annuité à la date } T$$

   dans cet univers (voir équation (28.25)) ;
2. L'espérance du taux de swap à la date T est égale au taux de swap forward (voir équation (28.24)).

Le premier résultat montre que la valeur de l'option de swap est donnée par :

$$LA \times E_A[\max(s_T - s_K\,; 0)]$$

Cette quantité est égale, en utilisant l'annexe du chapitre 15, à :

$$LA\,[E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(E_A\left(s_T\right)/s_K\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln\left(E_A\left(s_T\right)/s_K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Le second argument montre ici aussi que $E_A\left(s_T\right) = s_0$. Ces résultats conduisent bien à la formule (29.10). Ainsi, nous pouvons traiter ce cas comme si les taux d'intérêt étaient constants dans l'actualisation, tant que nous utilisons le taux de swap forward comme taux de swap espéré en date T. Ce résultat est valide si on actualise avec un taux LIBOR, mais la section 28.4 montre que c'est aussi vrai si le taux variable du swap n'est pas le taux sans risque, tant que les taux forward sont calculés de manière cohérente avec le choix du taux d'actualisation.

L'impact de la convention de décompte des jours

Nous précisons maintenant les formules précédentes en tenant compte de la convention pour le décompte des jours. Le taux fixe du swap est supposé être exprimé en Exact/365 ou 30/360. Supposons $T_0 = T$ et notons a_i la fraction de période de capitalisation pendant

l'intervalle séparant T_{i-1} de T_i. (Par exemple, si T_{i-1} correspond au 1er mars et T_i au 1er septembre et que le calcul se fait en Exact/365, on a $a_i = 184/365 = 0{,}5041$.) Les formules présentées précédemment sont correctes avec une annuité A définie par :

$$A = \sum_{i=1}^{mn} a_i P(0,T_i)$$

Si on actualise au taux LIBOR, le taux de swap forward se calcule avec l'équation (28.23).

Le cas des taux négatifs

Dans l'évaluation des swaptions, on peut aussi utiliser le modèle de décalage des taux, de sorte à tenir compte d'éventuels taux négatifs. On remplace donc s_0 et R_K par $s_0+\alpha$ et $R_K+\alpha$ dans les équations (29.10) et (29.11). Le décalage α dépend en pratique à la fois de la durée de vie de l'option et de celle du swap sous-jacent. On peut aussi utiliser le modèle gaussien de Bachelier. Quand le détenteur a l'option de payer s_K, l'équation 29.10 devient :

$$LA\left[(s_0 - s_K)N(d) + \sigma_k^*\sqrt{T}N'(d)\right]$$

et quand le détenteur a l'option de recevoir s_K, l'équation (29.11) s'écrit :

$$LA\left[(s_K - s_0)N(-d) + \sigma_k^*\sqrt{T}N'(d)\right]$$

avec :

$$d = \frac{s_0 - s_K}{\sigma_k^*\sqrt{T}}$$

29.4 La couverture des dérivés de taux

Les techniques s'appuyant sur les « grecques » développées au chapitre 19, peuvent être étendues à la couverture des produits dérivés de taux.

Le risque delta est associé ici à une modification de la courbe zéro-coupon. Cependant, les variations de cette courbe sont diverses et de nombreux deltas différents peuvent être calculés.

Les possibilités les plus classiques sont les suivantes :

1. Évaluer l'impact d'une translation d'un point de base de la courbe. Cette variation est parfois notée DV01 ;
2. Évaluer l'impact de faibles variations des prix des instruments qui ont servi à la construction de la courbe ;
3. Segmenter la courbe zéro-coupon (ou forward) et évaluer l'impact d'une translation d'un point de base sur l'un des segments, le reste n'étant pas modifié (voir encadré 6.3) ;
4. Opérer une analyse en composantes principales (voir section 22.9) et évaluer l'impact des changements des facteurs essentiels de l'analyse. Le premier delta ainsi obtenu mesure l'effet d'un déplacement parallèle de la courbe, le second l'effet d'un changement de pente, etc.

En pratique, les traders préfèrent la deuxième méthode car la courbe ne peut varier que si les prix des actifs qui servent à la calculer se modifient. Ils considèrent ainsi qu'il est préférable de se concentrer sur l'exposition au risque de variation de prix des inputs de la courbe des taux.

Quand plusieurs deltas (qui sont des dérivées partielles premières) sont calculés, les choix se multiplient pour les gammas (qui sont des dérivées partielles secondes). Si dix actifs sont utilisés pour construire la courbe et que dix deltas sont calculés par rapport aux variations de prix de chacun de ces composants, il y a 55 gammas possibles, inutilisables en pratique. Une solution peut être d'ignorer les dérivées croisées, mais il en reste quand même 10. Une deuxième possibilité est de calculer un seul gamma en envisageant une translation de la courbe des taux. Une troisième solution est de calculer les gammas par rapport aux deux premiers facteurs de l'analyse en composantes principales.

Le vega d'un portefeuille mesure l'exposition aux changements de volatilité. Une possibilité de gestion de ce risque consiste à évaluer l'impact sur la valeur d'un portefeuille d'une variation donnée de la volatilité de l'ensemble des caps et des swaptions. Cela suppose cependant que la volatilité est gouvernée par un seul facteur, ce qui est sans doute simpliste. Une meilleure solution consiste à réaliser une analyse en composantes principales des volatilités de l'ensemble des instruments et à calculer des vega par rapport aux facteurs les plus significatifs.

Résumé

Le modèle de Black et ses extensions sont très prisés pour l'évaluation des options de taux européennes. Le point clé de ce modèle est l'hypothèse de log-normalité du sous-jacent à la date d'échéance de l'actif dérivé. Pour une option sur obligation, c'est le prix de cette dernière qui est supposé log-normal, pour un cap c'est le taux des caplets qui est log-normal, et pour une swaption, c'est le taux de swap.

Chacun de ces modèles a sa cohérence interne, mais ils ne sont pas cohérents entre eux. Par exemple, quand les prix d'obligations sont log-normaux, les taux d'intérêt et les taux de swap ne le sont pas, et réciproquement. Ces modèles ne sont pas facilement extensibles à l'évaluation des options de swap américaines. Les chapitres 32 et 33 présentent des modèles de taux plus généraux, qui s'adaptent à une gamme plus large de produits financiers.

Le modèle de Black suppose de calculer le payoff espéré en s'appuyant sur l'hypothèse que la valeur future espérée du sous-jacent est égale à sa valeur forward ; on actualise ensuite au taux zéro-coupon observé sur le marché aujourd'hui. Quand le contrat comporte des spécificités en termes de dates de paiement, un ajustement temporel ou de convexité sur le prix forward est nécessaire, comme nous allons le voir au chapitre suivant.

Références complémentaires

Black F., "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, mars 1976, 167-179.

Hull J. et A. White, "OIS Discounting and the Pricing of Interest Rate Derivatives", *Working Paper*, University of Toronto, 2013

Problèmes et exercices

29.1 Une entreprise limite à 2 % le coût d'un emprunt au taux LIBOR 3 mois par l'intermédiaire d'un cap. Le principal est 20 millions d'euros. À une date de réajustement, le LIBOR est à 4 %. Quel est le flux engendré par le cap ? À quelle date ce flux surviendra-t-il ?

29.2 En quoi une swaption ressemble-t-elle à une option sur obligation ?

29.3 Utilisez le modèle de Black pour évaluer un put européen d'échéance 1 an sur une obligation 10 ans. Le prix actuel de l'obligation est 125 €, le prix d'exercice 110 €, le taux à 1 an est 10 %, la volatilité du prix de l'obligation est 8 % par an, et la valeur actuelle des coupons payables pendant la durée de vie de l'option s'élève à 10 €.

29.4 Expliquez avec précision comment vous utiliseriez dans l'évaluation d'un cap 5 ans (a) les volatilités spot, et (b) les volatilités plates.

29.5 Calculez la valeur d'une option qui plafonne le taux 3 mois, débutant dans 15 mois, à 5 % (en composition trimestrielle) sur un principal de 1 000 €. Le taux forward pour la période est 4 % (composition trimestrielle). Le taux continu pour la maturité 18 mois est 3,5 % et la volatilité du taux forward est 12 % par an.

29.6 Une banque utilise le modèle de Black pour évaluer les options sur obligations. Supposez qu'une volatilité implicite, calculée sur une option à 5 ans portant sur une obligation à 10 ans, soit utilisée pour évaluer une option à 9 ans sur cette même obligation. Pensez-vous que le prix ainsi estimé sera trop élevé ou trop faible ? Justifiez votre réponse.

29.7 Calculez la valeur d'une option à 4 ans sur une obligation à 5 ans par le modèle de Black. L'obligation cote 105 €, coupon couru. Une obligation de maturité 4 ans et de même coupon cote 102 €, toujours coupon couru. Le prix d'exercice de l'option est 100 €, le taux sans risque à 4 ans est 10 % et la volatilité anticipée du prix de l'obligation dans quatre ans est 2 %.

29.8 Si la volatilité du taux actuariel pour un put 5 ans sur une obligation 10 ans est 22 %, à combien cette option devrait-elle être évaluée ? Vous supposerez que, au vu des taux d'aujourd'hui, la duration modifiée de l'obligation est de 4,2 ans et le taux actuariel forward de 7 %.

29.9 Quel instrument est équivalent à un collar 5 ans de coût nul, où le prix d'exercice du cap est égal à celui du floor ? À quoi est égal ce prix d'exercice commun ?

29.10 Donnez une relation de parité call-put pour les options européennes sur obligations.

29.11 Donnez une relation de parité call-put pour les swaptions européennes.

29.12 Expliquez l'opportunité d'arbitrage révélée par des volatilités implicites (plates) différentes sur un cap et sur un floor.

29.13 Quand le prix d'une obligation suit une loi log-normale, le taux actuariel peut-il être négatif ? Justifiez votre réponse.

29.14 Quelle est la valeur d'une option de swap européenne qui donne à son détenteur le droit, dans quatre ans, de conclure un swap à 3 ans, par lequel elle paiera un taux fixe de 5 % et recevra le LIBOR ? Le principal du swap est 10 millions d'euros. La courbe des taux est plate au niveau de 5 % (en composition annuelle) et la volatilité du taux de swap est de 20 %. Comparez votre réponse à celle donnée par DerivaGem. Supposez maintenant que tous les taux de swap soient de 5 % et tous les taux OIS de 4,7 %. Utilisez DerivaGem pour calculer la courbe de taux zéro-coupon LIBOR et la valeur de l'option de swap.

29.15 Le taux actuariel d'un zéro-coupon, noté R, suit le processus $dR = \mu\, dt + \sigma\, dz$, où μ et σ sont des fonctions de R et t, et z est un processus de Wiener. Utilisez le lemme d'Itô pour montrer que la volatilité du prix du zéro-coupon tend vers 0 quand la durée de vie résiduelle de l'obligation tend vers 0.

29.16 Calculez « à la main » les prix d'options de l'exemple 29.2.

29.17 Les taux sans risque OIS pour toutes les maturités 1 à 5 ans sont de 6,5 %. Le prix d'un cap à cinq ans avec paiements semestriels et principal 100 € pour un taux plafond de 8 % est 3 €. Utilisez DerivaGem pour calculer :

a. la volatilité plate à cinq ans pour les caps et les floors ;

b. le taux plancher pour construire un collar 5 ans à coût nul si le taux plafond du cap est 8 %.

29.18 Montrez que $V_1 + f = V_2$, où V_1 est la valeur d'une option de swap donnant le droit de payer le taux fixe s_K et de recevoir le LIBOR entre les dates T_1 et T_2, f est la valeur d'un forward swap permettant de recevoir le taux fixe s_K et de payer le LIBOR entre les dates T_1 et T_2, et V_2 est la valeur d'une option de swap permettant de recevoir le taux fixe s_K et de payer le LIBOR entre les dates T_1 et T_2. Déduisez-en que si s_K est égal au taux de swap forward observé aujourd'hui, alors $V_1 = V_2$.

29.19 Supposons que les taux zéro-coupon soient ceux de l'exercice 29.17 ; utilisez DerivaGem pour déterminer la valeur d'une option donnant le droit de payer le taux fixe de 6 % et de recevoir le LIBOR dans le cadre d'un swap à cinq ans débutant dans un an. Le principal est de 100 millions et les paiements sont semestriels ; la volatilité du taux de swap est de 21 %.

29.20 Expliquez comment vous calculeriez (a) la volatilité plate d'un cap à partir des volatilités spot, et (b) les volatilités spot à partir de la volatilité plate ?

Questions complémentaires

29.21 Considérons un put à 8 mois sur une obligation d'État dont la durée de vie résiduelle est 14,25 ans. Le prix coupon couru de cette obligation est 910 €, le prix d'exercice est 900 € et la volatilité 10 % par an. Un coupon de 35 € est payable dans trois mois. Le taux sans risque est de 8 % pour toutes les maturités jusqu'à un an. Utilisez le modèle de Black pour calculer le prix de l'option.

Considérez les deux cas où le prix d'exercice est exprimé coupon couru ou pied de coupon.

29.22 Calculez le prix d'un cap sur LIBOR 3 mois dans neuf mois avec un principal de 1 000 €. Utilisez le modèle de Black avec les informations suivantes :

a. le prix futures de l'Eurodollar neuf mois est 92 (ignorez les différences entre prix forward et prix futures) ;

b. la volatilité implicite d'une option Eurodollar neuf mois est 15 % ;

c. le taux d'intérêt à un an est 7,5 % (en continu) ;

d. le taux de cap est 8 % (en Exact/360).

29.23 Supposez qu'en fréquence de composition annuelle, la courbe LIBOR soit plate au niveau de 8 %. Une swaption donne le droit à son détenteur de recevoir 7,6 % dans un swap de cinq ans débutant dans quatre ans. Les paiements sont annuels. Le principal est de un million d'euros et la volatilité du taux de swap est 25 %. Utilisez le modèle de Black pour évaluer l'option de swap. Comparez votre réponse avec celle donnée par DerivaGem.

29.24 Utilisez DerivaGem pour évaluer un collar à cinq ans qui garantit des taux compris entre 5 % et 7 % sur un prêt fondé sur le LIBOR (avec des réajustements trimestriels). Les courbes des taux zéro-coupon LIBOR et OIS (en continu) sont supposées plates, respectivement à 6 % et 5,8 %. Utilisez une volatilité plate de 20 % et un principal de 100 €. Actualisez au taux OIS.

29.25 Utilisez DerivaGem pour évaluer une swaption européenne qui vous donne le droit, dans deux ans, de conclure un swap pour cinq ans dans lequel vous payez un taux fixe de 6 % et vous recevez le taux variable. Les flux du swap sont échangés semestriellement. Les taux OIS à un, deux, cinq et dix ans (en continu) sont respectivement 5 %, 6 %, 6,5 % et 7 %. Le principal est de 100 €, le taux de swap forward est de 7 % (en composition semestrielle) et sa volatilité est de 15 % par an. Donnez un exemple de la façon dont l'option de swap pourrait être utilisée par une entreprise. Quelle option sur obligation est équivalente à l'option de swap ?

Chapitre 30

Ajustements de convexité, ajustements temporels et quantos

L'évaluation d'un actif dérivé de type européen compte deux étapes :

1. Calculer le flux terminal espéré en supposant que la valeur espérée à l'échéance de chaque variable pertinente est égale à la valeur forward de cette variable ;
2. Actualiser ce flux espéré au taux sans risque applicable pour la période séparant la date d'évaluation de la date de réalisation du flux.

Cette démarche a déjà été utilisée au chapitre 4 pour évaluer des FRA. Nous avons supposé que le taux spot futur était égal au taux forward observé à la date d'évaluation et les flux ont été actualisés au taux sans risque. De même, au chapitre 7, nous avons évalué des swaps en appliquant ces principes. Enfin, aux chapitres 18 et 28, nous avons montré que l'évaluation par le modèle de Black d'un grand nombre d'options européennes est une application de cette méthode en deux étapes. En particulier, les modèles du chapitre 29 concernant les options sur obligations, les caps/floors, et les swaptions appartiennent à cette catégorie.

La question est de savoir si cette technique s'applique dans tous les cas pour les options européennes. La réponse est négative ! Quand les flux sont définis de manière non standard, il est parfois nécessaire d'adapter l'approche précédente, en particulier l'étape 1. Dans ce chapitre, nous analysons trois types d'ajustements : les ajustements de convexité, les ajustements temporels et les quantos.

30.1 Les ajustements de convexité

Nous traitons en premier lieu le cas de l'évaluation d'un actif financier dont le payoff de date T dépend du taux actuariel d'une obligation à cette date.

Habituellement, la valeur forward d'un actif S est calculée en faisant référence à un contrat forward qui paie $S_T - K$ à l'échéance T. C'est la valeur de K qui donne au contrat une valeur initiale nulle. Comme nous l'avons vu à la section 28.4, les taux forward sont définis différemment. On définit le taux actuariel forward (*forward yield*) comme le taux actuariel obtenu quand on considère que le prix de l'obligation est son prix forward. En d'autres termes, si B_T et y_T désignent respectivement le prix et le taux actuariel de l'obligation en date T, ces deux quantités sont liées par une fonction G, c'est-à-dire :

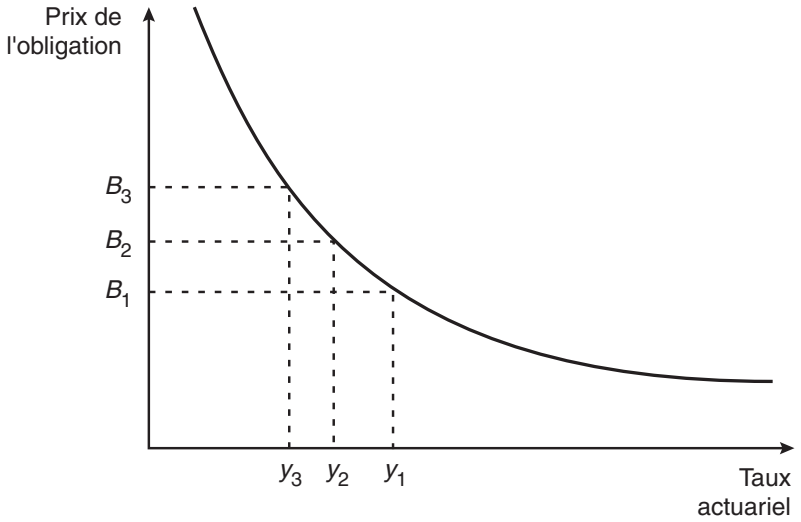
$$B_T = G(y_T)$$

Si F_0 est le prix forward de l'obligation en date 0, le taux actuariel forward y_0 est défini par :

$$F_0 = G(y_0)$$

La fonction G n'est évidemment pas linéaire. Par conséquent, quand le prix futur espéré de l'obligation est égal au prix forward (c'est-à-dire dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T), le taux actuariel futur espéré n'est pas égal au taux actuariel forward.

Ce point est illustré dans le graphique 30.1. Il montre la relation entre prix et taux actuariels. Si on suppose, pour simplifier, qu'il y a trois prix équiprobables en date T pour l'obligation, tels que $B_3 - B_2 = B_2 - B_1$, on constate que le prix espéré est B_2. En revanche, les trois taux actuariels correspondants y_1, y_2, y_3 ne sont pas équidistants car la courbe liant le prix au taux est convexe. Par conséquent, le taux actuariel moyen sera supérieur à y_2 (par l'inégalité de Jensen).



Graphique 30.1 : Relation entre les prix et les taux actuariels d'obligation à une date T

Considérons maintenant un actif dérivé qui engendre un payoff dépendant du taux actuariel y_T. L'équation (28.20) autorise à évaluer cet actif (a) en calculant son paiement espéré dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T, et (b) en actualisant au taux zéro-coupon pour cette même maturité. Dans cet univers, le prix forward de l'obligation est égal au prix futur espéré, mais ici, c'est le taux actuariel espéré qui nous intéresse. L'analyse de l'annexe de ce chapitre donne une approxi-

mation de cette espérance sous la forme :

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)} T \tag{30.1}$$

où G' et G'' désignent les deux premières dérivées de G, E_T est l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre et σ_y est la volatilité du taux actuariel. Par conséquent, on peut actualiser au taux sans risque de maturité T à condition de considérer que le taux actuariel futur espéré est égal à :

$$y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)} T$$

plutôt qu'à y_0. La différence entre les deux :

$$-\frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

est appelée ajustement de convexité. Dans le graphique 30.1, cette différence correspond à celle qui sépare y_2 du taux actuariel espéré. Notons pour terminer que l'ajustement de convexité est positif car G est convexe décroissante, ses deux premières dérivées sont donc de signe opposé.

Application 1 : taux d'intérêt

Comme première application de l'équation (30.1), nous analysons un actif financier qui procure un payoff à la date T égal à l'intérêt obtenu entre T et T^* sur un principal égal à L (cet exemple sera utile au chapitre 34 pour les swaps à flux décalés). Il est bon de noter que l'intérêt de la période T à T^* est normalement payé en T^* ; ici, il est payé en avance, c'est-à-dire en T.

Le cash-flow considéré s'écrit donc $LR_T\tau$, où $\tau = T^* - T$ et R_T est le taux zéro-coupon applicable en T pour une durée $\tau = T^* - T$ (avec une fréquence de composition τ)[1]. R_T s'analyse comme le taux actuariel en T d'un zéro-coupon d'échéance T^*. On peut donc écrire la relation entre le prix de cette obligation et son taux actuariel y sous la forme :

$$G(y) = \frac{1}{1 + y\tau}$$

De l'équation (30.1), on déduit :

$$E_T(R_T) = R_0 - \frac{1}{2} R_0^2 \sigma_R^2 T \frac{G''(R_0)}{G'(R_0)}$$

ou encore :

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2 \sigma_R^2 \tau T}{1 + R_0 \tau} \tag{30.2}$$

où R_0 est le taux forward applicable sur la période allant de T à T^*, vu de la date 0, et σ_R la volatilité de ce taux forward.

1. Pour faciliter la présentation, nous considérons une base Exact/Exact dans les exemples.

La valeur de cet actif financier s'écrit alors :

$$P(0,T)\,L\tau\left(R_0+\frac{R_0^2\sigma_R^2\tau T}{1+R_0\tau}\right)$$

■ **Exemple 30.1**
Considérons un actif dérivé qui engendre un payoff dans dix ans égal au taux zéro-coupon 1 an à cette date (composé annuellement) multiplié par un principal de 1 000 €. Le taux zéro-coupon initial est de 4 % pour toutes les maturités, et la volatilité du taux forward pour la période d'un an débutant dans 10 ans est de 20 %. Dans ce cas, $R_0 = 0{,}04$; $\sigma_R = 0{,}2$; $T = 10$; $\tau = 1$ et $P(0{,}10) = \frac{1}{1{,}04^{10}} = 0{,}6756$. La valeur du produit dérivé est alors :

$$0{,}6756 \times 1\,000 \times 1 \times \left(0{,}04+\frac{0{,}04^1 \times 0{,}2^2 \times 1 \times 10}{1+0{,}04\times 1}\right)$$

c'est-à-dire 27,44 €. Ce prix est à comparer au prix de 27,02 € obtenu sans ajustement de convexité.

Application 2 : les taux de swap

Considérons maintenant un actif dérivé engendrant un payoff à la date T égal à un taux de swap observé à cette date. Un taux de swap est en fait le taux actuariel au pair d'une obligation. Afin de calculer l'ajustement de convexité, nous faisons l'hypothèse (approximative) que le taux d'un swap à N années à la date T est égal au taux actuariel d'une obligation à N années dont le taux de coupon est le taux de swap forward aujourd'hui. Cette approximation permet l'utilisation de l'équation (30.1).

■ **Exemple 30.2** On considère un actif financier dont le payoff dans trois ans est égal au taux de swap à trois ans sur un principal de 100 €. Les paiements du swap sont annuels et les taux de swap pour toutes les maturités sont de 6 % (en composition annuelle). La volatilité du taux de swap forward à trois ans, dans trois ans, est de 22 % (déduite du prix des swaptions). Le taux sans risque à 3 ans est de 5 % en composition annuelle. On approxime le taux de swap par le taux actuariel d'une obligation qui paie un coupon de 6 %, ce qui conduit à une fonction G définie par :

$$G(y)=\frac{0{,}06}{1+y}+\frac{0{,}06}{(1+y)^2}+\frac{1{,}06}{(1+y)^3}$$

On en déduit :

$$G'(y)=-\frac{0{,}06}{(1+y)^2}-\frac{0{,}12}{(1+y)^3}-\frac{3{,}18}{(1+y)^4}$$
$$G''(y)=\frac{0{,}12}{(1+y)^3}+\frac{0{,}36}{(1+y)^4}+\frac{12{,}72}{(1+y)^5}$$

Dans ce cas, le taux actuariel forward, noté y_0, est égal à 6 %. On a alors :

$$G'(y_0)=-2{,}6730 \quad \text{et} \quad G''(y_0)=9{,}8710$$

De l'équation (30.1), on déduit :

$$E_T(y_T) = 0{,}06 + \frac{1}{2} \times 0{,}06^2 \times 0{,}22^2 \times 3 \times \frac{9{,}8710}{2{,}6730} = 0{,}06097$$

Nous devrions bien sûr supposer un taux de swap forward de 6,097 % au lieu de 6 %, en évaluant cet actif. On aboutit à une valeur de :

$$\frac{100 \times 0{,}06097}{1{,}05^3} = 5{,}27$$

soit 5,27 €, qui doit être comparée aux 5,18 € obtenus sans ajustement de convexité.

30.2 Les ajustements temporels

Il s'agit ici de préciser les modifications à apporter à l'évaluation lorsque le flux de l'actif dérivé est payé à une date T^*, mais que la variable V déterminant ce flux est observée plus tôt, en $T < T^*$. Notons :

V_T : valeur de V en T ;
$E_T(V_T)$: espérance forward-neutre (numéraire $P(t,T)$) de V_T ;
$E_{T^*}(V_T)$: espérance forward-neutre (numéraire $P(t,T^*)$) de V_T.

Quand on passe de $P(t,T)$ à $P(t,T^*)$, le ratio des numéraires à considérer est (voir section 28.8) :

$$W = \frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}$$

C'est en même temps le prix forward, vu de la date t, du zéro-coupon pour la période $[T;T^*]$.

Notons maintenant :

σ_V : volatilité de V ;
σ_W : volatilité de W ;
ρ_{VW} : corrélation instantanée de V et W.

De l'équation (28.35), on déduit que le taux de croissance de V est α_V défini par :

$$\alpha_V = \rho_{VW}\sigma_V\sigma_W \tag{30.3}$$

Ce résultat peut s'exprimer à partir du taux forward entre Tet T^*.

Définissons maintenant :

R_F : taux forward pour la période $[T;T^*]$ (fréquence de composition m) ;
σ_R : volatilité de R_F.

La relation entre Wet R_F s'écrit :

$$W = \frac{1}{(1 + R_F/m)^{m(T^*-T)}}$$

Par le lemme d'Itô, on déduit la relation entre les volatilités de W et R_F :

$$\sigma_W = -\frac{\sigma_R R_F (T^* - T)}{1 + R_F/m}$$

L'équation (30.3) peut alors être réécrite [2] :

$$\alpha_v = -\rho_{VR}\frac{\sigma_R \sigma_V R_F (T^* - T)}{1 + R_F/m}$$

En supposant, en première approximation, que R_F reste constant au niveau R_0 et que les volatilités et corrélations sont constantes, on peut écrire :

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T)\exp\left(-\rho_{VR}\frac{\sigma_R \sigma_V R_0 T (T^* - T)}{1 + R_0/m}\right) \tag{30.4}$$

■ **Exemple 30.3** Un actif dérivé engendre un payoff dans six ans défini comme la valeur d'un indice dans cinq ans. La valeur forward de l'indice est 1 200 pour un contrat d'échéance 5 ans. La volatilité de cette valeur forward est 20 %. La volatilité du taux forward pour la période allant de cinq à six ans est 18 %, et la corrélation entre ces deux variables est $-0{,}4$. On suppose de plus que la courbe des taux est plate au niveau de 8 % en composition annuelle. L'application des résultats qui viennent d'être donnés au cas où v est la valeur de l'indice donne :

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T)\exp\left(0{,}4\,\frac{0{,}20 \times 0{,}18 \times 0{,}08 \times 5 \times 1}{1 + 0{,}08}\right) = 1{,}00535 \times E_T(V_T)$$

mais les arguments développés au chapitre 28 permettent d'affirmer que $E_T(V_T)$ est égale à la valeur forward de l'indice, soit 1 200. Il s'ensuit que :

$$E_{T^*}(V_T) = 1\,206{,}42 = 1\,200 \times 1{,}00535$$

La valeur de l'actif dérivé que nous cherchons à évaluer est donc :

$$1\,206{,}42 \times P(0{,}6) = 1\,206{,}42 \times \frac{1}{(1{,}08)^6} = 760{,}25$$

Retour sur l'application 1

Le résultat de l'application 1, à la section 30.1, peut être obtenu par une approche différente. En utilisant les notations d'alors, R_T était le taux d'intérêt entre T et T^*,

2. Les variables Wet R_F sont négativement corrélées. On peut s'en convaincre en écrivant :

$$\sigma_W = -\frac{\sigma_R R_F (T^* - T)}{1 + R_F/m}$$

qui est un nombre négatif, et en posant $\rho_{VW} = \rho_{VR_F}$. D'une autre manière, on peut aussi changer le signe de σ_W, de sorte qu'il soit positif, et définir $\rho_{VW} = -\rho_{VR_F}$. Dans chaque cas, on obtient la même formule pour α_V.

et R_F était le taux forward pour la même période vu de la date 0. Dans l'univers forward-neutre relatif à T^*, la valeur espérée de R_T est R_F. En utilisant l'équation (30.4), $F = R$, dont on déduit $\sigma_F = \sigma_R$; $\rho_{VR} = 1$; $\tau = 1/m$, on aboutit à :

$$E_{T^*}(R_T) = E_T(R_T) \exp\left(-\frac{\sigma_R^2 R_F T\tau}{1 + R_F\tau}\right)$$

ou encore :

$$E_T(R_T) = R_F \exp\left(\frac{\sigma_R^2 R_F T\tau}{1 + R_F\tau}\right)$$

Le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1 donne l'approximation :

$$E_T(R_T) = R_F + \frac{\sigma_R^2 R_F^2 T\tau}{1 + R_F\tau}$$

qui est le résultat de l'équation (30.2).

30.3 Les quantos

Un ***quanto*** est un actif dérivé fondé sur deux devises distinctes. La définition du payoff fait intervenir une variable mesurée dans une devise, mais le payoff lui-même est effectué dans une autre devise. L'exemple le plus frappant est sans doute le contrat sur le Nikkei 225 coté au CME Group (voir encadré 5.3). La variable sous-jacente au contrat est l'indice Nikkei 225, mesuré en yens japonais, mais les paiements du contrat sont réalisés en dollars US.

Considérons un contrat de ce type fournissant un payoff mesuré en devise X à la date T. Ce payoff dépend d'une variable V mesurée en devise Y à la même date T. Nous adoptons les notations suivantes :

$P_X(t,T)$: valeur à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T payant une unité en devise X ;

$P_Y(t,T)$: valeur à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T payant une unité en devise Y ;

V_T : valeur de V en date T ;

$E_X(V_T)$: espérance de V_T dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon en devise X ;

$E_Y(V_T)$: espérance de V_T dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon en devise Y.

Quand on passe de $P_Y(t,T)$ à $P_X(t,T)$, le ratio des numéraires à considérer est :

$$W(t) = \frac{P_X(t,T)}{P_Y(t,T)} S(t)$$

où $S(t)$ est le taux de change spot (en unités de Y par unité de X). Il s'ensuit que le ratio $W(t)$ est le taux de change forward (en unités de Y par unité de X) pour un contrat de maturité T.

Notons :

σ_V : volatilité de V ;

σ_W : volatilité de W ;

ρ_{VW} : corrélation instantanée de V et W.

De l'équation (28.35), on déduit que le changement de numéraire induit une variation du taux de croissance espéré de $F(t)$ égale à :

$$\alpha_V = \rho_{VW}\sigma_V\sigma_W \tag{30.5}$$

Si on suppose volatilités et corrélations constantes, on a :

$$E_X[V_T] = E_Y[V_T]\,\mathrm{e}^{\rho_{VW}\sigma_V\sigma_W T}$$

Une approximation au premier ordre de cette relation s'écrit alors :

$$E_X[V_T] = E_Y[V_T](1 + \rho_{VW}\sigma_V\sigma_W T) \tag{30.6}$$

Cette équation servira à évaluer les swaps différentiels au chapitre 34.

■ **Exemple 30.4** Supposons que l'indice Nikkei soit aujourd'hui à 15 000 yens et que les taux sans risque en dollars US et en yens soient respectivement 5 % et 2 %. Le rendement en dividende (en yens) de l'indice est égal à 1 %. La valeur forward de l'indice pour un contrat de maturité 1 an, selon l'équation (5.8), s'écrit :

$$15\,000\,\mathrm{e}^{(0{,}02-0{,}01)\times 1} = 15\,150{,}75$$

Si la volatilité de cette valeur forward est 20 %, celle du taux de change forward 12 % et la corrélation entre les deux 0,3, la valeur espérée du Nikkei, dans un univers forward-neutre dont le numéraire est un zéro-coupon à 1 an libellé en dollars US, est donnée par :

$$15\,150{,}75\,\mathrm{e}^{0{,}3\times 0{,}2\times 0{,}12\times 1} = 15\,260{,}23$$

C'est la valeur forward d'un contrat sur l'indice Nikkei, qui engendre un paiement en dollars US plutôt qu'en yens. On peut considérer, de manière approximative, qu'il s'agit aussi du prix futures.

L'utilisation des probabilités risque-neutre classiques

Les probabilités forward-neutre, utilisées dans l'exemple précédent, fonctionnent bien quand l'actif engendre un seul payoff à une date future connue T. Dans d'autres situations, il peut être plus pratique de recourir à la probabilité risque-neutre classique. Soit V le processus de valeur de l'actif dans la devise Y et dans l'univers risque-neutre classique ; on cherche à estimer ce même processus dans l'univers risque-neutre pour la devise X.

Notons :

S : taux de change spot en unités de Y par unité de X ;

σ_S : volatilité du taux de change spot ;

σ_V : volatilité de V ;

ρ : corrélation instantanée de S et V.

Dans ce cas, le changement de numéraire consiste à passer du compte d'épargne dans la devise Y au compte d'épargne dans la devise X (les deux sont exprimés en devise X). Comme nous l'avons vu à la section 28.4, chaque compte d'épargne a une volatilité nulle dans l'univers risque-neutre correspondant. On peut montrer, en utilisant le lemme d'Itô, que la volatilité du ratio des numéraires est égale à σ_S.

Le changement de numéraire induit donc un changement du taux de croissance égal à :

$$\rho\,\sigma_V\sigma_S \tag{30.7}$$

Le prix de marché du risque passe donc d'une valeur nulle à $\rho\sigma_S$. Une application de ce résultat est donnée à l'encadré 30.1.

■ **Exemple 30.5** Une option américaine d'échéance 2 ans engendre un paiement donné par $\max(S-K;\,0)$ en livres sterling, où S est le niveau de l'indice S&P500 à la date d'exercice et K est le prix d'exercice de l'option. L'indice est actuellement à 1 200 points. Les taux sans risque en livres sterling et dollars US sont respectivement de 5 % et 3 %, et la corrélation entre les variations de l'indice et celles du taux de change est de 0,2. Les volatilités de l'indice et du taux de change sont respectivement 25 % et 12 %. L'indice procure un rendement en dividende de 1,5 %. On peut alors évaluer l'option en construisant un arbre d'évolution du S&P500, en utilisant comme numéraire le compte d'épargne en livres sterling (c'est-à-dire dans l'univers risque-neutre classique, vu par un investisseur britannique). Comme nous l'avons démontré précédemment, le changement de numéraire entraîne une augmentation du taux de croissance espéré, égale à :

$$0{,}2 \times 0{,}25 \times 0{,}12 = 0{,}006$$

soit 0,6 %. Le taux de croissance du S&P500 dans le numéraire US est :

$$3\ \% - 1{,}5\ \% = 1{,}5\ \%$$

Celui-ci passe à 2,1 % dans le numéraire britannique, et le taux sans risque est de 5 % au Royaume-Uni. Par conséquent, le S&P500 se comporte comme un titre qui procure un dividende de $5\ \% - 2{,}1\ \% = 2{,}9\ \%$ dans le numéraire en livres sterling. Si l'on estime avec DerivaGem la valeur de l'option, avec 100 pas de temps et un prix d'exercice $K = 1\,200$, on obtient 179,83 £.

Encadré 30.1 Le paradoxe de Siegel

Une application intéressante des résultats des deux sections précédentes concerne ce qui est généralement appelé ***paradoxe de Siegel.*** Considérons deux devises X et Y ; notons S le nombre d'unités de Y par unité de X. Comme nous l'avons illustré au chapitre 5, un taux de change se comporte comme une action payant un dividende égal au taux d'intérêt étranger ; par conséquent, le processus de taux de change dans l'univers risque-neutre traditionnel s'écrit :

$$dS = (r_Y - r_X)\, S\, dt + \sigma_S S\, dz$$

où r_X et r_Y sont les taux d'intérêt, supposés constants, dans les deux devises. Le lemme d'Itô permet d'écrire la dynamique du processus $1/S$ sous la forme :

$$d\,(1/S) = (r_X - r_Y + \sigma_S^2)\,(1/S)\, dt + \sigma_S\,(1/S)\, dz$$

On remarque alors, et c'est le paradoxe, que le drift de ce processus n'est pas l'opposé du drift de S. Pour bien interpréter ce résultat, il faut garder à l'esprit que la première équation donne le processus de taux de change dans l'univers risque-neutre de la devise Y. La seconde donne le processus de $(1/S)$ sous le même numéraire. Mais comme $(1/S)$ est le nombre d'unités de X pour une unité de Y, obtenir une symétrie dans les drifts nécessite de changer de numéraire pour passer à l'univers risque-neutre sous le numéraire de la devise X. Dans la section précédente, nous avons montré que, quand on passe d'un numéraire dans une devise Y à un numéraire dans une devise X, le taux de croissance espéré est modifié de $\rho\sigma_V\, \sigma_S$, avec $V = 1/S$ dans notre cas. Mais la corrélation est égale à -1 et les volatilités sont identiques. Il faut donc modifier le taux de croissance espéré de la seconde équation de $-\sigma_S^2$. Par conséquent, après ce changement de numéraire, le paradoxe est résolu, puisque le processus s'écrit :

$$d(1/S) = (r_X - r_Y)\,(1/S)\, dt + \sigma_S(1/S)\, dz$$

On retrouve la symétrie attendue dans les drifts.

Résumé

Quand on évalue un actif dérivé qui engendre un flux à une date future, il est naturel de supposer que les valeurs futures du sous-jacent sont égales aux valeurs forward et d'actualiser au taux pertinent entre la date d'évaluation et la date de paiement. Ce chapitre a montré que ce n'est pas toujours la méthode adéquate. Quand un payoff d'actif dérivé dépend d'un taux actuariel y observé à une date T, l'espérance du taux devrait être supposée plus élevée que le taux actuariel forward, comme indiqué dans l'équation (30.1). Ce résultat peut être adapté aux situations dans lesquelles le flux de l'actif dérivé dépend d'un taux de swap.

Quand une variable est observée à la date T mais que le paiement survient à une date ultérieure T^*, la valeur forward de la variable doit être ajustée comme indiqué dans l'équation (30.4). Quand une variable est observée dans une devise donnée, mais que le paiement est réalisé dans une autre devise, la valeur forward de la variable doit aussi être ajustée. Dans ce cas, la formule d'ajustement est donnée à l'équation (30.6).

Nous utiliserons ces différents résultats au chapitre 34 pour analyser les swaps non standard.

Références complémentaires

BROTHERTON-RATCLIFFE R. et B. IBEN, "Yield Curve Applications of Swap Products", dans E. Schwartz et C. Smith (eds.), *Advanced Strategies in Financial Risk Management*, New York Institute of Finance, New York, 1991.

JAMSHIDIAN F., "Corralling Quantos", *RISK*, mars 1994, 71-75.

REINER E., "Quanto Mechanics", *RISK*, mars 1992, 59-63.

Problèmes et exercices

30.1 Expliquez comment évaluer un actif qui paie $100R$ dans cinq ans si R est le taux un an (en composition annuelle) qui sera observé dans 4 ans. Quelle différence cela fait-il si le paiement est effectif dans quatre ans ? Et dans six ans ?

30.2 Expliquez si un ajustement de convexité est nécessaire quand on veut évaluer :

- **a.** une option qui paie chaque trimestre la différence (si elle est positive) entre le taux de swap cinq ans et le LIBOR 3 mois, appliquée à un nominal de 100 € ; le payoff survient 90 jours après l'observation des taux ;
- **b.** un actif qui paie chaque trimestre la différence (si elle est positive) entre le taux LIBOR 3 mois et le taux des bons du Trésor à 3 mois ; le payoff survient 90 jours après l'observation des taux.

30.3 Supposez que, dans l'exemple 29.3 de la section 29.2, le payoff survienne au bout d'un an au lieu de 15 mois, c'est-à-dire dès que le taux est observé. Quelle différence cela fait-il dans l'application du modèle de Black ?

30.4 On suppose que la courbe des taux OIS (composés annuellement) est plate au niveau de 10 %. Évaluez un actif financier qui, dans 5 ans, recevra le taux de swap 2 ans (composé annuellement) et paiera un taux fixe de 10 %. Les deux taux sont appliqués à un principal de 100 €. La volatilité du taux de swap est 20 % par an. Pourquoi la valeur de cet actif est-elle non nulle ?

30.5 Quelle différence y a-t-il, dans le problème précédent, si le taux de swap est observé dans cinq ans, mais que les échanges de flux ont lieu dans (a) six ans, et (b) sept ans ? Vous supposerez que la volatilité de tous les taux forward est de 20 %, que la corrélation entre le taux de swap forward entre les années 5 et 7 et le taux forward entre les années 5 et 6 est de 0,8, et que la corrélation avec le taux forward entre les années 5 et 7 est de 0,95.

30.6 Le prix d'une obligation à la date T est noté $G(y_T)$, où y_T est le taux actuariel. Le taux actuariel forward, y, est supposé suivre un mouvement brownien géométrique dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon de

maturité T. Le taux de croissance espéré du taux actuariel forward est α et sa volatilité est σ_y.

a. Utilisez le lemme d'Itô pour déterminer le processus de prix forward de l'obligation en fonction de α, y, σ_y et $G(y)$.

b. Le processus de prix forward devrait être une martingale dans cet univers. Déterminez la valeur de α dans ce cas.

c. Montrez que la valeur obtenue pour α est cohérente (du moins en première approximation) avec l'équation (30.1).

30.7 La variable S est le prix d'un actif d'investissement qui procure un dividende au taux q dans la devise A. Elle suit le processus :

$$dS = \mu_S S\,dt + \sigma_S S\,dz$$

dans l'univers réel. Écrivez le processus suivi par S et le prix de marché du risque correspondant, en définissant de nouvelles variables si nécessaire, dans :

a. l'univers risque-neutre traditionnel dans la devise A ;

b. l'univers risque-neutre traditionnel dans la devise B ;

c. l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise A ;

d. l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T dans la devise B.

30.8 Un call engendre un paiement $\max(S_T - K; 0)$ en yens, où S_T est le prix en dollars US de l'or à la date T et K est le prix d'exercice. En supposant que les coûts de stockage de l'or sont nuls et en définissant d'autres variables si nécessaire, calculez la valeur de cette option en date 0.

30.9 Considérons un indice français d'actions qui cote 400. L'euro vaut aujourd'hui 1,1 dollar US. Les taux sans risque en France et aux États-Unis sont respectivement de 6 % et 4 %. Le taux de dividende sur l'indice est de 3 %. Notons Q le nombre d'euros par dollar US et S la valeur de l'indice. La volatilité de S est de 20 %, celle de Q est de 6 % et la corrélation entre les deux est égale à 0,4. Utilisez DerivaGem pour évaluer un call américain sur l'indice si :

a. cette option paie en euros l'excès de la valeur de l'indice par rapport à 400 ;

b. cette option paie en dollars US l'excès de la valeur de l'indice par rapport à 400.

Questions complémentaires

30.10 On considère un actif dérivé payant S dollars US dans deux ans, S désignant la valeur de l'indice Nikkei. L'indice vaut actuellement 20 000 points (un point = un yen). Le taux de change est aujourd'hui de 100 yens/dollars US. La corrélation entre taux de change et rentabilité de l'indice est 0,3 et le rendement en dividende de l'indice est de 1 % par an. La volatilité de l'indice est de 20 % et celle du taux de change est de 12 %. Les taux sans risque sont supposés constants, égaux à 4 % aux États-Unis et 2 % au Japon.

a. Quelle est la valeur de cet actif dérivé ?

b. Notons Q le taux de change à une date donnée pendant la vie du contrat et S la valeur de l'indice à cette même date. Montrez qu'un investisseur américain peut construire un portefeuille dont la valeur change approximativement de ΔS dollars US quand l'indice change de ΔS yens en investissant S dollars US dans l'indice et en vendant SQ yens.

c. Vérifiez le résultat précédent en considérant une augmentation de l'indice de 50 points et une variation du taux de change de $-0{,}3$ yen/dollar US.

d. Comment pourriez-vous couvrir en delta l'actif dérivé en question ?

30.11 Supposons que la courbe des taux sans risque (en composition continue) est plate à 8 %; le flux d'un actif dérivé surviendra dans quatre ans. Il sera égal à la différence entre les taux à cinq ans et à deux ans à cette date, appliquée à un principal de 100 €, les deux taux étant évalués en continu (le flux peut être positif ou négatif). Calculez la valeur de cet actif dérivé en supposant que la volatilité de tous les taux est de 25 %. Quelle différence cela fait-il si le flux survient dans cinq ans au lieu de quatre ? Vous supposerez que tous les taux sont parfaitement corrélés.

30.12 Supposons que le paiement engendré par un actif dérivé survienne dans 10 ans et soit égal au taux de swap à trois ans observé à cette date (pour un swap à paiements semestriels) sur un principal donné. Les courbes zéro-coupon en euros et en yens sont plates aux niveaux de 8 % et 3 % (en composition semestrielle). La volatilité du taux de swap forward est 18 % et celle du taux de change forward à 10 ans « yen par euro » est 12 %, alors que la corrélation entre ce taux de change et le taux d'intérêt en euros est 0,25.

a. Quelle est la valeur de cet actif dérivé si le taux de swap est appliqué à un principal de 100 millions d'euros de telle façon que le paiement soit en euros ?

b. Quelle est la valeur de cet actif dérivé si le taux de swap est appliqué à un principal de 100 millions de yens de telle façon que le paiement soit en yens ?

30.13 Un actif dérivé engendrera un payoff dans huit ans. Il sera égal à la moyenne du taux à un an observé au début des années 5 à 8 appliqué à un principal de 1 000 €. La courbe zéro-coupon est plate à 6 % en composition annuelle ; les taux ont tous une volatilité de 16 % et sont parfaitement corrélés entre eux. Quelle est la valeur de cet actif dérivé ?

Annexe

Démonstration de la formule d'ajustement de convexité

Dans cette annexe, nous démontrons la formule d'ajustement de convexité pour les taux actuariels forward. Supposons pour cela que le paiement de date T d'un actif dérivé dépende du taux actuariel d'une obligation, observé à cette date. Notons :

y_0 : taux actuariel forward de l'obligation, observé aujourd'hui, pour un contrat forward de maturité T ;

y_T : taux actuariel de l'obligation à la date T ;

B_T : prix de l'obligation en T ;

σ_y : Volatilité du taux actuariel forward de l'obligation.

On suppose que B_T s'écrit :

$$B_T = G(y_T)$$

En développant $G(y_T)$ en série de Taylor au voisinage de y_0, on obtient :

$$B_T = G(y_0) + (y_T - y_0)\, G'(y_0) + 0{,}5\,(y_T - y_0)^2\, G''(y_0)$$

où G' et G'' désignent les deux premières dérivées de G. On prend alors l'espérance des deux membres de cette équation, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T. Ceci conduit à :

$$E_T(B_T) = G(y_0) + E_T(y_T - y_0)\, G'(y_0) + 0{,}5\, E_T[(y_T - y_0)^2]\, G''(y_0)$$

où E_T est l'opérateur d'espérance dans l'univers considéré. Par définition, $G(y_0)$ est le prix forward de l'obligation. De plus, on a ici $E_T\,(B_T) = G(y_0)$ ce qui permet d'écrire :

$$E_T[(y_T - y_0)t]\, G'(y_0) + 0{,}5\, E_T[(y_T - y_0)^2]\, G''(y_0) = 0$$

L'expression $E_T[(y_T - y_0)^2]$ est approximativement égale à $\sigma_y^2 y_0^2 T$. On peut donc en déduire :

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2}\,\sigma_y^2\, y_0^2\, T\, \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

Cette relation montre que pour obtenir le taux actuariel espéré dans un univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T, il faut ajouter :

$$-\frac{1}{2}\,\sigma_y^2\, y_0^2\, T\, \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

au taux actuariel forward de l'obligation. C'est bien le résultat de l'équation (30.1) (voir aussi le problème 30.6 pour une autre approche).

Chapitre 31

Les dérivés de taux : la modélisation du taux court

Dans ce chapitre, nous analysons la construction des modèles de structure par termes des taux sans risque, aussi bien dans l'univers réel que dans l'univers risque-neutre. Nous montrons d'abord que lorsque le taux court est un processus de Markov dans l'univers risque-neutre, tous les taux peuvent, au moins en théorie, être exprimés à toute date comme une fonction de ce taux court. Nous consacrons une partie de ce chapitre à deux modèles classiques : le modèle de Vasicek et le modèle de Cox, Ingersoll et Ross. Ces modèles sont relativement simples et conduisent à des expressions analytiques du prix des obligations.

La différence entre le comportement du taux court dans l'univers réel et dans l'univers risque-neutre est déterminée par le prix du marché du risque de taux ; l'expression « prix de marché du risque » est expliquée à la section 28.1. Le prix de marché du risque pour une obligation est positif. Par conséquent, comme taux d'intérêt et prix des obligations sont négativement corrélés, le prix de marché du risque pour un taux d'intérêt est négatif. Cela signifie que la tendance d'un processus de taux d'intérêt est plus faible dans l'univers réel que dans l'univers risque-neutre. La valeur future espérée d'un taux d'intérêt est donc plus faible dans l'univers réel que dans l'univers risque-neutre.

Les modèles d'équilibre considérés dans ce chapitre parviennent à être à peu près cohérents avec la structure de taux d'intérêt observée, mais ils ne garantissent pas l'exactitude de l'ajustement à cette structure actuelle. Néanmoins, lorsque la simulation de Monte-Carlo est réalisée sur un horizon éloigné, par exemple dans le cadre d'une analyse de scénarios, ces modèles sont utiles. Ainsi, un fonds de pension (ou une compagnie d'assurances) qui s'intéresse à l'évolution de son portefeuille au cours des vingt prochaines années peut considérer qu'un ajustement imparfait de la structure par termes actuelle ne pose pas de problème majeur. Dans le chapitre suivant, nous étendrons les résultats du présent chapitre aux modèles de taux court qui respectent parfaitement la structure par termes actuelle. Ces modèles sont utilisés pour évaluer les actifs dérivés de

taux d'intérêt. Le chapitre 33 sera, quant à lui, consacré aux modèles de taux forward cohérents avec la structure par termes actuelle.

31.1 Rappels

Le taux court, r, à une date t est le taux qui s'applique à cette date pour une période de longueur infinitésimale. Il est parfois appelé « taux court instantané ». C'est surtout le processus suivi par r dans l'univers risque-neutre qui importe pour l'évaluation des obligations ou des options de taux. Tous les processus présentés dans la suite, décrivant l'évolution de r, sont supposés définis dans cet univers risque-neutre.

Nous savons, par l'équation (28.19), que la valeur en date t d'un actif dérivé qui engendre un payoff f_T en date T est donnée par :

$$\hat{E}\left(\mathrm{e}^{-\bar{r}(T-t)}\, f_T\right) \tag{31.1}$$

où $\bar{r}$ est la valeur moyenne de r entre t et T, et $\hat{E}$ désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre.

Nous notons toujours $P(t,T)$ le prix en date t d'un zéro-coupon qui paie 1 € en date T. L'équation (31.1) implique alors :

$$P\left(t,T\right) = \hat{E}\left(\mathrm{e}^{-\bar{r}(T-t)}\right) \tag{31.2}$$

Si $R(t,T)$ désigne le taux d'intérêt composé en continu qui prévaut en date t pour une durée $T-t$, on peut écrire :

$$P(t,T) = \mathrm{e}^{-R(t,T)(T-t)}$$

ou encore :

$$R\left(t,T\right) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(P\left(t,T\right)\right) \tag{31.3}$$

De manière équivalente, par l'équation (31.2), on a :

$$R\left(t,T\right) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(\hat{E}\left(\mathrm{e}^{-\bar{r}(T-t)}\right)\right) \tag{31.4}$$

Cette équation permet d'obtenir, à toute date t, la structure par termes des taux à partir de la valeur de r à cette date et du processus stochastique suivi par r. Plus généralement, cette équation montre que, dès que la dynamique de r est définie, celle de la courbe des taux ZC l'est aussi. Supposez que la dynamique de r soit caractérisée par le processus suivant :

$$dr = m(r,t)\,dt + s(r,t)\,dz$$

Le lemme d'Itô indique que tout actif dérivé dépendant de r suit le processus f défini par :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + m\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}s^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)dt + s\,\frac{\partial f}{\partial r}\,dz$$

Si nous travaillons dans l'univers risque-neutre classique et que l'actif dérivé ne paie pas de flux intermédiaires, le processus ci-dessus doit avoir la forme suivante :

$$df = rf\,dt + \cdots$$

de sorte que :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + m\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}s^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) = rf$$

Cette équation est l'équivalent, pour les dérivés de taux, de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton. Une solution particulière de cette équation doit être le prix de l'obligation zéro-coupon $P(t,T)$. Par conséquent :

$$\left(\frac{\partial P(t,T)}{\partial t} + m\frac{\partial P(t,T)}{\partial r} + \frac{1}{2}s^2\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial r^2}\right) = rP(t,T) \tag{31.5}$$

Il est tentant de retenir, par souci de simplicité, une structure par termes des taux d'intérêt plate avec des taux zéro-coupon tous égaux à r, de sorte que $P(t,T) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}$. Toutefois, ce modèle simple ne convient pas puisque le prix du zéro-coupon ne satisfait pas l'équation (31.5) (sauf si m et s sont nuls).

31.2 Les modèles à un facteur

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court, noté r. Cette démarche permet ensuite de tirer des conclusions sur le comportement des prix d'obligations et d'options.

Dans un modèle à un facteur, le taux court dépend d'une seule source d'incertitude. Le processus risque-neutre du taux court est alors décrit par un processus d'Itô de la forme :

$$dr = m(r)\,dt + s(r)\,dz$$

Le drift du processus, noté m, et l'écart-type instantané, noté s, sont des fonctions de r mais ne dépendent pas du temps. L'hypothèse d'une unique source d'incertitude est moins contraignante qu'il n'y paraît. Elle impose que tous les taux évoluent dans la même direction, mais les variations peuvent être d'amplitudes différentes. La forme de la courbe des taux ZC peut donc changer au cours du temps.

Les trois prochaines sections traitent les modèles suivants :

$m(r) = \mu r$; $s(r) = \sigma r$ (modèle de Rendleman et Bartter) ;
$m(r) = a\,(b - r)$; $s(r) = \sigma$ (modèle de Vasicek) ;
$m(r) = a\,(b - r)$; $s(r) = \sigma\sqrt{r}$ (modèle de Cox-Ingersoll-Ross).

Le modèle de Rendleman et Bartter

Dans ce modèle, le processus suivi par r est donc [1] :

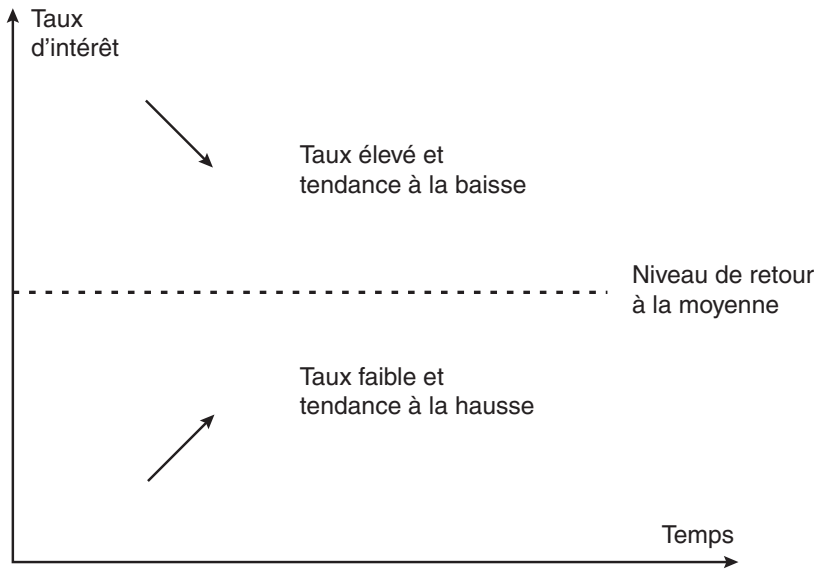
$$dr = \mu\, r\, dt + \sigma\, r\, dz$$

1. Voir R. Rendleman et B. Bartter, "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, mars 1980, 11-24.

où μ et σ sont des constantes. Cette formulation implique que r suit un mouvement brownien géométrique. Il s'agit du même type de processus que celui supposé pour le cours des actions au chapitre 15. Il peut aussi être représenté en temps discret par un arbre binomial comme celui qui est utilisé pour les actions au chapitre 13.

L'hypothèse d'un taux court se comportant comme un prix d'action est un bon point de départ, mais pose certains problèmes. Une différence essentielle entre un taux d'intérêt et un cours d'action est qu'un taux semble poussé, au cours du temps, à revenir vers une moyenne de long terme lorsqu'il s'en éloigne. C'est le phénomène de retour à la moyenne (*mean reversion*). Quand r est élevé, la tendance est à la baisse, alors que le drift devient positif lorsque le taux r est faible. Le graphique 31.1 illustre cette remarque. Le modèle de Rendleman et Bartter ne prend pas en compte cet effet de retour à la moyenne.

Il y a des arguments macroéconomiques en faveur de ce comportement. Quand les taux sont élevés, l'économie tend à ralentir et la demande de fonds de la part des emprunteurs est faible. Par conséquent, les taux diminuent. Quand les taux sont peu élevés, les emprunteurs seront plus nombreux, ce qui aura tendance à faire remonter les taux.



Graphique 31.1 : Le phénomène de retour à la moyenne

Le modèle de Vasicek

Le processus de taux est dans ce cas :

$$dr = a\,(b - r)\,dt + \sigma\,dz$$

où a et b sont des constantes[2]. Ce modèle prend en compte le retour à la moyenne puisque le taux court est poussé vers b à un rythme défini par a. De plus, le terme stochastique $\sigma\,dz$ implique des variations de taux gaussiennes.

2. Voir O. A. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, 177-188.

Vasicek montre que l'équation (31.2) permet de déduire le prix des ZC sous la forme :

$$P(t,T) = A(t,T)\,\mathrm{e}^{-B(t,T)\,r(t)} \tag{31.6}$$

où $r(t)$ est la valeur du taux court à la date t. De plus, A et B sont définis par :

$$B\,(t,T) = \frac{1-\mathrm{e}^{-a\,(T-t)}}{a} \tag{31.7}$$

$$A\,(t,T) = \exp\left(\frac{(B(t,T)-T+t)\,(a^2b-\sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right) \tag{31.8}$$

Quand a = 0, on a $B(t,T) = T-t$ et $A(t,T) = \exp\left(\sigma^2(T-t)^3/6\right)$. Pour comprendre ce résultat, il faut noter que l'équation (31.5), lorsque $m = a\,(b-r)$ et $s = \sigma$, devient :

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial t} + a\,(b-r)\,\frac{\partial P(t,T)}{\partial r} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial r^2} = rP(t,T)$$

On constate alors que $f = A(t,T)\exp\left(-B(t,T)\,r\right)$ satisfait cette équation aux dérivées partielles si :

$$B_t - aB + 1 = 0$$

et :

$$A_t - abAB + \frac{1}{2}\,\sigma^2 AB^2 = 0$$

Les indices indiquent des dérivées partielles dans ces deux équations. Les expressions de $A(t,T)$ et $B(t,T)$ dans les équations (31.7) et (31.8) sont solutions de ces équations. De plus, comme $A(T,T) = 1$ et $B(T,T) = 0$, la condition aux bornes $P(T,T) = 1$ est satisfaite.

Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Dans le modèle de Vasicek, le taux court r peut devenir négatif car l'écart-type instantané ne dépend pas du niveau atteint par r. Cox, Ingersoll et Ross ont proposé une alternative dans laquelle le taux court est toujours positif[3]. Le processus suivi par r est donné par :

$$dr = a\,(b-r)\;dt + \sigma\sqrt{r}\,dz$$

Le drift est identique à celui du modèle de Vasicek, mais l'écart-type instantané est proportionnel à $\sqrt{r}$. Par conséquent, lorsque le taux court diminue, l'écart-type fait de même. À la limite, lorsque ce taux est nul, il reste un drift positif égal à $abdt$, sans terme stochastique, et le taux repart vers des valeurs positives.

Cox, Ingersoll et Ross montrent que les prix des ZC ont une écriture analogue à celle du modèle de Vasicek, c'est-à-dire :

$$P(t,T) = A(t,T)\,\mathrm{e}^{-B(t,T)\,r}$$

3. Voir J. C. Cox, J. E. Ingersoll et S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 1985, 385-407.

mais, évidemment, avec des fonctions A et B différentes :

$$B(t,T) = \frac{2\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+a)\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}$$

$$A(t,T) = \left(\frac{2\gamma\,\mathrm{e}^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+a)\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right)^{2ab/\sigma^2}$$

avec $\gamma = \sqrt{a^2+2\sigma^2}$.

Pour comprendre ce résultat, il faut noter que l'équation (31.5), lorsque $m = a(b-r)$ et $s = \sigma\sqrt{r}$, devient :

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial t} + a(b-r)\frac{\partial P(t,T)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial r^2} = rP(t,T)$$

Comme dans le modèle de Vasicek, on constate que $f = A(t,T)\exp(-B(t,T)\,r)$ satisfait cette équation aux dérivées partielles si :

$$B_t - aB + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 + 1 = 0$$

et :

$$A_t - abAB = 0$$

De plus, comme $A(T,T) = 1$ et $B(T,T) = 0$, la condition aux bornes $P(T,T) = 1$ est satisfaite.

Les propriétés des modèles de Vasicek et de CIR

Les fonctions A et B sont différentes dans les deux modèles précédents mais, chaque fois, on a :

$$P(t,T) = A(t,T)\,\mathrm{e}^{-B(t;T)\,r(t)}$$

de sorte que :

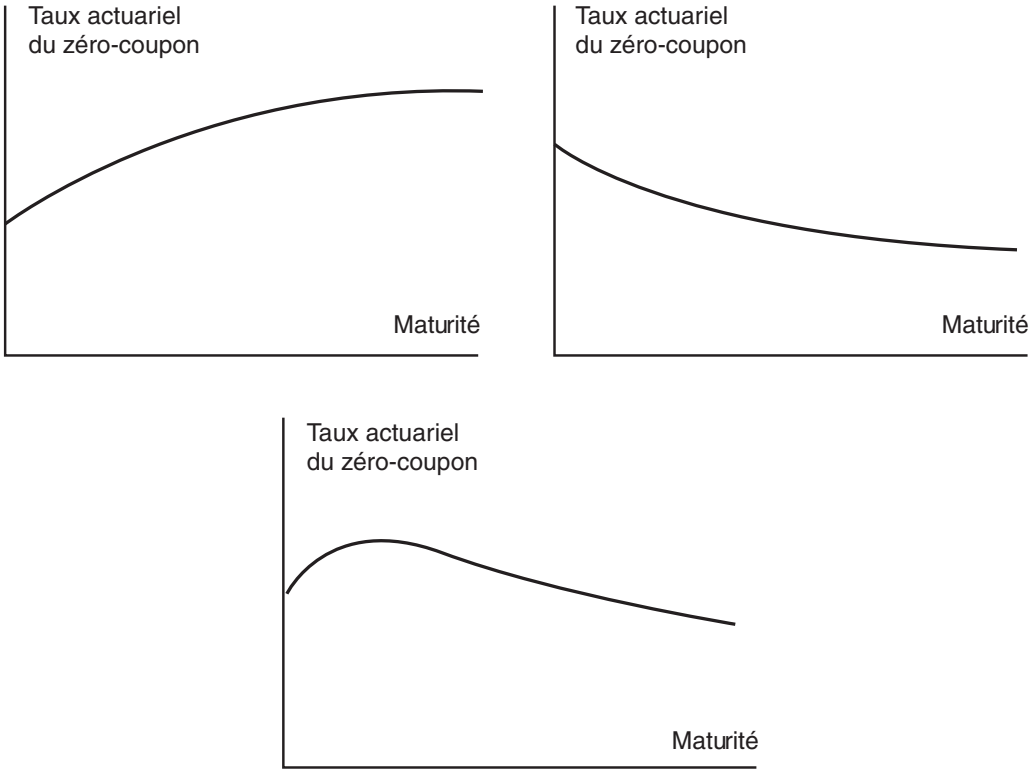
$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial r(t)} = -B(t,T)\,P(t,T) \tag{31.9}$$

L'équation (31.3) implique en outre que le taux zéro-coupon à la date t pour une durée $T-t$ s'écrit :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln(A(t,T)) + \frac{1}{T-t}B(t,T)\,r(t) \tag{31.10}$$

Cette relation montre que la courbe des taux à la date t s'écrit comme une fonction de $r(t)$ dès que les paramètres a, b et σ sont choisis. Le taux $R(t,T)$ dépend linéairement de $r(t)$ [4]. La valeur de $r(t)$ détermine le niveau de la courbe des taux. En revanche, la forme de la courbe est indépendante de $r(t)$, mais dépendante de t. Elle peut être croissante, décroissante ou présenter une légère bosse (voir graphique 31.2).

4. De nombreux chercheurs ont développé des modèles d'équilibre à deux facteurs qui enrichissent l'ensemble des mouvements possibles de la courbe des taux. Voir, par exemple, Longstaff et Schwartz, "Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two-Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47 (4), septembre 1992, 1259-1282.



Graphique 31.2 : Formes possibles de la courbe des taux dans le modèle de Vasicek

Une différence entre le modèle de Vasicek et le modèle CIR est que les taux peuvent devenir négatifs dans le premier alors que ce n'est pas possible dans le second. Si $2ab \geq \sigma^2$, $r(t)$ n'est jamais nul. Sinon, il peut arriver que $r(t)$ touche la barrière 0.

Au chapitre 4, nous avons vu que la duration, D, d'une obligation de prix Q (ou d'autres instruments dépendant des taux d'intérêt) est définie de sorte que :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = -D\Delta y$$

où ΔQ est la variation de Q pour un petit déplacement parallèle de la courbe des taux égal à Δy. Une autre mesure de la duration – notée $\hat{D}$ – qui peut être utilisée avec les modèles de Vasicek ou CIR se caractérise par :

$$\hat{D} = -\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial r}$$

Quand Q est un prix de zéro-coupon de la forme $P(t,T)$, l'équation (31.9) montre que $\hat{D} = B(t,T)$.

■ **Exemple 31.1** Considérons un zéro-coupon à quatre ans, c'est-à-dire que $D = 4$, tel qu'un déplacement parallèle (à la hausse) de la courbe des taux de 10 bp induit une baisse du prix de 0,4 %. En utilisant le modèle de Vasicek avec $a = 0{,}1$, on a :

$$\hat{D} = B(0,4) = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1\times 4})}{0{,}1} = 3{,}30$$

Par conséquent, une hausse du taux court de 10 bp entraîne une baisse de 0,33 % du prix du zéro-coupon. La sensibilité du zéro-coupon aux variations du taux court est donc plus faible que la sensibilité aux déplacements parallèles de l'ensemble de la courbe.

Quand Q est un portefeuille de zéro-coupon de prix $P(t,T_i)$ et de principaux c_i, $i = 1, \ldots, n$, la duration $\hat{D}$ s'écrit :

$$\hat{D} = -\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial P(t,T_i)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{P(t,T_i)}{Q}\hat{D}_i$$

où $\hat{D}_i$ est la duration de l'obligation i. Comme une obligation à coupons n'est rien d'autre qu'un portefeuille d'obligations zéro-coupon, cette formule permet aisément de calculer la duration d'une obligation à coupons, comme nous l'avons fait au tableau 4.6. Une mesure de convexité adaptée aux modèles de Vasicek et de CIR peut aussi être définie (voir problème 31.11).

Le processus de prix des obligations

Le taux de croissance espéré de $P(t,T)$ à la date t dans l'univers risque-neutre classique est $r(t)$, puisque $P(t,T)$ est le prix d'un titre échangé sur le marché. Comme $P(t,T)$ est une fonction de $r(t)$, on peut calculer le coefficient de dz dans le processus $P(t,T)$ en utilisant le lemme d'Itô. Il vaut $\sigma \times \partial P(t,T)/\partial r(t)$ dans le modèle de Vasicek et $\sigma\sqrt{r(t)} \times \partial P(t,T)/\partial r(t)$ dans celui de CIR. Les processus de prix dans l'univers risque-neutre peuvent alors être obtenus à l'aide de l'équation (31.9) :

$$\text{Vasicek :} \quad dP(t,T) = r(t)\,P(t,T)\,dt - \sigma B(t,T)\,P(t,T)\,dz(t)\ ; \tag{31.11}$$

$$\text{CIR :} \quad dP(t,T) = r(t)\,P(t,T)\,dt - \sigma\sqrt{r(t)}B(t,T)\,P(t,T)\,dz(t). \tag{31.12}$$

Si l'on souhaite comparer les structures des taux dans les deux modèles pour un niveau de taux donné r, il paraît raisonnable de choisir les mêmes paramètres a et b. Cependant, la volatilité du modèle de Vasicek, qu'on notera σ_{vas}, doit être choisie approximativement égale à la volatilité CIR, notée σ_{cir}, multipliée par $\sqrt{r}$. Par exemple, si $r = 4$ % et $\sigma_{vas} = 0{,}01$, la valeur adéquate pour σ_{cir} est $0{,}01/\sqrt{0{,}04} = 0{,}05$. Vous trouverez à l'adresse www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/Vasicekcir un logiciel permettant d'expérimenter ces modèles. Avec le modèle de Vasicek, le taux court peut devenir négatif ; ce n'est pas possible avec le modèle CIR.

31.3 Univers réel *versus* univers risque-neutre

Les obligations ont un prix de marché du risque positif, de sorte que les investisseurs exigent un supplément de rentabilité (par rapport au taux sans risque) pour investir dans ces titres. Le taux court étant négativement relié aux prix d'obligations, ce taux a un prix de marché du risque négatif.

Appelons λ ce prix de marché du risque (négatif) du taux court, noté r. Si le processus risque-neutre s'écrit :

$$dr = m(r)\,dt + s(r)\,dz$$

le processus dans l'univers réel, déduit du chapitre 28, s'écrit :

$$dr = [m(r) + \lambda s(r)]\, dt + s(r)\, dz$$

Dans le cas du modèle de Vasicek, le processus risque-neutre est défini par :

$$dr = a\,(b - r)\, dt + \sigma\, dz$$

ce qui conduit au processus ci-dessous dans l'univers réel :

$$dr = [a\,(b - r) + \lambda\sigma]\, dt + \sigma\, dz$$

En supposant que λ soit constant, ce processus devient :

$$dr = a\,(b^* - r)\, dt + \sigma\, dz \tag{31.13}$$

avec $b^* = b + \lambda\sigma/a$. On constate alors que les processus dans les deux univers s'expriment de la même façon, à l'exception du paramètre de retour à la moyenne, qui est plus faible dans l'univers risque-neutre puisque λ est négatif.

En ce qui concerne le modèle CIR, le processus risque-neutre est :

$$dr = a\,(b - r)\, dt + \sigma\sqrt{r}\, dz$$

En écrivant $\lambda = \kappa\sqrt{r}$, où κ est une constante négative, le processus de taux dans l'univers réel s'écrit :

$$dr = [a\,(b - r) + \kappa\sigma r]\, dt + \sigma\sqrt{r}\, dz$$

Dans ce cas, on peut transformer la formulation en :

$$dr = a^*(b^* - r)\, dt + \sigma\sqrt{r}\, dz$$

avec $a^* = a - \kappa\sigma$ et $b^* = ab/a^*$. Les processus dans les deux univers ont une formulation analogue ; seuls le paramètre de retour à la moyenne et la vitesse de retour sont différents.

Considérons maintenant le prix des obligations. L'équation (31.11) nous indique le processus de prix de l'obligation dans l'univers risque-neutre du modèle de Vasicek. Dans l'univers réel avec un prix de marché du risque égal à λ, le processus de prix s'écrit :

$$dP(t,T) = [r(t) - \lambda\sigma B_{vas}(t,T)]\, P(t,T)\, dt - \sigma B_{vas}(t,T)\, P(t,T)\, dz(t)$$

L'équation (31.12) décrit le processus de prix de l'obligation dans l'univers risque-neutre du modèle CIR. Quand le prix de marché du risque est $\kappa\sqrt{r}$, le processus de prix dans l'univers réel devient :

$$dP(t,T) = [r(t) - \kappa\sigma B_{cir}(t,T)]\, P(t,T)\, dt - \sigma\sqrt{r(t)} B_{cir}(t,T)\, P(t,T)\, dz(t)$$

31.4 L'estimation des paramètres

Illustrons l'estimation des paramètres à l'aide de la version discrète du modèle de Vasicek dans l'univers réel déduite de l'équation (31.13) :

$$\Delta r = a\,(b^* - r)\,\Delta t + \sigma\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

afin d'ajuster des données de taux court journaliers pour une période allant de juin 1982 au 23 août 2016, dans l'objectif de réaliser une simulation de Monte-Carlo (une feuille de calcul est disponible à l'adresse www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/Vasicekcir). Les paramètres du modèle sont estimés en régressant Δr sur r. La pente de la droite de régression est égale à $-0{,}000545$; l'ordonnée à l'origine 0,00000915 et l'écart-type de l'estimation est 0,000754. Dans ce cas, $\Delta t = 1/250$. Comme $0{,}00000915 = 0{,}00229/250$, et $0{,}000545 = 0{,}136/250$ et $0{,}000754 = 0{,}0119/\sqrt{250}$, le résultat de la régression est équivalent à :

$$\Delta r = (0{,}00229 - 0{,}136\,r)\,\Delta t + 0{,}0119\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

ou encore :

$$\Delta r = 0{,}136(0{,}0168 - r)\,\Delta t + 0{,}011\,9\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}$$

Les valeurs optimales des paramètres sont donc $a = 0{,}136$, $b = 0{,}0168$, ou encore 1,68 % et $\sigma = 0{,}0119$, soit 1,19 %. Le problème 31.16 montre qu'on peut aussi obtenir ce résultat à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance.

Jusqu'à présent, nous avons estimé les paramètres du modèle de Vasicek dans l'univers réel. Si le prix de marché du risque est λ, la section précédente montre que ces paramètres deviennent $a = 0{,}136$, $b = 0{,}168 - 0{,}0119\lambda/a$ et $\sigma = 0{,}0119$. Avec une valeur d'essai pour λ, on peut utiliser les équations (31.7), (31.8) et (31.10) pour estimer la structure par termes des taux zéro-coupon. Un solveur permet ensuite de déterminer la valeur de λ qui minimise la somme des carrés des écarts entre taux observés et taux estimés par le modèle. On aboutit à une valeur de $\lambda = -0{,}175$ [5]. Le tableau 31.1 compare les taux zéro-coupon fournis par le modèle lorsqu'on utilise cette valeur optimale de λ avec les taux de marché. Le problème 31.17 utilise les mêmes données dans le cadre du modèle CIR.

La méthode d'estimation en deux étapes utilisée plus haut est simple ; aucune contrainte n'est imposée aux taux d'intérêt mesurés à une autre date que la date actuelle. Les praticiens utilisent des méthodes économétriques un peu plus sophistiquées. Les paramètres obtenus pour le modèle de Vasicek paraissent raisonnables, mais ce n'est pas toujours le cas [6]. En particulier, la période sur laquelle est réalisée l'estimation, ainsi que la forme de la structure par termes actuelle, peuvent fortement influencer les résultats. Un peu

5. Des travaux comme ceux de R. Stanton, "A Nonparametric Model of the Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate risk", *Journal of Finance*, 52 (5), 1997, 1973-2002, estiment le prix de marché du risque à partir de la pente moyenne de la structure par termes des taux sur un horizon court. Dans un article récent, J. C. Hull, A. Sokol et A. White, "Short-Rate Joint-Measure Models", *Risk*, 3, 2015, 59-63, montrent que cette approche tend à produire des prix de marché du risque trop grands en valeur absolue (de l'ordre de -1, voire moins).

6. Comme nous l'illustrons dans le problème 31.16, les résultats obtenus avec ces mêmes données pour le modèle de CIR ne sont pas aussi raisonnables.

de réflexion et de pratique est nécessaire pour savoir quelles données utiliser lorsqu'on estime un modèle de Vasicek ou un modèle CIR.

Tableau 31.1 : Ajustement optimal du modèle aux taux de marché

Maturité	Taux du modèle (en %)	Taux du marché (en %)
0,5	0,40	0,45
1,0	0,49	0,58
2,0	0,65	0,74
3,0	0,80	0,86
5,0	1,06	1,15
7,0	1,27	1,40
10,0	1,52	1,55
20,0	2,02	1,88
30,0	2,26	2,24

31.5 Quelques modèles plus sophistiqués

Les modèles de Vasicek et CIR sont des modèles markoviens à un seul facteur. Le modèle de Vasicek peut être étendu en introduisant un second facteur sous la forme suivante :

$$dr = (u - a\,r)\,dt + \sigma_1\,dz_1$$

où u est un processus débutant à 0 et caractérisé par :

$$du = -b\,u\,dt + \sigma_2\,dz_2$$

Dans ce modèle, le paramètre de retour à la moyenne (u/a) est un processus stochastique. Néanmoins, les prix des obligations ont une expression analytique.

$$P(t,T) = A(t,T)\,\mathrm{e}^{-B(t,T)\,r(t) - C(t,T)\,u}$$

où $B(t,T)$ est défini de la même manière que dans le modèle de Vasicek et :

$$C(t,T) = \frac{\mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a\,(a-b)} - \frac{\mathrm{e}^{-b(T-t)}}{b\,(a-b)} + \frac{1}{ab} \tag{31.14}$$

La fonction $A(t,T)$ a une formulation plus complexe (voir la note technique n° 14 sur le site www.pearson.fr).

Un autre modèle à deux facteurs, qui conduit à une expression analytique des prix d'obligations, est dû à Longstaff et Schwarz [7]. D'autres modèles multifacteurs sont parfois utilisés par les praticiens pour décrire l'évolution de la structure par termes des taux d'intérêt dans l'univers réel. Au chapitre 33, nous décrirons de quelle façon les modèles fondés sur l'absence d'arbitrage peuvent être adaptés aux taux forward.

7. "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47 (4), septembre 1992, 1259-1282.

Résumé

Dans un modèle markovien du taux court, la valeur du taux court à un instant donné détermine la structure par termes des taux. Cette approche est donc attractive par sa simplicité. Deux modèles usuels de dynamique du taux court ont été développés par Vasicek, pour le premier, et par Cox, Ingersoll et Ross (CIR), pour le second. Dans ces deux modèles, le taux court suit un processus de retour à la moyenne ; bien évidemment, de l'incertitude s'ajoute à ce phénomène de retour à la moyenne. Dans le modèle de Vasicek, la composante aléatoire de la variation du taux court est centrée et a un écart-type constant. Dans le modèle de CIR, cette même composante aléatoire est aussi centrée, mais a un écart-type proportionnel à la racine carrée du taux court. Cette différence entre les deux modèles implique que les taux peuvent devenir négatifs chez Vasicek mais pas chez CIR. Dans les deux modèles, le prix des obligations a une formulation analytique.

Le prix de marché du risque du taux court est négatif, et le processus de taux court dans l'univers réel est analogue à celui obtenu dans l'univers risque-neutre, avec cependant un taux de retour à la moyenne plus élevé dans l'univers risque-neutre. Dans le cas du modèle de CIR, les mêmes remarques s'appliquent, mais il s'y ajoute une vitesse de retour à la moyenne plus élevée dans l'univers réel.

Les modèles de ce chapitre ne fournissent pas un ajustement parfait de la structure actuelle des taux d'intérêt ; ils sont néanmoins utiles pour simuler le comportement des taux d'intérêt dans certaines situations. Lorsqu'il s'agit d'évaluer des actifs dérivés, il est préférable de retenir un modèle qui respecte parfaitement la structure observée. Les modèles qui satisfont ces conditions font l'objet du chapitre suivant. Les modèles généraux décrivant le comportement des taux forward sont développés au chapitre 33.

Références complémentaires

Cox J. C., J. E. Ingersoll et S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 1985, 385-407.

Longstaff F. A. et E. S. Schwartz, "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47 (4), septembre 1992, 1259-1282.

Vasicek O. A., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, 177-188.

Problèmes et exercices

31.1 Supposons que le taux court est aujourd'hui à 4 %, avec un écart-type de 1 % par an. Que devient la volatilité quand le taux passe à 8 % dans :

a. le modèle de Vasicek ?

b. le modèle de Rendleman et Bartter ?

c. le modèle de Cox-Ingersoll-Ross ?

31.2 Si le prix d'une action suivait un processus avec retour à la moyenne ou, plus généralement, dépendant du chemin suivi, le marché ne serait pas efficient. Pourquoi n'est-ce pas le cas quand c'est le taux court qui suit un tel processus ?

31.3 Quelle est la différence entre un modèle à un facteur et un modèle à deux facteurs ?

31.4 Supposons que $a = 0{,}1$, $b = 0{,}03$ et $\sigma = 0{,}01$ dans le modèle de Vasicek et dans l'univers risque-neutre. Quel est le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité 5 ans, de nominal 1 € avec un taux court égal à 2 % ?

31.5 Supposons que $a = 0{,}1$, $b = 0{,}03$ et $\sigma = 0{,}07$ dans le modèle de CIR et dans l'univers risque-neutre. Le prix de marché du risque est égal à l'opposé de la racine carrée du taux court ($-\sqrt{r(t)}$). Quels sont les processus suivis par (a) le taux court et (b) le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité 4 ans ?

31.6 Supposons que le prix de marché du risque du taux court est $\lambda_1 + \lambda_2 r$ (λ_1 et $\lambda_2 r$ sont négatifs). Montrez que si le processus de taux court dans l'univers réel est celui du modèle de Vasicek, ce processus dans l'univers réel a la même structure. Déterminez les relations entre les vitesses de retour à la moyenne dans les deux modèles. Répondez à la même question pour le paramètre de retour à la moyenne.

31.7 On mesure le taux court à des instants séparés de Δt. On note r_i la i-ème observation. Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de a, b^* et σ dans le modèle de Vasicek est obtenu en maximisant :

$$\sum_{i=1}^{m} \left(-\ln(\sigma^2 \Delta t) - \frac{\left[r_i - r_{i-1} - a\left(b^* - r_{i-1}\right) \Delta t \right]^2}{\sigma^2 \Delta t} \right)$$

31.8 Calculez la mesure alternative de la duration présentée à la section 31.2 pour une obligation à 2 ans avec un principal de 100 € qui paie des coupons semestriels de 1,5 €, en utilisant le modèle de Vasicek de paramètres $a = 0{,}13$, $b = 0{,}012$ et $\sigma = 0{,}01$. Le taux court est de 1 %. Montrez que cette duration permet d'estimer correctement l'effet d'un accroissement du taux court à 1,05 %.

31.9 Supposons que $a = 0{,}1$ et $b = 0{,}1$ dans les modèles de Vasicek et de Cox-Ingersoll-Ross. Dans les deux cas, le taux court initial est 10 % et l'écart-type initial dans un intervalle Δt est $0{,}02\sqrt{\Delta t}$. Comparez les prix donnés par ces deux modèles pour un ZC de maturité 10 ans.

31.10 Supposez que le taux court r est de 4 % et que son processus dans l'univers réel est :

$$dr = 0{,}1\,(0{,}05 - r)\,dt + 0{,}01\,dz$$

alors que ce même processus dans l'univers risque-neutre s'écrit :

$$dr = 0{,}1\,(0{,}11 - r)\,dt + 0{,}01\,dz$$

a. Quel est le prix de marché du risque de taux ?

b. Quelles sont les espérances de rentabilité et volatilité d'une obligation zéro-coupon à cinq ans dans l'univers risque-neutre ?

c. Quelles sont les espérances de rentabilité et volatilité d'une obligation zéro-coupon à cinq ans dans l'univers réel ?

31.11 Répondez aux questions suivantes.

a. Calculez la dérivée seconde de $P(t,T)$ par rapport à r dans les modèles de Vasicek et de CIR.

b. Dans la section 31.2, $\hat{D}$ est présenté comme une alternative à la mesure de duration usuelle D. Quelle est l'alternative $\hat{C}$ à la mesure de convexité de la section 4.9 ?

c. Que représente $\hat{C}$ pour $P(t,T)$? Comment calculeriez-vous $\hat{C}$ pour une obligation à coupons ?

d. Proposez un développement en série de Taylor pour $\Delta P(t,T)$ par rapport à Δr et $(\Delta r)^2$ pour les modèles de Vasicek et de CIR.

Questions complémentaires

31.12 Supposons que $a = 0{,}15$, $b = 0{,}025$ et $\sigma = 0{,}012$ dans le modèle de Vasicek et dans l'univers risque-neutre. Le prix de marché du risque du taux court est égal à $-0{,}2$. Quels sont les processus suivis (dans l'univers réel et dans l'univers risque-neutre) par (a) le taux court et (b) le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité 3 ans ?

31.13 Supposons que $a = 0{,}15$, $b = 0{,}025$ et $\sigma = 0{,}075$ dans le modèle CIR et dans l'univers risque-neutre. Quel est le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité 5 ans, de nominal 1 €, avec un taux court égal à 2,5 % ?

31.14 Supposons que le prix de marché du risque du taux court est $\lambda_1/\sqrt{r} + \lambda_2\sqrt{r}$. Montrez que si le processus de taux court dans l'univers réel est celui du modèle CIR, ce processus dans l'univers risque-neutre a la même structure. Déterminez les relations entre les vitesses de retour à la moyenne dans les deux modèles. Répondez à la même question pour le paramètre de retour à la moyenne.

31.15 Dans l'extension à deux facteurs du modèle de Vasicek défini à la section 31.5, donnez l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire un prix d'obligation zéro-coupon $P(t,T)$. Utilisez ce résultat pour déterminer les équations satisfaites par $A(t,T)$, $B(t,T)$ et $C(t,T)$. Montrez que les expressions de $B(t,T)$ de l'équation (31.7) et de $C(t,T)$ de l'équation (31.14) satisfont ces équations (conseil : utilisez l'équation (14A.10) pour obtenir le terme de tendance de $P(t,T)$ et égalisez ce terme à $rP(t,T)$).

31.16 Utilisez le résultat de l'exercice 31.7 pour déterminer le meilleur ajustement des paramètres du modèle de Vasicek, en utilisant les mêmes données que dans la section 31.4 (voir www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/VasicekCIR). Vérifiez que la régression de la section 31.4 et la méthode du maximum de vraisemblance donnent le même résultat.

31.17 Quel est le résultat correspondant à celui de l'exercice 31.7 pour le modèle CIR ? Employez la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer a, b et σ dans le modèle CIR, en utilisant les mêmes données que dans la section 31.4 (voir www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/VasicekCIR). En posant un prix de marché du risque égal à $\kappa\sqrt{r}$, utilisez les données du tableau 31.1 pour obtenir l'ajustement optimal du paramètre κ.

Chapitre 32

Les modèles de taux court fondés sur l'absence d'arbitrage

L'inconvénient des modèles d'équilibre présentés dans le chapitre précédent est qu'ils ne s'ajustent pas automatiquement à la structure par termes observée sur le marché aujourd'hui. Par un calibrage judicieux, ils permettent de retrouver la plupart des structures observées en pratique. Cependant, l'ajustement aux observations n'est pas exact et, dans certains cas, des erreurs significatives apparaissent. La plupart des traders ne sont donc pas satisfaits par ces modèles. Assez logiquement, ils déclarent qu'ils ne peuvent pas avoir confiance dans un modèle d'évaluation d'options sur obligations qui n'est même pas capable d'évaluer correctement l'obligation elle-même ! Une erreur de 1 % sur le prix du sous-jacent peut entraîner une erreur de 25 % sur le prix de l'option.

Un modèle fondé sur l'absence d'opportunités d'arbitrage (nous dirons « modèle sans arbitrage » dans la suite) est construit de façon à être cohérent avec la structure par termes actuelle. En quelque sorte, la différence essentielle entre les deux approches est qu'un modèle d'équilibre donne la structure initiale comme un output, alors qu'un modèle sans arbitrage prend la structure initiale comme input.

Dans un modèle d'équilibre, le drift du taux court n'est pas, en général, une fonction du temps, alors qu'il l'est le plus souvent dans un modèle sans arbitrage. Cela s'explique par le fait que la structure des taux initiale détermine la trajectoire moyenne qui sera prise par le taux court dans le futur. Si la courbe des taux est fortement croissante entre deux maturités t_1 et t_2, r aura un drift positif entre ces deux dates. À l'inverse, si la courbe est fortement décroissante entre ces deux maturités, le drift de r sera négatif entre ces deux dates.

32.1 Extensions des modèles d'équilibre

Certains modèles d'équilibre peuvent être transformés en modèles d'arbitrage en incluant une fonction dépendant du temps dans la tendance du taux court. Dans la suite de ce chapitre, nous considérons successivement les modèles de Ho et Lee, de Hull et White (à un et deux facteurs), de Black, Derman et Toy, et enfin de Black et Karasinski.

Le modèle de Ho et Lee

Le premier modèle sans arbitrage de la structure des taux a été proposé par Ho et Lee en 1986[1]. Dans leur article, le modèle est en temps discret avec une évolution binomiale de la fonction d'actualisation, c'est-à-dire la fonction qui, à une maturité T, fait correspondre $P(t,T)$.

Deux paramètres sont ici essentiels : l'écart-type du taux court et le prix de marché du risque pour ce taux. La version en temps continu de ce modèle s'écrit :

$$dr = \theta(t)\,dt + \sigma\,dz \tag{32.1}$$

avec σ constant et $\theta(t)$ une fonction du temps, calibrée pour que le modèle s'ajuste parfaitement à la courbe ZC initiale. $\theta(t)$ définit donc la variation moyenne du taux court à la date t et ne dépend pas du niveau atteint par r à cette date. Il est intéressant de constater que le prix de marché du risque n'intervient plus dans le modèle de Ho et Lee quand il s'agit d'évaluer des actifs dérivés. C'est le phénomène déjà observé dans le modèle de Black et Scholes quand l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation d'une option.

$\theta(t)$ possède la formulation analytique suivante (voir la note technique n° 31 sur le site www.pearson.fr) :

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t \tag{32.2}$$

où $F(0,t)$ est le taux forward instantané pour l'horizon t, vu de la date 0. L'indice t désigne la dérivée partielle de F par rapport à t. Une approximation de $\theta(t)$ consiste à négliger $\sigma^2 t$; dans ce cas, la variation espérée du taux court à la date t est égale à la pente de la fonction de taux forward instantané à cette date, vu de la date 0.

Le modèle de Ho et Lee est illustré dans le graphique 32.1 ; la pente de la courbe des taux forward définit la variation moyenne du taux court, et un aléa normal vient s'ajouter à ce terme de tendance.

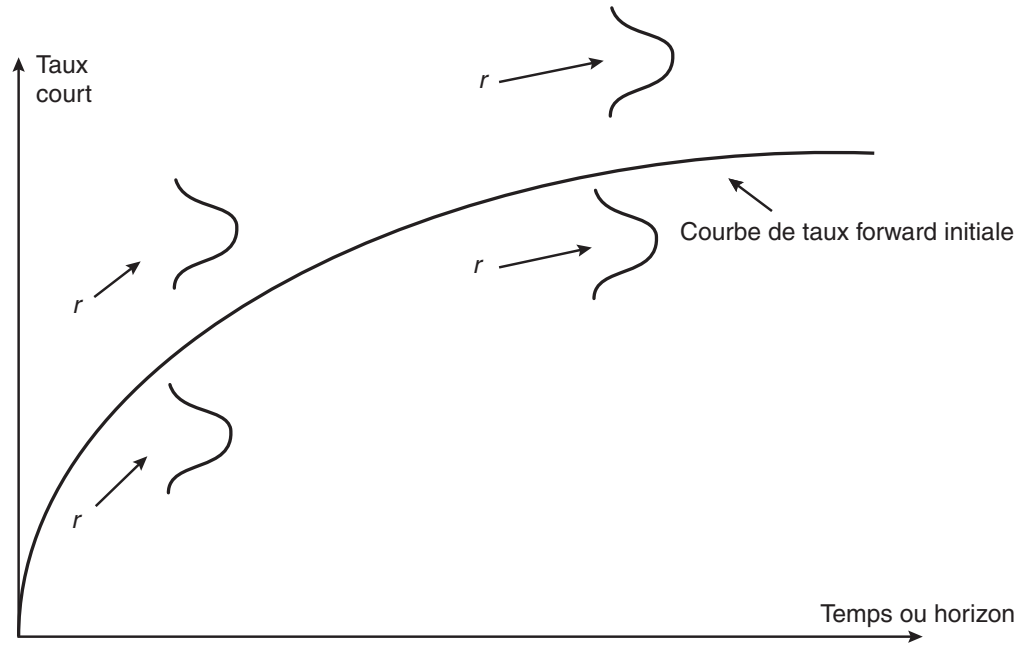
Les obligations ZC et les options sur ces obligations possèdent une expression analytique dans cette approche. Dans ces relations, l'instant 0 est la date d'aujourd'hui, alors que t et T désignent des dates futures quelconques telles que $T \geq t$.

$$P(t,T) = A(t,T)\,\mathrm{e}^{-r(t)(T-t)} \tag{32.3}$$

avec :

$$\ln\left(A\left(t,T\right)\right) = \ln\left(\frac{P\left(0,T\right)}{P\left(0,t\right)}\right) + \left(T-t\right)F(0,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\left(T-t\right)^2$$

1. Voir T. S. Y. Ho et S. B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, décembre 1986, 1011-1029.



Graphique 32.1 : Le modèle de Ho et Lee

La section 4.8 fournit $F(0,t) = -\partial \ln(P(0,t))/\partial t$. Les équations précédentes définissent donc le prix d'un zéro-coupon à une date t en fonction du taux court à cette date et des prix de zéro-coupon aujourd'hui. Ces derniers sont évalués à l'aide de la structure par termes des taux actuelle et de l'équation (32.3).

Le modèle de Hull et White à un facteur

Dans un article publié en 1990, Hull et White analysent des extensions du modèle de Vasicek permettant de respecter la structure initiale[2]. Une des versions considérées, appelée modèle de Hull et White, s'appuie sur le processus :

$$dr = [\theta(t) - a\,r]\,dt + \sigma\,dz \tag{32.4}$$

qui s'écrit encore :

$$dr = a\left[\frac{\theta\,(t)}{a} - r\right]\,dt + \sigma\,dz$$

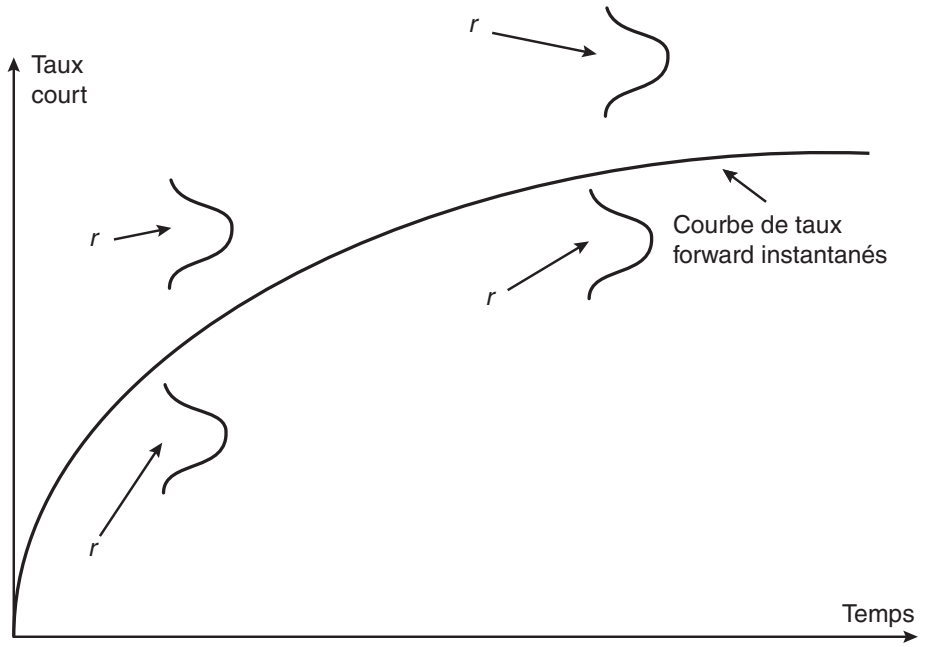
où a et σ sont des constantes. C'est en fait une extension du modèle de Ho et Lee, incorporant un retour à la moyenne au rythme a, ou encore un modèle de Vasicek, avec un niveau de retour à la moyenne variable en fonction du temps, puisqu'à la date t, le taux court est attiré vers $\frac{\theta(t)}{a}$ au rythme a. Lorsque a = 0, on retrouve le modèle de Ho et Lee.

Ce modèle est aussi aisément utilisable. La fonction $\theta(t)$ se déduit de la structure initiale sous la forme (voir note technique n° 31) :

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \mathrm{e}^{-2at}) \tag{32.5}$$

2. Voir J. C. Hull et A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3 (4), 1990, 573-592.

Le dernier terme de cette équation est en général petit ; si on le néglige, le drift du processus de taux court s'écrit $F_t(0,t) + a[F(0,t) - r]$, ce qui indique qu'en moyenne, le taux court suit la pente de la courbe initiale des taux forward instantanés. Ce modèle est illustré dans le graphique 32.2.



Graphique 32.2 : Le modèle de Hull et White

La note technique 31 montre que les prix des ZC dans ce modèle sont donnés par :

$$P(t,T) = A(t,T)\,\mathrm{e}^{-B(t,T)\,r(t)} \tag{32.6}$$

où A et B sont définis par :

$$B(t,T) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a} \tag{32.7}$$

et :

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)\,F(0,t) - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(\mathrm{e}^{-aT} - \mathrm{e}^{-at})^2(\mathrm{e}^{2at} - 1) \tag{32.8}$$

Les équations (32.6) à (32.8) définissent le prix d'un ZC à une date future t, en fonction du taux court à cette date et de la fonction d'actualisation initiale. Dans la suite de ce chapitre, nous verrons comment représenter ces modèles par un arbre trinomial. Cela est utile quand il s'agit d'évaluer des options américaines ou d'autres actifs dérivés qu'on ne peut évaluer analytiquement.

Le modèle de Black, Derman et Toy

En 1990, Black, Derman et Toy ont proposé un modèle binomial pour un processus de taux court log-normal [3]. La procédure utilisée est expliquée en détail dans la note tech-

3. Voir F. Black, E. Derman et W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and its Applications to Treasury Bond Prices", *Financial Analysts Journal*, janvier/février 1990, 33-39.

nique n° 23 sur le site www.pearson.fr. On peut montrer que le processus du logarithme du taux court s'écrit :

$$d\ln r = [\theta(t) - a(t)\ln(r)]\ dt + \sigma(t)\, dz$$

avec :

$$a(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

où $\sigma'(t)$ est la dérivée de σ par rapport à t. Par rapport aux modèles de Ho et Lee et de Hull et White, celui-là a l'avantage de ne pas autoriser les taux courts négatifs. Le mouvement brownien z fait que $\ln(r)$ peut être négatif, mais pas le taux r lui-même. La contrepartie est que ce modèle n'a pas de propriétés analytiques maniables. Le second inconvénient est que la façon dont l'arbre est construit impose une relation entre la volatilité et le paramètre de retour à la moyenne $a(t)$. Ce paramètre est positif si et seulement si la volatilité est une fonction décroissante du temps.

En pratique, la version la plus utile du modèle est celle pour laquelle σ est constant. On a alors $a = 0$, de sorte qu'il n'y a pas de retour à la moyenne et le modèle se réduit à :

$$d\ln(r) = \theta(t)\, dt + \sigma\, dz$$

Il s'agit en fait de la version log-normale du modèle de Ho et Lee.

Le modèle de Black et Karasinski

En 1991, Black et Karasinski [4] ont proposé une extension du modèle de Black, Derman et Toy, dans laquelle le taux de retour à la moyenne et la volatilité sont déterminés indépendamment. La version la plus générale de ce modèle s'écrit :

$$d\ln(r) = [\theta(t) - a(t)\ln(r)]\ dt + \sigma(t)\, dz$$

Cette formulation est la même que celle de Black, Derman et Toy, mais il n'y a pas de relation entre σ et a. En pratique, ces deux quantités sont souvent supposées constantes, de sorte que le processus s'écrit :

$$d\ln(r) = [\theta(t) - a\ln(r)]\ dt + \sigma\, dz \tag{32.9}$$

Comme dans les autres modèles présentés ici, $\theta(t)$ est déterminée de façon à parfaitement ajuster la structure par termes des taux initiale. Ce modèle n'est pas très maniable, mais nous verrons dans la suite de ce chapitre comment simultanément déterminer $\theta(t)$ et représenter le processus r sous forme d'un arbre binomial.

Le modèle de Hull et White à deux facteurs

L'approche de Hull et White [5] s'appuie sur un processus risque-neutre du type suivant :

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]\, dt + \sigma_1\, dz_1$$

4. Voir F. Black et P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, juillet/août 1991, 52-59.

5. Voir J. C. Hull et A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models", *Journal of Derivatives*, 2 (2), hiver 1994, 37-48.

où u est un processus débutant à 0 et caractérisé par :

$$du = -b\,u\,dt + \sigma_2\,dz_2$$

Comme dans les modèles à un facteur, $\theta(t)$ est choisi de façon à être cohérent avec la structure initiale. Le processus stochastique u est une composante du niveau de retour à la moyenne de $f(r)$. Les paramètres a, b, σ_1, σ_2 sont des constantes, et z_1, z_2 sont des mouvements browniens dont la corrélation instantanée est ρ.

Ce modèle autorise une gamme de structures de volatilités plus large que les modèles à un facteur. Il permet aussi des mouvements de la courbe des taux plus variés. Vous pouvez consulter la note technique n° 14 sur le site www.pearson.fr.

32.2 Les options sur obligations

Certains des modèles présentés dans la section précédente permettent d'obtenir une formule analytique d'évaluation des options sur obligations. Pour les modèles de Vasicek, Ho et Lee, et de Hull et White, le prix en date 0 d'un call d'échéance T et de prix d'exercice K, sur un ZC d'échéance s et de nominal L, s'écrit :

$$L \times P(0,s)\,N(h) - K \times P(0,T)\,N(h - \sigma_P) \tag{32.10}$$

avec :

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln\left(\frac{L \times P\,(0,s)}{K \times P\,(0,T)}\right) + \frac{\sigma_P}{2}$$

De même, le prix du put équivalent est donné par :

$$K \times P(0,T)\,N(-h + \sigma_P) - L \times P\,(0,s)\,N(-h)$$

La note technique n° 31 montre que dans les modèles de Vasicek et de Hull et White, on a :

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}\left[1 - \mathrm{e}^{-a(s-T)}\right]\sqrt{\frac{1 - \mathrm{e}^{-2aT}}{2a}}$$

et dans celui de Ho et Lee :

$$\sigma_P = \sigma(s - T)\sqrt{T}$$

L'équation (32.10) est équivalente à celles déduites du modèle de Black à la section 29.1. La volatilité du logarithme du prix de l'obligation en date T est σ_P, et la volatilité du prix forward de l'obligation dans le modèle de Black est $\sigma_P/\sqrt{T}$. Comme nous l'avons détaillé à la section 29.2, un cap ou un floor peuvent être analysés comme des portefeuilles d'options sur ZC. Ils peuvent donc être évalués à l'aide de ces équations. Il existe aussi des formules d'évaluation des options sur ZC dans le cadre du modèle de Cox-Ingersoll-Ross qui a été présenté à la section 31.2. Toutefois, elles font intervenir des intégrales de lois de chi-2 décentrées.

Les options sur obligations à coupons

Dans un modèle à un facteur, tous les prix réagissent dans le même sens à une variation du taux r. En conséquence, une option sur une obligation à coupons peut être analysée comme un portefeuille d'options sur ZC. Cette section montre que cette technique

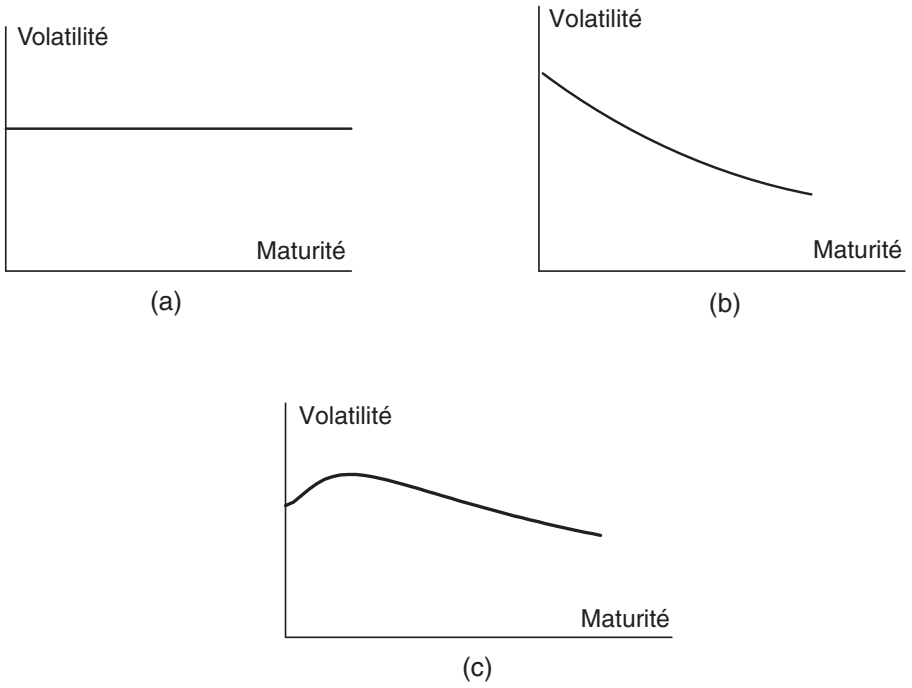
s'applique aussi bien dans le modèle de Ho et Lee que dans celui de Hull et White. On procède de la manière suivante.

1. On calcule la valeur du taux r, notée r^*, pour laquelle le prix de l'obligation à coupons est égal au prix d'exercice à l'échéance T de l'option.
2. On calcule les prix des options sur ZC, avec des prix d'exercice égaux aux prix des ZC à l'échéance de ces options, lorsque $r = r^*$.
3. Le prix de l'option sur l'obligation à coupons est alors défini comme la somme des prix des options sur ZC calculés à l'étape 2.

Cette approche permet d'évaluer les options sur obligations à coupon pour les modèles de Vasicek, CIR, Ho et Lee, ou encore Hull et White. Comme nous l'avons montré dans l'encadré 29.2, une swaption européenne peut être considérée comme une option sur une obligation à coupons. Ces instruments peuvent donc aussi être évalués avec les mêmes modèles (voir la note technique n° 15 sur le site www.pearson.fr).

32.3 Les structures de volatilité

Les modèles que nous avons examinés conduisent à diverses structures de volatilité. Le graphique 32.3 montre la volatilité d'un taux forward à 3 mois en fonction de la maturité pour le modèle de Ho et Lee et ceux de Hull et White à un et deux facteurs. La structure par termes est supposée plate.



Graphique 32.3 : Volatilité du taux forward à 3 mois en fonction de la maturité pour (a) le modèle de Ho et Lee, (b) le modèle de Hull et White à un facteur et (c) le modèle de Hull et White à deux facteurs (avec des paramètres choisis convenablement)

Pour le modèle de Ho et Lee, la volatilité est identique pour toutes les maturités ; pour celui de Hull et White à un facteur, la volatilité est décroissante par l'effet de retour à la

moyenne. Dans le cas du modèle à deux facteurs avec des paramètres convenablement choisis, la volatilité présente une « bosse ». Cette forme est cohérente avec les volatilités implicites déduites des cotations de caps données dans la section 29.2.

32.4 Les arbres de taux

Un arbre de taux d'intérêt consiste en une représentation en temps discret du processus stochastique du taux court, de la même façon qu'un arbre de cours d'action est une représentation en temps discret du processus suivi par le cours de l'action. Si le pas de temps est noté Δt, les taux apparaissant sur l'arbre sont les taux (composés en continu) pour un horizon Δt. Dans ce cas, il est d'usage d'identifier le taux court r du modèle en temps continu et le taux zéro-coupon R d'horizon Δt. La différence essentielle entre un arbre de taux et un arbre de cours d'action se situe au niveau de l'actualisation. Pour les cours d'action, on suppose que le taux d'actualisation est le même en chaque nœud de l'arbre, alors qu'il varie d'un nœud à l'autre dans un arbre de taux.

Il est en général plus pratique d'utiliser, pour les taux, un arbre trinomial plutôt qu'un arbre binomial. Cette description accorde un degré de liberté supplémentaire permettant de rendre compte de certaines caractéristiques des processus de taux, comme le phénomène de retour à la moyenne. Utiliser un arbre trinomial revient en fait, comme nous l'avions précisé à la section 21.8, à recourir à un schéma explicite aux différences finies.

Exemple d'utilisation d'un arbre de taux

Pour montrer comment les arbres trinomiaux peuvent servir à l'évaluation des actifs dérivés, considérons l'exemple présenté dans le graphique 32.4. C'est un arbre à deux périodes d'un an (Δt = un an). Les probabilités des états up et down sont égales à chaque nœud à 0,25, alors que l'état milieu (appelé aussi état mid) a une probabilité de 0,5. Le taux d'horizon Δt apparaît au-dessus de chaque nœud [6].

Considérons un actif dérivé qui engendre un payoff égal à :

$$\max[100(R - 0{,}11)\,;0]$$

où R est le taux à un an (correspondant ici à Δt). La valeur de l'actif dérivé apparaît sous chaque nœud. Aux nœuds terminaux, la valeur de l'actif dérivé est égale au payoff. Par exemple, au nœud E, la valeur est $\max[100(0{,}14 - 0{,}11)\,;0] = 3$. Aux dates précédentes, la valeur de l'actif dérivé est calculée par induction arrière, comme nous l'avons expliqué aux chapitres 13 et 21. Au nœud B, par exemple, le taux à un an est 12 %; ce taux est utilisé pour évaluer l'actif au nœud B, en actualisant les valeurs aux nœuds successeurs E, F et G, c'est-à-dire :

$$(0{,}25 \times 3 + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 0) \times \mathrm{e}^{-0{,}12 \times 1} = 1{,}11$$

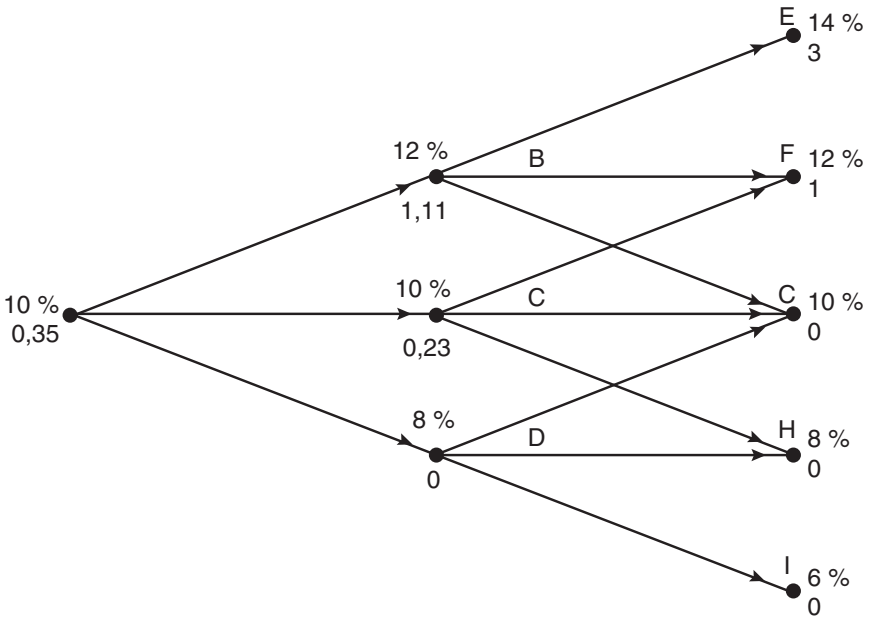
Au nœud C, le taux à un an est 10 %. En procédant comme ci-dessus, la valeur de l'actif au nœud C est égale à :

$$(0{,}25 \times 1 + 0{,}5 \times 0 + 0{,}25 \times 0) \times \mathrm{e}^{-0{,}1 \times 1} = 0{,}23$$

6. Nous expliquons plus loin comment sont déterminés les taux et les probabilités.

Enfin, au nœud initial A, on a une valeur :

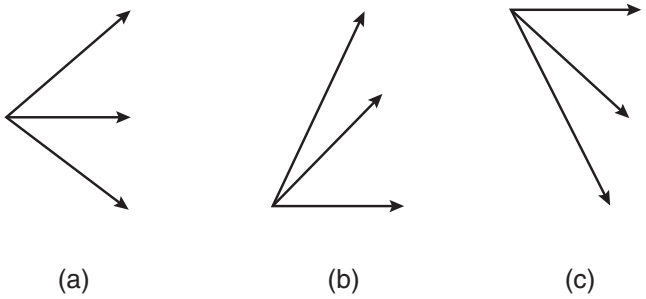
$$(0{,}25 \times 1{,}11 + 0{,}5 \times 0{,}23 + 0{,}25 \times 0) \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 0{,}35$$



Graphique 32.4 : Exemple d'utilisation d'un arbre trinomial : le taux apparaît au-dessus de chaque nœud, et la valeur de l'actif dérivé sous chaque nœud

Les arborescences non standard

Il est parfois commode de modifier la façon dont les successeurs d'un nœud sont définis au graphique 32.4. Trois possibilités sont présentées dans le graphique 32.5. Le cas usuel apparaît en 32.5a ; il comporte une branche up, une branche mid et une branche down. Une alternative, décrite en 32.5b, compte deux branches up et une branche mid, et une autre, illustrée en 32.5c, contient une branche mid et deux branches down. Ces branchements alternatifs permettent de rendre compte du retour à la moyenne. Le cas 32.5b est utilisé pour les niveaux de taux très faibles, et le cas 32.5c pour les taux très élevés. La section suivante permet de comprendre l'utilisation de ces différentes formes.



Graphique 32.5 : Alternatives pour les branchements de l'arbre trinomial

32.5 Une méthode générale de construction des arbres

Hull et White ont proposé une technique en deux étapes pour construire des arbres trinomiaux destinés à représenter une large gamme de processus de taux courts [7]. Dans cette section, nous montrons comment cette approche peut être adaptée au modèle de Hull et White de l'équation (32.4), et nous exposons ensuite les extensions à d'autres modèles, comme celui de Black et Karasinski.

Première étape

Le processus de taux court du modèle de Hull et White est caractérisé par :

$$dr = [\theta(t) - ar]\,dt + \sigma\,dz$$

Nous supposons pour le moment que le pas de temps est constant, égal à Δt [8].

Le taux ZC d'horizon Δt, noté R, est supposé suivre le même processus :

$$dR = [\theta(t) - aR]\,dt + \sigma\,dz$$

Cette hypothèse est raisonnable quand le pas de temps tend vers zéro. La première étape consiste à construire un arbre pour la variable R^* qui débute à 0 et suit le processus :

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma\,dz$$

Ce processus est symétrique par rapport à $R^* = 0$. La variable $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ suit une loi normale, et si les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt sont ignorés, l'espérance en date t de $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ est $-aR^*(t)\Delta t$, et la variance est égale à $\sigma^2\Delta t$.

Notons ΔR la différence, à une date donnée, entre deux taux voisins sur l'arbre. On retient :

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

qui se révèle un bon choix pour minimiser les erreurs d'approximation.

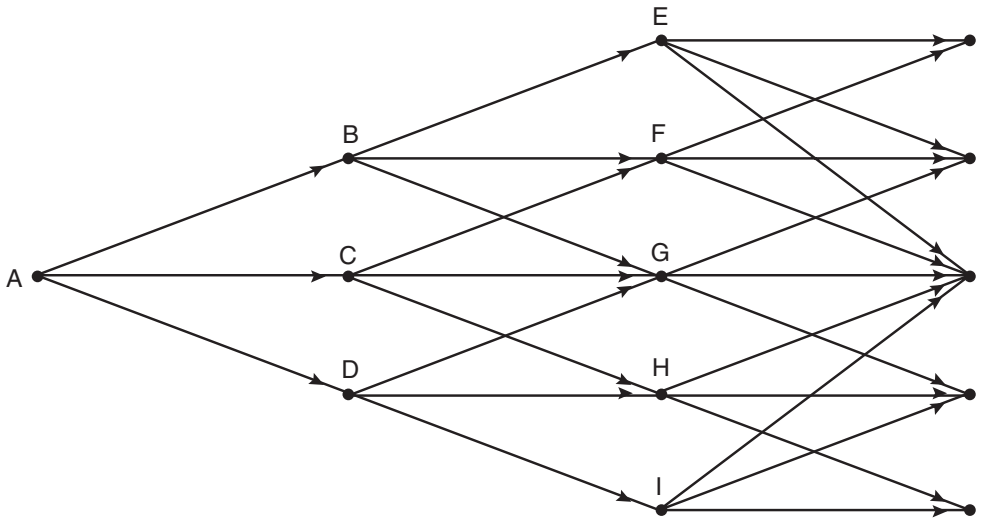
Notre objectif est de construire, pour R^*, un arbre semblable à celui qui est présenté dans le graphique 32.6. Pour cela, il est nécessaire de choisir, pour chaque nœud, le type de successeurs parmi les possibilités proposées dans le graphique 32.5. Ces choix vont déterminer l'allure générale de l'arbre. Il faut alors calculer les probabilités affectées à chacune des branches.

Notons (i,j) un nœud où $t = i\Delta t$ et $R^* = j\Delta R$ (i est un entier naturel et j un entier relatif). Le choix du type de branchement à un nœud donné doit laisser les probabilités

7. Voir J. C. Hull et A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single Factor Models", *Journal of Derivatives*, 2 (1), 1994, 7-16, et aussi J. C. Hull et A. White, "Using Hull-White Interest Rate Trees", *Journal of Derivatives*, 4, printemps 1996, 26-36.

8. Voir la note technique n° 16 sur le site www.pearson.fr pour une discussion sur les modèles à pas de temps non constant.

de transition positives sur les trois branches. Dans la plupart des cas, le choix 32.5a conviendra. Quand $a > 0$, il faut passer d'un branchement 32.5a à 32.5c lorsque j est suffisamment grand. De même, quand j est négatif et suffisamment grand en valeur absolue, il faut passer de 32.5a à 32.5b. Soit $j_{\max}$ ($j_{\min}$) la valeur de j au-delà (en deçà) de laquelle on passe de 32.5a à 32.5c (32.5b). Hull et White montrent que les probabilités restent toujours positives si $j_{\max}$ est le plus petit entier supérieur à $0{,}184/(a\Delta t)$ et si $j_{\min} = -j_{\max}$[9]. Notons p_u, p_m et p_d les probabilités des transitions up, mid et down à chaque nœud. Les probabilités sont choisies de façon à retrouver les espérance et variance de $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R (%)	0,000	1,732	0,000	–1,732	3,464	1,732	0,000	–1,732	–3,464
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 32.6 : Arbre de R^* pour le modèle de Hull et White (première étape)

Si le branchement est de type 32.5a, les probabilités à un nœud (i,j) doivent vérifier :

$$\begin{aligned} &p_u\Delta R - p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t \\ &p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 = \sigma^2\Delta t + a^2j^2\Delta R^2\Delta t^2 \\ &p_u + p_m + p_d = 1 \end{aligned}$$

Comme nous avons posé $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, la solution de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t}{2} \\ p_m &= \frac{2}{3} - a^2j^2\Delta t^2 \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{a^2j^2\Delta t^2 + aj\Delta t}{2} \end{aligned}$$

9. Les probabilités sont positives pour toute valeur de $j_{\max}$ comprise entre $0{,}184/aj\Delta t$ et $0{,}816/aj\Delta t$ et pour toute valeur de $j_{\min}$ comprise entre $-0{,}816aj\Delta t$ et $-0{,}184aj\Delta t$. Il est plus efficace d'un point de vue numérique de modifier le type de branchement dès que la valeur de j convient.

Pour un branchement de type 32.5b, on a :

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t}{2}$$
$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj\Delta t$$
$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj\Delta t}{2}$$

Enfin, pour un branchement de type 32.5c, les probabilités sont définies par :

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj\Delta t}{2}$$
$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj\Delta t$$
$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj\Delta t}{2}$$

Pour illustrer cette première étape, supposons que $\sigma = 0{,}01$, $a = 0{,}1$ et $\Delta t = 1$ an. On a alors $\Delta R = 0{,}01\sqrt{3} = 0{,}0173$, $j_{\max}$ est le plus petit entier supérieur à 0,184/0,1, c'est-à-dire 2, et $j_{\min} = -j_{\max}$. Le graphique 32.6 montre l'arbre obtenu, et les probabilités des branches partant de chaque nœud sont données sous l'arbre. Ces probabilités ne dépendent que de j. Par exemple, elles sont identiques aux nœuds B et F. De plus, l'arbre est symétrique ; les probabilités au nœud D sont symétriques à celles au nœud B.

Seconde étape

Il s'agit ici de convertir l'arbre de R^* en un arbre pour R. Pour atteindre cet objectif, nous allons déplacer les nœuds de R^*, de façon à respecter la structure initiale des taux d'intérêt.

Posons :

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

Lorsque le pas de temps tend vers 0, les coefficients α peuvent être évalués analytiquement à l'aide de l'équation (32.5) [10]. Dans les autres cas, on calcule les coefficients α de manière itérative pour respecter exactement la structure initiale.

Il suffit de définir les taux d'intérêt sur l'arbre de R, à la date $i\Delta t$, comme ceux de l'arbre de R^* auxquels on ajoute la valeur de α à la date $i\Delta t$. Les probabilités sont identiques sur les deux arbres. Posons $\alpha_i = \alpha(i\Delta t)$ et $Q_{i,j}$ la valeur actuelle d'un actif qui paie 1 € si le nœud (i,j) est atteint, et 0 sinon. Les valeurs des α_i et des $Q_{i,j}$ peuvent être calculées par induction avant, de telle sorte que la courbe initiale soit respectée.

10. Pour estimer $\alpha(t)$ analytiquement, il faut remarquer que :

$$dR = [\theta(t) - aR]\,dt + \sigma\,dz \quad \text{et} \quad dR^* = -aR^*dt + \sigma\,dz$$

Il vient alors : $d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)]\,dt$. En utilisant l'équation (32.5), la solution obtenue est alors :

$$\alpha(t) = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)^2$$

Illustration de la seconde étape

Supposons que la structure par termes initiale de l'exemple du graphique 32.6 soit celle du tableau 32.1. Par convention, on pose $Q_{0,0} = 1$; la valeur α_0 est choisie de manière que le prix du ZC d'échéance Δt soit le vrai prix. En d'autres termes, il suffit de poser α_0 égal au taux ZC d'horizon Δt. Comme ici $\Delta t = 1$, on a $\alpha_0 = 0{,}03824$ et cela définit la position initiale dans l'arbre de R, présenté dans le graphique 32.7. L'étape suivante consiste à calculer les valeurs $Q_{1,-1}$, $Q_{1,0}$ et $Q_{1,1}$. La probabilité d'atteindre le nœud (1,1) est 0,1667 et le taux d'actualisation pour cette première période est 3,82 %. Par conséquent, on a $Q_{1,1} = 0{,}1667 \times \mathrm{e}^{-0{,}0382} = 0{,}1604$. De même, $Q_{1,0} = 0{,}6417$ et $Q_{1,-1} = 0{,}1604$.

Tableau 32.1 : Taux ZC pour l'exemple des graphiques 32.6 et 32.7

Maturité	Taux (en %)
0,5	3,430
1,0	3,824
1,5	4,183
2,0	4,512
2,5	4,812
3,0	5,086

Nous pouvons maintenant déterminer α_1 de façon à retrouver le prix du zéro-coupon d'échéance $2\Delta t$. Comme $\Delta R = 0{,}01732$, le prix de ce ZC au nœud B est $\mathrm{e}^{-(\alpha_1 + 0{,}01732)}$, au nœud C il est égal à $\mathrm{e}^{-\alpha_1}$ et au nœud D à $\mathrm{e}^{-(\alpha_1 - 0{,}01732)}$. Au nœud initial A, ce prix vaut donc :

$$Q_{1,1}\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+0{,}01732)} + Q_{1,0}\,\mathrm{e}^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1-0{,}01732)} \tag{32.11}$$

Selon la structure par termes initiale, ce prix est $\mathrm{e}^{-0{,}04512\times 2} = 0{,}9137$. En remplaçant les $Q_{i,j}$ par leurs valeurs dans l'équation (32.11), on aboutit à :

$$0{,}1604\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+0{,}01732)} + 0{,}6417\,\mathrm{e}^{-\alpha_1} + 0{,}1604\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1-0{,}01732)} = 0{,}9137$$

et donc :

$$\alpha_1 = \ln\left[\frac{0{,}1604\,\mathrm{e}^{-0{,}01732} + 0{,}6417 + 0{,}1604\,\mathrm{e}^{0{,}01732}}{0{,}9137}\right] = 0{,}05205$$

Cela signifie que le taux d'intérêt au nœud central à la date Δt est 5,205 % (voir graphique 32.7).

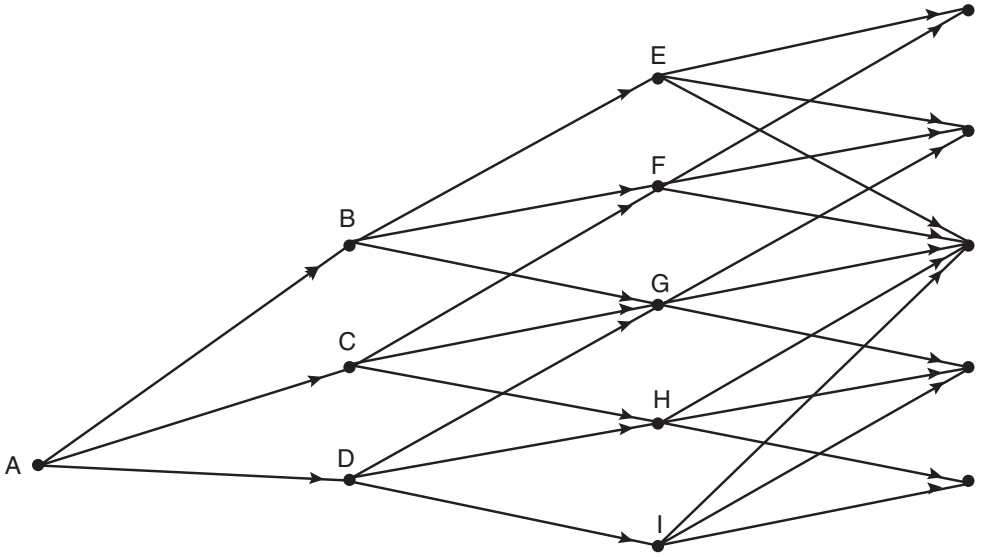
L'étape suivante consiste à déterminer $Q_{2,-2}$, $Q_{2,-1}$, $Q_{2,0}$, $Q_{2,1}$ et $Q_{2,2}$. On peut simplifier les calculs en utilisant les résultats précédents. Considérons par exemple $Q_{2,1}$; c'est la valeur d'un titre qui paie 1 € en date 2 si le nœud F est atteint, et rien sinon. Le nœud F peut être atteint à partir de B et C, et les taux à ces nœuds sont 6,937 % et 5,205 %. Les probabilités des branches B-F et C-F sont respectivement 0,6566 et 0,1667. La valeur au nœud B d'un titre qui paie 1 € au nœud F est donc $0{,}6566 \times \mathrm{e}^{-0{,}06937}$; de même au

nœud C la valeur de cet actif est $0{,}1667 \times \mathrm{e}^{-0{,}05205}$. $Q_{2,1}$ est donc égal à $0{,}6566 \times \mathrm{e}^{-0{,}06937}$ fois la valeur actuelle de 1 € reçu en B, plus $0{,}1667 \times \mathrm{e}^{-0{,}05205}$ fois la valeur actuelle de 1 € reçu en C. On peut donc écrire :

$$Q_{2,1} = 0{,}6566 \times \mathrm{e}^{-0{,}06937} \times 0{,}1604 + 0{,}1667 \times \mathrm{e}^{-0{,}05205} \times 0{,}6417 = 0{,}1998$$

Par des calculs analogues, on trouve $Q_{2,2} = 0{,}0182$; $Q_{2,0} = 0{,}4736$; $Q_{2,-1} = 0{,}2033$ et $Q_{2,-2} = 0{,}0189$.

L'étape suivante conduit à déterminer α_2 et les coefficients $Q_{3,j}$, et ainsi de suite.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
R (%)	3,824	6,937	5,205	3,473	9,716	7,984	6,252	4,520	2,788
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 32.7 : Arbre de R dans le modèle de Hull et White (seconde étape)

Formules générales pour les coefficients α et Q

La formulation générale est obtenue par induction avant. Supposons que les $Q_{i,j}$ aient été calculés pour $i \leq m$ $(m \geq 0)$. Il s'agit alors de déterminer α_m, de façon à retrouver le prix du zéro-coupon d'échéance $(m+1)\Delta t$. Le taux d'intérêt au nœud (m,j) est égal à $\alpha_m + j\Delta R$, et le prix du ZC d'échéance $(m+1)\Delta t$ s'écrit :

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\,\Delta R)\Delta t] \tag{32.12}$$

où n_m est le nombre de nœuds de chaque côté du nœud central à la date $m\Delta t$. La solution de cette équation est :

$$\alpha_m = \frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j}\, \mathrm{e}^{-j\Delta R\Delta t)} - \ln(P_{m+1)}}{\Delta t}$$

Quand α_m a été déterminé, les $Q_{m+1,j}$ peuvent être obtenus par l'expression :

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]$$

où $q(k,j)$ est la probabilité de passer du nœud (m,k) au nœud $(m+1,j)$, et la somme est considérée sur tous les indices k telle que $q(k,j)$ est non nulle.

Extension à d'autres modèles

La méthode présentée précédemment peut être étendue à des modèles plus généraux de la forme :

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)]\, dt + \sigma\, dz \tag{32.13}$$

où f est une fonction monotone de r. On peut montrer que cette famille de modèles permet d'ajuster n'importe quelle structure initiale [11].

Comme précédemment, nous supposons que R, taux pertinent sur les périodes de longueur Δt, suit le même processus que r :

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)]\, dt + \sigma\, dz$$

On pose tout d'abord $x = f(R)$ de façon que :

$$dx = [\theta(t) - ax]\, dt + \sigma\, dz$$

La première étape consiste à construire l'arbre de x^* qui suit le même processus que x, à ceci près que $\theta(t) = 0$ et que la valeur initiale est nulle. La procédure est identique à celle qui a été décrite précédemment pour construire l'arbre du graphique 32.6.

Comme dans le graphique 32.7, on déplace ensuite les nœuds de date $i\Delta t$ de α_i de façon à ajuster parfaitement la structure initiale. Les équations permettant de trouver α_i et les $Q_{i,j}$ diffèrent légèrement de celles obtenues dans le cas $f(R) = R$. Lorsque les $Q_{i,j}$ ont été déterminés pour $i \leq m (m \geq 0)$, on calcule α_m de manière à correctement évaluer le prix du ZC d'échéance $(m + 1)\Delta t$. Soit g la fonction réciproque de f telle que le taux d'horizon Δt au j-ème nœud à la date $m\Delta t$ soit :

$$g(\alpha_m + j\Delta x)$$

Le prix d'un ZC d'échéance $(m + 1)\Delta t$ s'écrit alors :

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t] \tag{32.14}$$

11. Tous les modèles sans arbitrage n'ont pas cette propriété. Par exemple, les extensions du modèle CIR, considérées par Cox, Ingersoll et Ross, ainsi que par Hull et White (1990), qui ont la forme suivante : $dr = [\theta(t) - ar]\, dt + \sigma\sqrt{r}\, dz$ ne peuvent ajuster une courbe de taux dans laquelle les taux forward sont fortement décroissants. En fait, ce processus ne peut être défini de manière cohérente quand $\theta(t)$ est négatif.

Cette équation est résolue par une méthode numérique du type Newton-Raphson. On a $\alpha_0 = f(R(0))$ et les autres coefficients sont obtenus par induction avant. Si α_m a été calculé, les $Q_{m+1,j}$ sont déduits de l'équation :

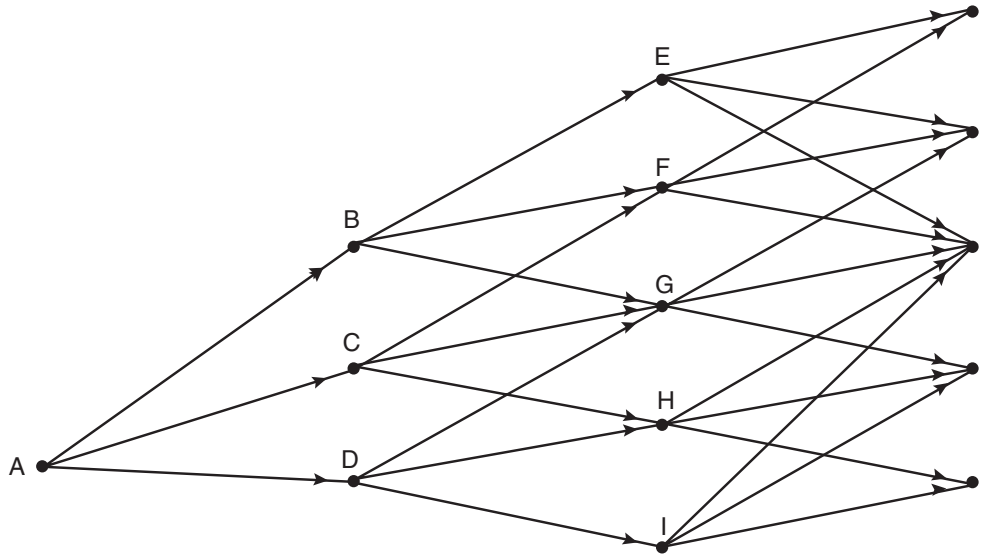
$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t]$$

où $q(k,j)$ est la probabilité de passer du nœud (m,k) au nœud $(m+1,j)$, et la somme est considérée sur tous les indices k telle que $q(k,j)$ est non nulle.

Le graphique 32.8 montre le résultat obtenu pour le processus de Black et Karasinski de l'équation (32.9), c'est-à-dire :

$$d\ln(r) = [\theta(t) - a\ln(r)]\,dt + \sigma\,dz$$

quand $a = 0{,}22$, $\alpha = 0{,}25$ et $\Delta t = 0{,}5$. La courbe initiale est toujours donnée par le tableau 32.1.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	–3,373	–2,875	–3,181	–3,487	–2,430	–2,736	–3,042	–3,349	–3,655
R	3,430 %	5,642 %	4,154 %	3,058 %	8,803 %	6,481 %	4,772 %	3,513 %	2,587 %
Pu	0,1667	0,1177	0,1667	0,2277	0,8609	0,1177	0,1667	0,2277	0,0809
Pm	0,6666	0,6546	0,6666	0,6546	0,0582	0,6546	0,6666	0,6546	0,0582
Pd	0,1667	0,2277	0,1667	0,1177	0,0809	0,2277	0,1667	0,1177	0,8609

Graphique 32.8 : Arbre du modèle log-normal

Les deux possibilités fondamentales sont $f(r) = r$ (modèle de Hull et White de l'équation (32.4)) et $f(r) = \ln(r)$ (modèle de Black et Karasinski de l'équation (32.9)). Dans la plupart des cas, ces deux modèles présentent des performances voisines dans l'ajustement des données de marché à partir d'instruments liquides tels que des caps ou des swaptions européennes. L'avantage du modèle $f(r) = r$ est bien sûr sa simplicité analytique ; la contrepartie est la possibilité d'avoir des taux négatifs. Le plus souvent, la probabilité d'occurrence de taux de ce type est très faible, mais certains analystes sont réticents à l'idée d'utiliser un modèle qui comporte une telle caractéristique. Le modèle $f(r) = \ln(r)$ est beaucoup moins maniable, mais les taux obtenus sont toujours positifs.

Le cas des taux négatifs

Le choix d'un modèle est difficile dans une économie où les taux sont très faibles, voire négatifs. Le modèle de Hull et White n'était pas théoriquement satisfaisant jusqu'à récemment, car la probabilité d'occurrence de taux négatifs n'est pas négligeable dans ce modèle. Le modèle de Black et Karasinski ne fonctionnait pas bien non plus, car la volatilité des taux n'est pas la même quand les taux sont faibles et quand ils sont élevés. Une technique qui semblait bien fonctionner sur le plan pratique consistait à considérer un modèle log-normal quand les taux sont faibles, et gaussien quand ils sont élevés [12].

Cette aversion pour les modèles à taux négatifs a évolué ces dernières années, puisque les taux négatifs sont devenus courants dans un certain nombre de pays. Les modèles de Ho et Lee ou de Hull et White sont construits dans le même esprit que le modèle gaussien de la section 29.2 [13]. Ces modèles peuvent être utilisés pour évaluer des contrats dans des environnements de taux négatifs. Une alternative consiste à utiliser un modèle de Black-Karasinski translaté, dans lequel on remplace r par $r+\alpha$, et c'est ce processus translaté qui suit le modèle de l'équation 32.9.

$$d\ln(r+\alpha) = [\theta(t) - a\ln(r+\alpha)]\,dt + \sigma\,dz$$

Le taux court peut alors atteindre le niveau $-\alpha$.

Actualisation aux taux OIS

Le plus souvent les paiements d'un actif dérivé de taux dépendent du taux LIBOR. Quand on utilisait les taux LIBOR pour actualiser les flux, une seule structure par termes des taux était nécessaire pour le processus d'évaluation. Maintenant que les pratiques de marché ont évolué, les analystes doivent considérer simultanément les courbes LIBOR et OIS. Une approche pour la modélisation peut être de modéliser les taux OIS et de supposer que les spreads aux dates futures seront égaux aux spreads forward observés aujourd'hui. Une seconde approche, plus générale, consiste à utiliser un arbre tridimensionnel dans lequel évoluent les taux LIBOR et OIS dans le cadre de la maturité de l'actif à évaluer [14].

L'utilisation conjointe des résultats analytiques et des arbres

Quand on construit l'arbre du modèle de Hull et White pour le cas $f(r) = r$, les résultats analytiques de la section 32.1 peuvent être utilisés pour calculer la structure par termes complète et les prix d'options européennes sur chaque nœud de l'arbre. Il faut toutefois garder à l'esprit que le taux d'intérêt, pour un horizon distant de Δt, est R et non le

12. Voir J. C. Hull et A. White, "Taking Rates to the Limits", *RISK*, décembre 1997, 168-169.

13. Il y a cependant une différence. Si la maturité du taux est notée τ, ce taux peut être supposé gaussien quand la composition est calée sur τ. Dans le modèle de Hull et White, le taux d'intérêt est gaussien, mais la composition des intérêts est continue.

14. Voir J. C. Hull et A. White, "Multi-Curve Modeling Using Trees", dans K. Glau, M. Scherer et R. Zagst (eds.), *Challenges in derivatives Markets*, Springer proceedings in Mathematics and Statistics, Heidelberg, 2016.

taux instantané r. Des équations (32.6) à (32.8), on peut déduire (voir problème 32.15) que :

$$P(t,T) = \hat{A}(t,T)\,\mathrm{e}^{-\hat{B}(t,T)\,R} \tag{32.15}$$

avec :

$$\begin{aligned}\ln \hat{A}(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - \frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)} \ln \frac{P(0,t+\Delta t)}{P(0,t)} \\ - \frac{\sigma^2}{4a}(1-\mathrm{e}^{-2at})\,B(t,T)[B(t,T) - B(t,t+\Delta t)]\end{aligned} \tag{32.16}$$

et :

$$\hat{B}(t,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}\Delta t \tag{32.17}$$

Dans le modèle de Ho et Lee on remplace $\hat{B}(t,T)$ par $T-t$ dans ces équations. On devrait alors calculer les prix d'obligations à partir de l'équation (32.15) plutôt qu'à partir de l'équation (32.6).

■ **Exemple 32.1** On utilise les taux ZC du tableau 32.2 pour illustrer l'utilisation des résultats analytiques. Pour les maturités intermédiaires, une interpolation linéaire est retenue. Nous cherchons à évaluer une option européenne de vente à 3 ans (1 095 jours) sur une obligation de maturité 9 ans (3 285 jours) et de nominal 100 €. Les taux sont supposés suivre le modèle de Hull et White dans la version $f(r) = r$. Le prix d'exercice est 63 €, a = 0,1 et σ = 0,01.

Tableau 32.2 : Taux zéro-coupon composés en continu

Maturité	Jours	Taux (en %)
3 jours	3	5,01772
1 mois	31	4,98284
2 mois	62	4,97234
3 mois	94	4,96157
6 mois	185	4,99058
1 an	367	5,09389
2 ans	731	5,79733
3 ans	1 096	6,30595
4 ans	1 461	6,73464
5 ans	1 826	6,94816
6 ans	2 194	7,08807
7 ans	2 558	7,27527
8 ans	2 922	7,30852
9 ans	3 287	7,39790
10 ans	3 653	7,49015

Nous avons construit un arbre à trois ans et calculé les prix de ZC aux nœuds terminaux par les formules données précédemment. La comparaison entre les deux

méthodes est donnée dans le tableau 32.3. On constate que pour un pas de temps suffisamment faible, les résultats sont pratiquement identiques (cet exemple est utilisé dans l'application G du logiciel DerivaGem).

Tableau 32.3 : Valeur d'une option à 3 ans sur un ZC à 9 ans avec $K = 63$, $a = 0{,}1$ et $\sigma = 0{,}01$. La courbe ZC est donnée par le tableau 32.2.

Nombre de pas	Valeur arbre	Valeur analytique
10	1,8468	1,8093
30	1,8172	1,8093
50	1,8057	1,8093
100	1,8128	1,8093
200	1,8090	1,8093
500	1,8091	1,8093

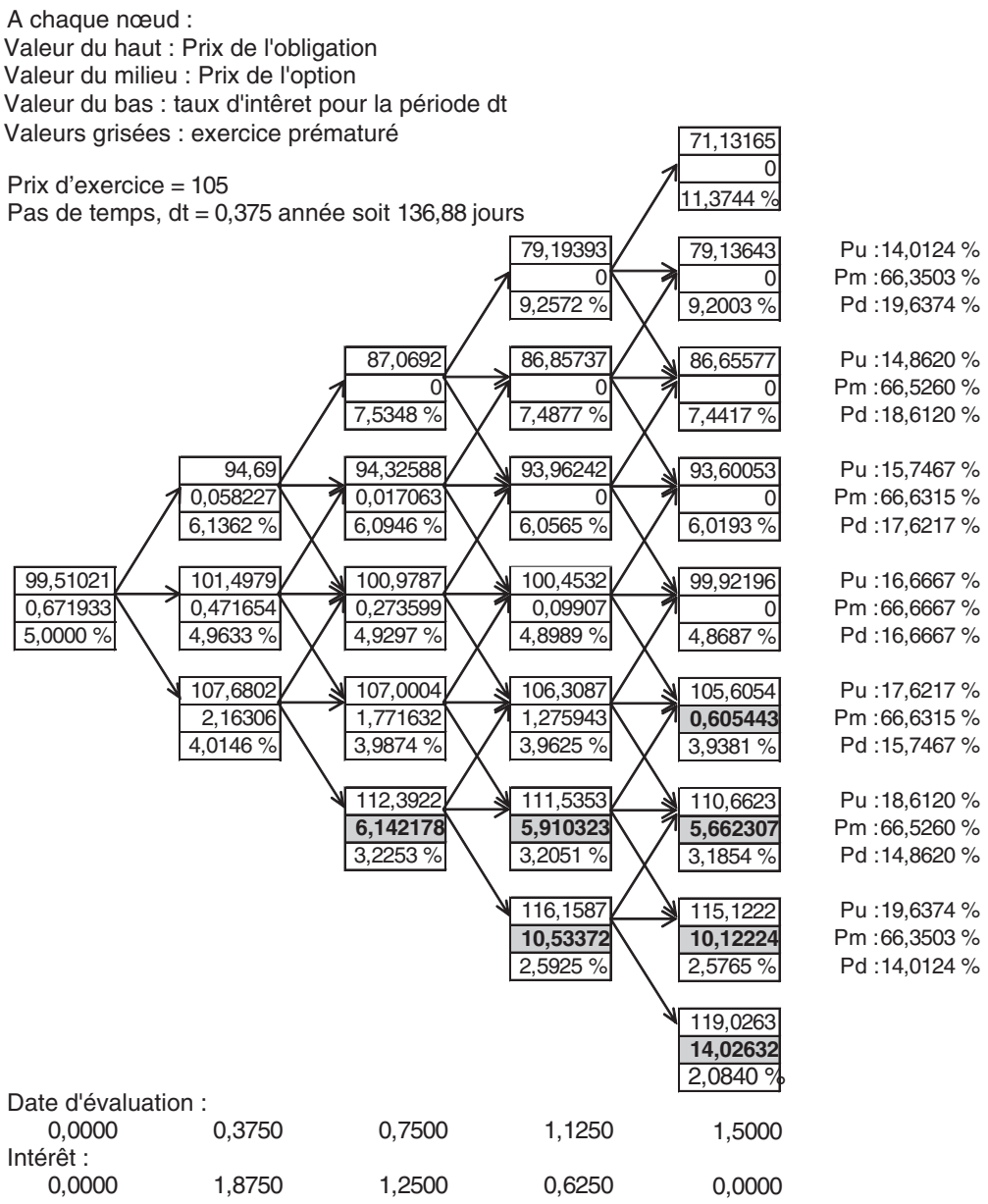
Cet exemple est un bon test de robustesse de la méthode car le gradient de la courbe ZC change brutalement, juste après la date d'échéance de l'option. Des erreurs minimes dans la construction de l'arbre sont susceptibles de provoquer des erreurs importantes sur la valeur des options (cet exemple correspond à l'application G de la partie « Application Builder » du logiciel DerivaGem).

Arbre pour l'évaluation des options américaines sur obligations

Le logiciel DerivaGem accompagnant cet ouvrage propose les modèles gaussien et log-normal ainsi que le modèle de Black pour l'évaluation des options européennes, des caps/floors et des swaptions européennes. De plus, les options américaines sur obligations peuvent aussi être traitées. Le graphique 32.9 montre l'arbre fourni par le logiciel pour une option d'achat américaine à 1,5 an sur une obligation à 10 ans avec 4 pas de temps et un modèle log-normal (Black et Karasinski). Les paramètres retenus sont a = 5 % et σ = 20 %. Le taux de coupon est 5 %, les coupons sont semestriels et le nominal de l'obligation est 100. La courbe initiale des taux ZC est supposée plate au niveau de 5 % et le prix d'exercice de l'option est 105.

Comme nous l'avons mentionné à la section 29.1, le prix d'exercice peut être exprimé coupon couru ou pied de coupon. Dans cet exemple, il s'agit d'un prix pied de coupon. Par contre, les prix d'obligation apparaissant sur l'arbre sont des prix coupon couru. Le montant de coupon couru apparaît sous l'arbre. Le prix d'exercice coupon couru se déduit donc en ajoutant au prix pied de coupon le montant de ce coupon couru. Le paiement de l'option est donc la différence entre le prix de l'obligation et le prix d'exercice, ces deux prix étant exprimés coupon couru.

L'arbre donne un prix de l'option de 0,672 avec 4 pas de temps. Avec 100 pas, le prix obtenu est 0,703. Notez que le prix d'une obligation à dix ans ne peut être évalué analytiquement dans le modèle log-normal. Il est calculé numériquement par induction arrière sur un arbre beaucoup plus important que celui qui est présenté ici.



Graphique 32.9 : Arbre d'évaluation d'une option américaine sur obligation (tel qu'il est construit par DerivaGem)

32.6 Le calibrage du modèle

Nous avons jusqu'à présent supposé que a et σ, constants ou non, étaient connus. Nous étudions maintenant leur détermination, qu'on appelle calibrage du modèle. Les paramètres de volatilité sont estimés à partir des données de marché sur des options liquides (voir les évaluations des brokers sur les caps et les swaptions aux tableaux 29.1 et 29.2).

La première étape consiste à chercher des paramètres qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i - V_i)^2$$

où U_i est le prix de marché de l'instrument i et V_i le prix calculé par le modèle. On suppose ici que n actifs liquides sont utilisés pour le calibrage.

Quand a et σ sont constants, il n'y a que deux paramètres à estimer. Lorsque, par exemple, on veut garder a constant et faire dépendre σ du temps, une façon pratique d'estimer cette fonction consiste à la modéliser comme une fonction en escalier. On choisit alors un ensemble de dates t_1, ...,t_n telles que $\sigma(t) = \sigma_i$ pour $t_i < t \leq t_{i+1}$, $\sigma(t) = \sigma_0$ quand $t \leq t_1$ et $\sigma(t) = \sigma_n$ quand $t > t_n$. Il y a alors $n + 2$ paramètres à estimer. Le nombre de paramètres doit toujours être inférieur au nombre d'instruments entrant dans la procédure de calibrage.

Pour la minimisation de l'erreur d'ajustement, on utilise la procédure de Levenberg-Marquardt [15]. Lorsque les deux paramètres sont des fonctions du temps, on ajoute une fonction de pénalité à l'erreur d'ajustement afin de s'assurer que les fonctions obtenues sont régulières. Dans l'exemple mentionné précédemment, dans lequel σ est une fonction en escalier, on choisira une fonction objectif de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i - V_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} w_{1,i}(\sigma_i - \sigma_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} w_{2,i}(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1} - 2\sigma_i)^2$$

Le deuxième terme pénalise les variations brutales du paramètre, alors que le troisième pénalise les changements de pente. Les coefficients w sont choisis en fonction du degré de régularité souhaité.

Les actifs qui servent au calibrage doivent être choisis aussi proches que possible des actifs qui seront évalués par le modèle. Supposons que vous souhaitiez évaluer une swaption bermudienne à 10 ans, qui peut être exercée à toute date de paiement entre les années 5 et 9, donnant ainsi le droit de conclure un swap dont l'échéance est dans 10 ans, à compter d'aujourd'hui. Les instruments de calibrage les plus appropriés sont des swaptions européennes 5×5, 6×4, 7×3, 8×2 et 9×1 (une swaption $n \times m$ est une option d'échéance n années donnant le droit de conclure un swap durant m années à compter de l'échéance de l'option).

Considérer que a et/ou σ dépendent du temps a pour avantage de permettre un meilleur ajustement des prix des actifs liquides échangés sur le marché. La contrepartie est que la structure de volatilité n'est plus stationnaire. La volatilité future est donc susceptible d'être très différente de la volatilité actuelle [16].

Une approche alternative consiste à considérer tous les instruments de calibrage possibles de façon à déterminer les meilleures valeurs (constantes) de a et σ. a est ensuite maintenu à la valeur ainsi trouvée. On procède ensuite comme dans le modèle de Black et Scholes. Chaque option permet de déduire une volatilité implicite σ. Le modèle peut donc être utilisé pour convertir des données comme celles des tableaux 29.1 et 29.2 en paramètres σ [17].

---

15. Pour une description détaillée de cette méthode, voir W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

16. Pour la mise en œuvre de cette démarche, voir la note technique n° 16 sur le site www.pearson.fr.

17. Les paramètres σ obtenus dans un modèle de la structure par termes des taux ne sont pas les volatilités implicites calculées dans le modèle de Black (tableaux 29.1 et 29.2). Les volatilités de Black sont en bijection avec les prix de marché. Ces prix sont ensuite utilisés dans le modèle de structure par termes pour estimer les σ par une procédure itérative.

32.7 La couverture dans un modèle à un facteur

À la section 29.5, nous avons présenté quelques éléments sur la couverture d'un portefeuille de dérivés de taux. Ils peuvent servir dans le cadre des modèles développés dans ce chapitre. Le calcul des coefficients delta, gamma et vega peut être réalisé en introduisant de légères modifications dans la courbe des taux ZC ou dans la structure de volatilité, et en recalculant la valeur du portefeuille après l'introduction de ces perturbations.

Il est important de remarquer que, même si nous supposons l'existence d'une seule source d'incertitude dans l'évaluation, nous ne supposons pas l'existence d'un seul facteur dans la couverture. Par exemple, des deltas peuvent être calculés en envisageant des perturbations non autorisées par le modèle ; c'est une pratique courante chez les traders [18]. De manière schématique, on peut dire que les modèles à un facteur, maniés avec précaution, donnent des résultats raisonnables en ce qui concerne l'évaluation, mais qu'une bonne stratégie de couverture nécessite la prise en compte de plusieurs facteurs.

Résumé

Les modèles traditionnels de la structure par termes des taux utilisés en finance sont des modèles d'équilibre. Ils sont utiles à la compréhension des relations liant diverses variables économiques, mais la structure par termes initiale intervient comme un output de ces modèles, plutôt que comme un input. Pour l'évaluation des actifs dérivés, il est important que le modèle retenu soit cohérent avec cette structure initiale observée sur les données de marché. Les modèles sans arbitrage sont conçus pour avoir cette propriété. Ils considèrent la structure initiale comme une donnée et définissent son évolution dans le temps.

Ce chapitre a décrit plusieurs modèles d'évolution du taux court à un facteur. Ils sont très robustes et peuvent être utilisés avec n'importe quelle structure initiale. Le plus simple est le modèle de Ho et Lee. Son avantage essentiel réside dans sa facilité d'utilisation. En contrepartie, tous les taux présentent la même variabilité à chaque date. Le modèle de Hull et White est une extension du modèle de Ho et Lee intégrant le phénomène de retour à la moyenne. Tout en restant très maniable, il autorise une plus large gamme de structures de volatilité. Les modèles log-normaux à un facteur évitent l'occurrence de taux négatifs, mais ne sont, en revanche, pas très simples à mettre en œuvre.

Références complémentaires

Black F., E. Derman. et W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Prices Bond", *Financial Analysts Journal*, janvier/février 1990, 33-39.

18. L'exemple le plus simple d'une pratique de cette nature est le calcul du vega dans un modèle de Black et Scholes qui suppose la volatilité constante et l'utilisation de ce coefficient pour couvrir des positions contre les variations de volatilité.

BLACK F. et P. KARASINSKI, "Bond and Option Pricing when Short Rates Are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, juillet/août 1991, 52-59.

BRIGO D. et F. MERCURIO,*Interest Rate Models : Theory and Practice*, 2nd ed., Springer, New York, 2006, juillet/août 1991, 52-59.

HO T. S. Y. et S. B. LEE, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, 1986, 1011-1029.

HULL J. et A. WHITE, "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices", *Advances in Futures and Options Research*, 6, 1993, 1-13.

HULL J. et A. WHITE, "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3 (4), 1990, 573-592.

HULL J. et A. WHITE, "Using Hull-White Interest Rate Trees", *Journal of Derivatives*, printemps 1996, 26-36.

REBONATO R., *Interest Rate Option Models*, Wiley, Chichester, 1996.

Problèmes et exercices

32.1 Quelle est la différence entre un modèle d'équilibre et un modèle sans arbitrage ?

32.2 L'approche exposée à la section 32.2, consistant à exprimer une option sur une obligation à coupons, comme un portefeuille d'options sur obligations ZC, peut-elle être utilisée dans un modèle à deux facteurs ? Justifiez votre réponse.

32.3 Supposons que $a = 0{,}1$, $b = 0{,}08$ et $\sigma = 0{,}015$ dans le modèle de Vasicek, avec un taux initial à 5 %. Calculez le prix d'un call européen à 1 an, de prix d'exercice 87 €, sur une obligation ZC de nominal 100 € et d'échéance 3 ans.

32.4 Refaites l'exercice 32.3 avec un put européen de mêmes caractéristiques. Quelle est la relation de parité Call-Put liant les prix des options européennes ? Montrez qu'elle est satisfaite dans ce cas.

32.5 Supposons que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}08$ et $\sigma = 0{,}015$ dans le modèle de Vasicek avec un taux initial à 6 %. Calculez le prix d'un call européen à 2,1 ans sur une obligation de maturité 3 ans. Le taux de coupon est 5 % et les coupons semestriels. Le nominal de l'obligation est 100 € alors que le prix d'exercice (coupon couru) de l'option est 99 €.

32.6 Utilisez la réponse au problème 32.5 et la relation de parité Call-Put pour calculer le prix du put de mêmes caractéristiques que le call du problème 31.9.

32.7 Dans le modèle de Hull et White, on suppose que $a = 0{,}08$ et $\sigma = 0{,}01$. Calculez le prix d'un call européen à 1 an, de prix d'exercice 68 €, sur un ZC de maturité 5 ans, de nominal 100 €, sachant que la structure initiale est plate à 10 %.

32.8 Dans le modèle de Hull et White, on suppose que $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}015$. Calculez le prix d'un call européen à 2,1 ans, de prix d'exercice coupon couru égal à 99 €, sur une obligation de maturité 3 ans, de nominal 100 €, de taux de coupon 5 %, le coupon étant payé semestriellement. La structure initiale est plate à 6 % avec une composition semestrielle des intérêts.

32.9 Supposons que $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}015$ avec une structure par termes plate à 10 %. Construisez un arbre trinomial à deux périodes d'un an pour le modèle de Hull et White.

32.10 Calculez le prix d'un ZC à deux ans à partir de l'arbre du graphique 32.4.

32.11 Calculez le prix d'un ZC à deux ans à partir de l'arbre du graphique 32.7 et vérifiez qu'il est cohérent avec la structure initiale.

32.12 Calculez le prix d'un ZC à 18 mois à partir de l'arbre du graphique 32.8 et vérifiez qu'il est cohérent avec la structure initiale.

32.13 Que suppose le calibrage d'un modèle de la structure des taux à un facteur ?

32.14 Utilisez DerivaGem pour évaluer des swaptions européennes 1×4, 2×3, 3×2 et 4×1 donnant le droit de recevoir le taux fixe et de payer le taux variable. Supposez que les taux ZC de 1 à 5 ans de maturité sont respectivement 6 %, 5,5 %, 6 %; 6,5 % et 7 %. Le swap engendre des paiements semestriels, et le taux fixe est 6 % en composition semestrielle. Utilisez le modèle de Hull et White avec $a = 0{,}03$ et $\sigma = 0{,}01$. Calculez, pour chaque option, la volatilité implicite du modèle de Black.

32.15 Démontrez les équations (32.15), (32.16) et (32.17).

Questions complémentaires

32.16 Construisez un arbre trinomial du modèle de Ho et Lee avec $\sigma = 0{,}02$. Supposez que les taux ZC initiaux pour les maturités 0,5, 1 et 1,5 an sont 7,5 %, 8 % et 8,5 %. Utilisez deux périodes de six mois. Calculez le prix d'un ZC de nominal 100 € de durée de vie résiduelle 6 mois à la fin de l'arbre. Utilisez l'arbre pour évaluer un put européen à un an, de prix d'exercice 95 € sur cette obligation. Comparez votre résultat avec celui donné analytiquement par DerivaGem.

32.17 Un trader cherche à calculer le prix d'un call américain à un an sur une obligation de nominal 100 € et de maturité 5 ans. Cette obligation a un taux de coupon de 6 %, avec un coupon semestriel. Le prix d'exercice pied de coupon de l'option est 100 €. Les taux ZC (composés en continu) pour les maturités 6 mois et 1 à 5 ans sont respectivement 4,5 %, 5 %, 5,5 %, 5,8 %, 6,1 % et 6,3 %. L'estimation du taux de retour à la moyenne est de 5 % dans le modèle gaussien comme dans le modèle log-normal. Une option d'achat de prix d'exercice (coupon couru) 100 € est très liquide sur le marché et cote 0,5 €. Le trader décide d'employer cette option pour calibrer le modèle. Utilisez DerivaGem avec 10 pas de temps pour répondre aux questions suivantes.

a. Dans l'hypothèse d'un modèle gaussien, quel est le paramètre σ implicite dans le prix de l'option ?

b. Utilisez σ pour calculer le prix de l'option si celle-ci est américaine.

c. Refaites (a) et (b) dans le cas log-normal. Montrez que le choix du modèle n'entraîne pas d'écarts importants tant que le modèle est calibré avec l'option européenne.

d. À partir de l'arbre du modèle gaussien, calculez la probabilité d'occurrence de taux négatifs.

e. À partir de l'arbre du modèle log-normal, vérifiez que le prix de l'option est correct au nœud $(9,-1)$ selon la notation de la section 31.7.

32.18 Utilisez DerivaGem pour évaluer des swaptions européennes 1×4, 2×3, 3×2 et 4×1 donnant le droit de recevoir le taux variable et de payer le taux fixe.

Supposez que les taux ZC de 1 à 5 ans de maturité sont respectivement 3 %, 3,5 %, 3,8 %, 4 % et 4,1 %. Le swap engendre des paiements semestriels et le taux fixe est 4 % en composition semestrielle. Utilisez le modèle log-normal avec $a = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}15$ et 50 pas de temps. Calculez, pour chaque option, la volatilité implicite du modèle de Black.

32.19 Vérifiez que vous obtenez bien le graphique 32.9 avec DerivaGem pour l'exemple considéré. Utilisez le logiciel pour évaluer une option américaine sur obligation dans les modèles gaussien et log-normal pour des prix d'exercice 95, 100 et 105. Pour le modèle normal, supposez que $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}01$. Commentez les résultats obtenus dans le contexte de distributions de probabilité à queues épaisses évoquées au chapitre 19.

32.20 Modifiez l'exemple G du DerivaGem Application Builder pour tester la convergence, sur l'arbre trinomial, du prix d'un call à 2 ans sur une obligation à 5 ans de nominal 100 €. Le prix d'exercice, pied de coupon, de l'option est 100, le taux de coupon 7 % avec des coupons semestriels. La courbe des taux ZC est celle du tableau 28.2. Comparez les résultats obtenus pour les cas suivants :

a. option européenne, modèle gaussien avec $\sigma = 0{,}01$ et $a = 0{,}05$;

b. option européenne, modèle log-normal avec $\sigma = 0{,}15$ et $a = 0{,}05$;

c. option américaine, modèle gaussien avec $\sigma = 0{,}01$ et $a = 0{,}05$;

d. option américaine, modèle log-normal avec $\sigma = 0{,}15$ et $a = 0{,}05$.

Chapitre 33

Les modèles HJM, LMM et les courbes de taux zéro-coupon

Les modèles de taux du chapitre 32 sont utilisés pour évaluer des instruments financiers qui sont trop complexes pour le cadre d'hypothèses des modèles du chapitre 29. Ils sont néanmoins faciles à mettre en œuvre et, s'ils sont exploités de manière adéquate, assurent que l'évaluation de la plupart des instruments non standard sera compatible avec celle des contrats activement échangés, comme les caps de taux, les swaptions et les options européennes sur obligation. Ces modèles présentent pourtant deux limites :

1. La plupart n'intègrent qu'un seul facteur de risque ;
2. Ils ne laissent qu'une marge de manœuvre limitée concernant la structure de volatilité.

En rendant dépendants du temps les paramètres a et σ, un analyste peut calibrer les modèles de sorte qu'ils s'ajustent aux volatilités observées sur les marchés, mais, dans ce cas, la structure par termes des volatilités n'est plus stationnaire, comme nous l'avons mentionné à la section 32.6. La structure future peut alors être très différente de celle observée aujourd'hui.

Ce chapitre traite d'approches générales de construction de la structure par termes des taux qui autorisent une grande souplesse, à la fois dans la spécification de la volatilité et dans le nombre de facteurs de risque pris en compte. Quand les taux OIS sont utilisés pour actualiser, il est nécessaire de disposer de deux courbes des taux (la courbe des taux LIBOR et celle des taux OIS). Ce chapitre montre comment on peut construire ces courbes.

Nous abordons aussi, à titre d'illustration, le marché américain des créances hypothécaires. Cela permet en particulier de montrer comment s'appliquent les idées et méthodes développées dans ce chapitre.

33.1 Le modèle de Heath, Jarrow et Morton

En 1992, David Heath, Bob Jarrow et Andy Morton (HJM dans la suite) ont publié un article important décrivant les conditions d'absence d'arbitrage que doit satisfaire un modèle de courbe des taux[1]. Pour la présentation de ce modèle, nous utiliserons les notations suivantes :

$P(t,T)$: prix de date t d'un ZC payant 1 € en date T ;

Ω_t : vecteur des valeurs passées et présentes (en date t) des prix d'obligations et des taux d'intérêt pertinents pour déterminer les volatilités des prix en date t ;

$v\,(t,T,\Omega_t)$: volatilité de $P(t,T)$;

$f(t,T_1,T_2)$: taux forward pour la période allant de T_1 à T_2, vu de la date t ;

$F(t,T)$: taux forward instantané, vu de la date t, d'un contrat de maturité T ;

$r(t)$: taux court instantané en date t ;

z : processus de Wiener qui régit les mouvements de la courbe des taux.

Prix des zéro-coupon et taux forward

Nous considérons pour débuter un modèle à un facteur dans lequel nous appliquons la procédure d'évaluation risque-neutre standard. Le processus de prix d'un zéro-coupon s'écrit, dans ce contexte :

$$dP\,(t,T) = r\,(t)\;P\,(t,T)\;dt + v\,(t,T,\Omega_t)\;P\,(t,T)\;dz(t) \tag{33.1}$$

Le taux de rentabilité espéré est $r(t)$ car un ZC est un titre négocié qui n'engendre pas de flux intermédiaires ; sa rentabilité est donc le taux sans risque dans l'univers risque-neutre. La volatilité v peut être une fonction quelconque (mais suffisamment régulière) des taux et prix présents et passés, comme le montre la présence de l'argument Ω_t dans la fonction v. La volatilité du prix est nulle à l'échéance, v doit donc vérifier $v\,(t,t,\Omega_t) = 0$ pour tout t[2]. L'équation (4.5) nous permet de relier taux forward et prix des ZC sous la forme :

$$f\,(t,T_1,T_2) = \frac{\ln\left(P\,(t,T_1)\right) - \ln\left(P\,(t,T_2)\right)}{T_2 - T_1} \tag{33.2}$$

L'équation (33.1) et l'application du lemme d'Itô conduisent à :

$$d\ln\left[P\,(t,T_1)\right] = \left(r\,(t) - \frac{v\,(t,T_1,\Omega_t)^2}{2}\right)\,dt + v\,(t,T_1,\Omega_t)\;dz(t)$$

et :

$$d\ln[P(t,T_2)] = \left[r(t) - \frac{v(t,T_2,\Omega_t)^2}{2}\right]\,dt + v(t,T_2,\Omega_t)\,dz(t)$$

1. D. Heath, R. Jarrow et A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology", *Econometrica*, 60 (1), 1992, 77-105.

2. La condition $v\,(t,t,\Omega_t) = 0$ est équivalente à l'hypothèse selon laquelle les processus de prix des ZC ont des drifts finis à toute date. Si la volatilité ne tend pas vers zéro à l'approche de l'échéance, un drift infini devient nécessaire pour vérifier la condition d'un prix terminal égal au nominal de l'obligation.

L'équation (33.2) amène au processus de taux forward suivant :

$$df\,(t,T_1,T_2) = \left(\frac{v\,(t,T_2,\Omega_t)^2 - v\,(t,T_1,\Omega_t)^2}{2\,(T_2-T_1)}\right) dt + \frac{v\,(t,T_1,\Omega_t) - v\,(t,T_2,\Omega_t)}{(T_2-T_1)}\,dz(t) \quad (33.3)$$

Cette équation met en évidence un processus risque-neutre de f qui dépend seulement des volatilités. Sa dépendance par rapport à r et aux prix P apparaît seulement indirectement du fait de la dépendance de v par rapport à ces variables.

Quand on pose $T_1 = T$ et $T_2 = T + \Delta T$ dans l'équation (33.3) et qu'on considère la limite quand ΔT tend vers 0, $f(t,T_1,T_2)$ tend vers $F(t,T)$, le coefficient de $dz(t)$ devient $v_T\,(t,T,\Omega_T)$, et le coefficient de dt s'écrit :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v\,(t,T,\Omega_t)^2}{\partial T} = v\,(t,T,\Omega_t)\;v_T\,(t,T,\Omega_t)$$

où l'indice T identifie une dérivée partielle par rapport à T. On peut alors écrire :

$$dF\,(t,T) = v\,(t,T,\Omega_t)\;v_T\,(t,T,\Omega_t)\;dt - v_T\,(t,T,\Omega_t)\;dz(t) \quad (33.4)$$

Les processus $F(t,T)$ (un processus par maturité T) sont connus dès que la fonction $v\,(t,T,\Omega_t)$ a été spécifiée.

L'équation (33.4) met par ailleurs en évidence l'existence d'un lien entre le drift et l'écart-type du taux forward instantané. C'est le résultat clé de HJM.

L'intégration de $v_t\,(t,T,\Omega_t)$ entre $\tau = t$ et $\tau = T$ donne :

$$v\,(t,T,\Omega_t) - v\,(t,t,\Omega_t) = \int_t^T v_\tau\,(t,\tau,\Omega_t)\;d\tau$$

Mais comme $v\,(t,t,\Omega_t) = 0$, on peut écrire :

$$v\,(t,T,\Omega_t) = \int_t^T v_\tau\,(t,\tau,\Omega_t)\;d\tau$$

Si on note $m\,(t,T,\Omega_t)$ et $s\,(t,T,\Omega_t)$ le drift et l'écart-type du processus de taux forward instantané $F(t,T)$, c'est-à-dire si :

$$dF(t,T) = m\,(t,T,\Omega_t)\;dt + s\,(t,T,\Omega_t)\;dz(t)$$

on obtient, par l'équation (33.4), la relation :

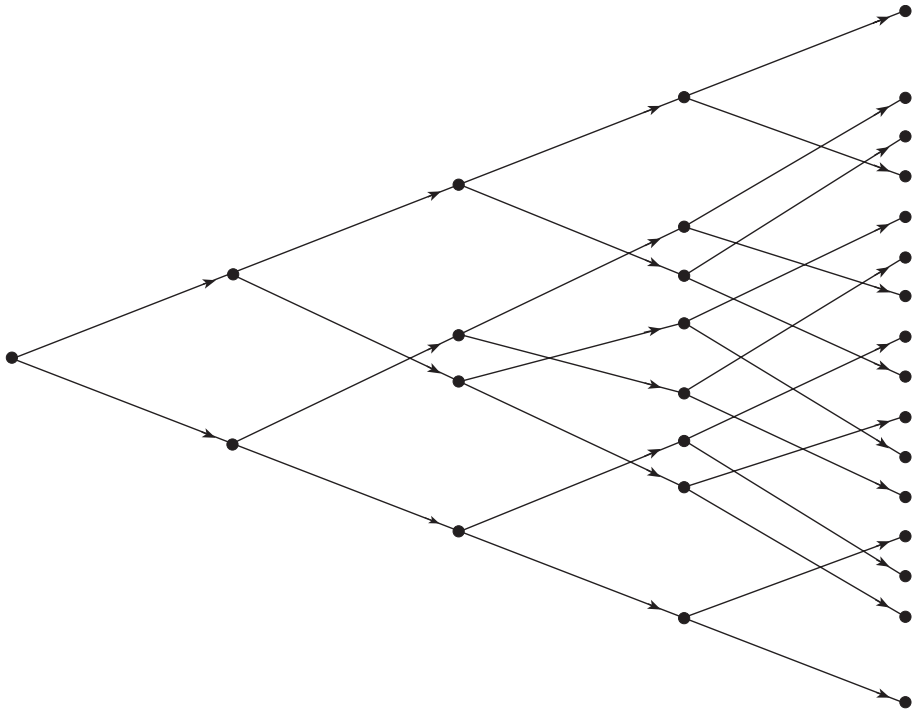
$$m\,(t,T,\Omega_t) = s\,(t,T,\Omega_t)\int_t^T s\,(t,T,\Omega_t)\,d\tau \quad (33.5)$$

C'est le résultat obtenu par HJM.

Le processus de taux court dans ce modèle est en général non markovien. Pour comprendre ce que cela signifie, supposons que nous souhaitions calculer la loi de r à une date future t. Nous trouverions que cette loi est susceptible de dépendre de la trajectoire suivie par z dans l'équation (33.1) entre 0 et t [3]. Cette remarque met en évidence

3. Pour plus de détails, voir la note technique n° 17 sur le site www.pearson.fr.

la principale difficulté de mise en œuvre du modèle HJM. Il faut utiliser une méthode de Monte-Carlo. En effet, si on construit des arbres représentant l'évolution de la structure par termes des taux, ils ne seront pas recombinants : une séquence *up-down* n'est pas équivalente à une séquence *down-up*. En considérant un modèle à un facteur et un arbre binomial comme celui du graphique 33.1, on a 2^n nœuds après n pas de temps[n]. Avec simplement $n = 30$, cela conduit à 10^9 nœuds[18].



Graphique 33.1 : Exemple d'arbre non recombinant obtenu dans le modèle général HJM

Le modèle de HJM de l'équation (33.4) peut paraître décevant du fait de sa complexité. Quand on considère un taux forward spécifique, son processus est markovien dans la plupart des applications et peut être représenté par un arbre recombinant. Cependant, le même arbre ne peut être utilisé pour tous les taux forward. On arrive au modèle de Ho et Lee si on pose $s\,(t,T,\Omega_t) = \sigma$ (problème 33.3) et au modèle de Hull et White si $s\,(t,T,\Omega_t) = \sigma \times \exp(-a\,(T-t))$ (problème 33.4). Ce sont des cas particuliers markoviens du modèle HJM, où le même arbre recombinant sert à représenter le taux court r et tous les taux forward.

L'extension à plusieurs facteurs

Le résultat de HJM peut être étendu au cas de plusieurs facteurs indépendants sous la forme :

$$dF(t,T) = m(t,T,\Omega_t)\,dt + \sum_k s_k(t,T,\Omega_t)\,dz_k$$

En suivant la démarche précédente (voir problème 33.2), on obtient la relation :

$$m\,(t,T,\Omega_t) = \sum_k s_k\,(t,T,\Omega_t) \int_t^T s_k\,(t,\tau,\Omega_t)\;d\tau \tag{33.6}$$

33.2 Le modèle de marché LIBOR

Le modèle de HJM présente, comme nous l'avons mis en évidence, deux inconvénients. Il est fondé sur les taux forward instantanés qui ne sont pas observables directement, et son calibrage est délicat. Ces remarques ont conduit Brace, Gatarek et Musiela (BGM) ainsi que Jamshidian et Miltersen, Sandmann et Sondermann à proposer une alternative, connue sous le nom de modèle de marché LIBOR (modèle LMM ou modèle BGM) [4]. Ce modèle est exprimé en termes de taux forward accessibles aux traders.

Le modèle

Soit $t_0 = 0$ et $t_1, \ldots, t_n$ les dates de réajustement des taux des caps négociés sur le marché aujourd'hui. Les caps les plus échangés ont des réajustements trimestriels, on peut choisir $t_1 = 0{,}25$; $t_2 = 0{,}5$, etc. Notons $\delta_k = t_{k+1} - t_k$, et :

$F_k(t)$: le taux forward entre les dates t_k et t_{k+1} vu de la date t, avec une composition des intérêts déterminée par δ_k sur une base Exact/Exact ;

$m(t)$: l'indice de la prochaine date de réajustement ; $m(t)$ est donc le plus petit entier tel que $t \leq t_{m(t)}$;

$\zeta_k(t)$: la volatilité de $F_k(t)$ à la date t ;

v_k(t) : la volatilité à la date t du prix du ZC d'échéance t_k, noté $P(t,t_k)$.

Nous supposons dans un premier temps qu'il n'existe qu'un facteur ; comme nous l'avons montré à la section 28.4, dans l'univers forward-neutre de numéraire $P(t,t_{k+1})$, $F_k(t)$ est une martingale caractérisée par :

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)\, F_k(t)\, dz \tag{33.7}$$

où z est un processus de Wiener.

Le processus de prix zéro-coupon $P(t,t_k)$ a alors la forme :

$$\frac{dP(t,t_k)}{P(t,t_k)} = \text{drift} + v_k(t)\, dz$$

où $v_k(t)$ est négatif car taux d'intérêt et prix d'obligations sont corrélés négativement.

Il est souvent plus pratique d'évaluer les actifs dérivés dans un univers forward-neutre par rapport au ZC dont l'échéance est la prochaine date de réajustement des taux. Nous emploierons l'expression *univers forward-neutre glissant* [5]. Dans cet univers, on actualise

4. Voir A. Brace, D. Gatarek et M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Mathematical Finance*, 7 (2), 1997, 127-155 ; F. Jamshidian, "LIBOR and Swap Market Models and Measures", *Finance and Stochastics*, 1, 1997, 293-330 ; K. Miltersen, K. Sandmann et D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with LogNormal Interest Rate", *Journal of Finance*, 52 (1), mars 1997, 409-430.

5. Dans la terminologie de la section 28.4, cela équivaut à prendre un « certificat de dépôt glissant » comme numéraire. Cela revient à débuter avec 1 €, à acheter le ZC de maturité t_1, à réinvestir à cette date le montant obtenu dans un ZC de maturité t_2, et ainsi de suite. *Stricto sensu*, les arbres de taux conçus au chapitre 31 sont construits dans un tel univers plutôt que dans l'univers risque-neutre classique.

entre les dates t_k et t_{k+1} en multipliant par $P(t_k,t_{k+1})$. On ne se préoccupe pas de l'évolution des taux entre ces deux dates.

L'univers forward-neutre glissant est, à la date t, forward-neutre par rapport au ZC d'échéance $t_{m(t)}$. L'équation (33.7) donne le processus suivi par $F_k(t)$ dans l'univers forward-neutre relatif au ZC d'échéance t_{k+1}. Les résultats de la section 28.8 nous permettent de déduire le processus suivi par ce même taux dans l'univers forward-neutre glissant :

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)[v_{m(t)}(t) - v_{k+1}(t)]\, F_k(t)\, dt + \zeta_k(t)\, F_k(t)\, dz \tag{33.8}$$

La relation entre taux forward et prix des ZC s'écrit :

$$\frac{P(t,t_i)}{P(t,t_{i+1})} = 1 + \delta_i F_i(t)$$

ou encore :

$$\ln P(t,t_i) - \ln P(t,t_{i+1}) = \ln[1 + \delta_i F_i(t)]$$

Le lemme d'Itô permet de calculer le processus suivi par les deux membres de cette équation. En égalisant les coefficients de dz obtenus [6], on aboutit à :

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i F_i(t)\, \zeta_i(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} \tag{33.9}$$

ce qui permet de réécrire le processus suivi par $F_k(t)$ sous la forme :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t)\, \zeta_i(t)\, \zeta_k(t)}{1 + \delta_i F_i(t)}\, dt + \zeta_k(t)\, dz \tag{33.10}$$

Le résultat de HJM de l'équation (33.4) est obtenu par passage à la limite quand δ_i tend vers zéro (voir problème 33.7).

La volatilité des taux forward

Nous simplifions maintenant le modèle en supposant que $\zeta_k\,(t)$ est uniquement fonction du nombre de périodes entières d'accumulation d'intérêts entre la prochaine date de réajustement et la date t_k. Notons Λ_i la valeur de $\zeta_k\,(t)$ quand le nombre de périodes en question est i. De ce fait, la fonction $\zeta_k(t) = \Lambda_{k-m(t)}$ est une fonction en escalier.

Les Λ_i peuvent (du moins en théorie) être estimés à partir des volatilités utilisées pour évaluer des caplets dans le modèle de Black (c'est-à-dire les volatilités spot du graphique 28.3) [7]. Supposons que σ_k soit la volatilité de Black pour le caplet correspondant à la période allant de t_k à t_{k+1} ; l'égalisation des variances entraîne :

$$\sigma_k^2 t_k = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_{k-i}^2 \delta_{i-1} \tag{33.11}$$

Cette équation peut servir à déterminer les Λ_i de manière itérative.

6. Comme les v et les ζ ont des signes opposés, la volatilité du prix de l'obligation augmente (en valeur absolue) quand la maturité augmente.

7. En pratique, cette estimation se fait par une méthode de moindres carrés exposée plus loin.

■ **Exemple 33.1** Supposons que les δ_i soient tous égaux et que les volatilités spot pour les trois premiers caplets soient respectivement 24 %, 22 % et 20 %. On a donc $\Lambda_0 = 24\ \%$; comme :

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 = 2 \times 0{,}22^2$$

on en déduit que $\Lambda_1 = 19{,}80\ \%$. De la même façon :

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 = 3 \times 0{,}20^2$$

d'où $\Lambda_2 = 15{,}23\ \%$.

■ **Exemple 33.2** Considérons les données du tableau 33.1 indiquant des volatilités de caplets ; on constate la bosse décrite à la section 29.2. Les Λ_k apparaissent dans la deuxième ligne ; on remarque que la bosse est plus prononcée sur les Λ_k que sur les σ_k.

Tableau 33.1 : Données de volatilité ; durée des sous-périodes : 1 an

	Année k									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
σ_k (en %)	15,50	18,25	17,91	17,74	17,27	16,79	16,30	16,01	15,76	15,54
Λ_{k-1} (en %)	15,50	20,64	17,21	17,22	15,25	14,15	12,98	13,81	13,60	13,40

La mise en œuvre du modèle

Le modèle de marché LIBOR peut être implémenté par simulation de Monte-Carlo. L'équation (33.10) s'écrit :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)}\, dt + \Lambda_{k-m(t)}\, dz \tag{33.12}$$

ou :

$$d \ln F_k(t) = \left[\sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} - \frac{(\Lambda_{k-m(t)})^2}{2} \right] dt + \Lambda_{k-m(t)}\, dz \tag{33.13}$$

Si on suppose, à titre d'approximation dans le calcul du drift présenté ci-dessus, que $F_i(t) = F_i(t_j)$ quand $t_j < t < t_{j+1}$, on obtient :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp\left[\left(\sum_{i=j+1}^{k} \frac{\delta_i F_i(t_j) \Lambda_{i-j-1} \Lambda_{k-j-1}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2} \right) \delta_j + \Lambda_{k-j-1} \epsilon \sqrt{\delta_j} \right] \tag{33.14}$$

où ε suit une loi normale centrée-réduite. Dans la simulation de Monte-Carlo, cette équation est utilisée pour calculer les taux forward en date t_1 à partir de ceux de date 0. On calcule ensuite les taux de date t_2 à partir de ceux de date t_1.

L'extension à plusieurs facteurs

Le modèle LMM peut incorporer plusieurs facteurs indépendants. Par exemple, s'il y a p facteurs et si $\zeta_{k,q}$ est la composante de la volatilité attribuable au q-ième facteur, l'équation (33.10) devient (voir problème 33.11) :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \sum_{q=1}^{p} \zeta_{i,q}(t)\zeta_{k,q}(t)}{1+\delta_i F_i(t)}\, dt + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{k,q}(t)\, dz_q \tag{33.15}$$

Soit $\lambda_{i,q}$ la q-ième composante de la volatilité quand il y a i périodes entières entre la prochaine date de réajustement et l'échéance du contrat forward. L'équation (33.14) s'écrit alors :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp\left[\left(\sum_{i=j+1}^{k} \frac{\delta_i F_i(t_j) \sum_{q=1}^{p} \lambda_{i-j-1,q}\lambda_{k-j-1,q}}{1+\delta_i F_i(t_j)} - \frac{\sum_{q=1}^{p} \lambda_{k-j-1,q}^2}{2}\right)\delta_j + \sum_{q=1}^{p} \lambda_{k-j-1,q}\epsilon_q\sqrt{\delta_j}\right] \tag{33.16}$$

où les ε_q suivent des lois normales centrées-réduites.

L'hypothèse selon laquelle le drift du processus de taux forward reste constant à l'intérieur de chaque sous-période d'accumulation des intérêts permet de passer directement d'une date de réajustement à la suivante, dans la simulation. C'est pratique, puisque l'univers forward-neutre autorise à actualiser d'une date à la date précédente. Supposons que nous souhaitions simuler une courbe de taux zéro-coupon avec N sous-périodes. À chaque simulation, on part avec les taux forward de la date zéro qui sont notés $F_0(0)$, $F_1(0)$, ..., $F_{N-1}(0)$ et calculés à partir de la courbe initiale. On utilise l'équation (33.16) pour déduire $F_1(t_1)$, $F_2(t_1)$, ..., $F_{N-1}(t_1)$. On l'applique à nouveau pour obtenir $F_2(t_2)$,$F_3(t_2)$,...,$F_{N-1}(t_2)$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $F_{N-1}(t_{N-1})$. Remarquez qu'au fur et à mesure de la progression, la courbe zéro-coupon est de plus en plus courte. Par exemple, avec des sous-périodes de trois mois et N = 40, on débute avec une courbe allant jusqu'à une échéance de dix ans. À la date t_{24} la simulation ne donne plus d'informations au-delà d'un horizon de 4 ans.

On peut tester la qualité de l'approximation du drift en évaluant des caplets à l'aide de l'équation (33.16) et en comparant avec ceux que donne le modèle de Black. La valeur de $F_k(t_k)$ est le taux réalisé pour la période séparant les dates t_k et t_{k+1}. Elle permet d'évaluer le paiement du caplet en t_{k+1}. Ce payoff est ensuite actualisé jusqu'à la date 0, sous-période par sous-période. La valeur du caplet est alors la moyenne des montants actualisés obtenus dans les différentes simulations. Cette démarche permet de montrer qu'il y a peu d'écart entre les prix obtenus par simulation et ceux provenant de l'application du modèle de Black. C'est vrai même si les sous-périodes durent un an et si les simulations sont nombreuses[8]. Cela suggère que l'hypothèse sur le drift n'est pas contraignante dans la plupart des situations.

8. Voir J. C. Hull et A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model", *Journal of Fixed Income*, 10 (2), septembre 2000, 46-62.

Les caps non standard

Le modèle LMM peut aussi être utilisé pour l'évaluation de caps non standard, comme les caps à cliquet (*ratchet caps*). Ces actifs définissent des règles particulières pour la fixation du taux plafond à chaque date de réajustement. Le taux plafond est défini comme le LIBOR de la date précédente, plus un spread. Dans le cas des *sticky caps*, le taux plafond à la $(j+1)$-ième date est défini comme le minimum du LIBOR de la date j et du taux plafond de la date j, plus un spread.

Les tableaux 33.2 et 33.3 donnent des exemples d'évaluation de caps à cliquet et de sticky caps en utilisant le modèle LMM à un, deux et trois facteurs. Le principal est fixé à 100 € et la structure des taux est plate à 5 % en composition continue (ou 5,127 % en composition annuelle), avec des volatilités de caplets définies dans le tableau 33.1. Le taux est réajusté chaque année et le spread est fixé à 25 points de base.

Tableau 33.2 : Évaluation des caplets à cliquet

Date de départ du caplet	Un facteur	Deux facteurs	Trois facteurs
1	0,196	0,194	0,195
2	0,207	0,207	0,209
3	0,201	0,205	0,210
4	0,194	0,198	0,205
5	0,187	0,193	0,201
6	0,180	0,189	0,193
7	0,172	0,180	0,188
8	0,167	0,174	0,182
9	0,160	0,168	0,175
10	0,153	0,162	0,169

Tableau 33.3 : Évaluation des sticky caplets

Date de départ du caplet	Un facteur	Deux facteurs	Trois facteurs
1	0,196	0,194	0,195
2	0,336	0,334	0,336
3	0,412	0,413	0,418
4	0,458	0,462	0,472
5	0,484	0,492	0,506
6	0,498	0,512	0,524
7	0,502	0,520	0,533
8	0,501	0,523	0,537
9	0,497	0,523	0,537
10	0,488	0,519	0,534

Les tableaux 33.4 et 33.5 montrent la décomposition de la volatilité dans les modèles à deux et trois facteurs. Les résultats sont fondés sur 100 000 simulations de Monte-Carlo, avec la méthode antithétique de réduction de variance décrite à la section 21.7. L'écart-type de chaque prix est de l'ordre de 0,001.

Tableau 33.4 : Composantes de la volatilité dans un modèle à trois facteurs

	Année k									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\lambda_{k-1,1}$ (en %)	13,65	19,28	16,72	16,98	14,85	13,95	12,61	12,90	11,97	10,97
$\lambda_{k-1,2}$ (en %)	−6,62	−7,02	−4,06	−2,06	0,00	1,69	3,06	4,70	5,81	6,66
$\lambda_{k-1,3}$ (en %)	3,19	2,25	0,00	−1,98	−3,47	−1,63	0,00	1,51	2,80	3,84
Vol. totale (en %)	15,50	20,64	17,21	17,22	15,25	14,15	12,98	13,81	13,60	13,40

Tableau 33.5 : Composantes de la volatilité dans un modèle à trois facteurs

	Année k									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\lambda_{k-1,1}$ (en %)	13,65	19,28	16,72	16,98	14,85	13,95	12,61	12,90	11,97	10,97
$\lambda_{k-1,2}$ (en %)	−6,62	−7,02	−4,06	−2,06	0,00	1,69	3,06	4,70	5,81	6,66
$\lambda_{k-1,3}$ (en %)	3,19	2,25	0,00	−1,98	−3,47	−1,63	0,00	1,51	2,80	3,84
Vol. totale (en %)	15,50	20,64	17,21	17,22	15,25	14,15	12,98	13,81	13,60	13,40

Le troisième type de cap non standard est le cap flexible ou *flexi cap*. Il se présente comme un cap classique, mais le nombre de caplets qui peuvent être exercés est limité. Considérons, par exemple, un flexi cap à paiements annuels portant sur un principal de 100 €; la structure par termes des taux est plate à 5 % et les volatilités des caps sont données dans les tableaux 33.1, 33.4 et 33.5. Supposons que tous les caplets dans la monnaie doivent être exercés jusqu'à un nombre maximal de cinq. Dans le cadre de modèles à un, deux et trois facteurs, les prix de cet instrument sont respectivement 3,43, 3,58 et 3,61.

Le prix d'un cap vanille dépend seulement de la volatilité totale, mais il est indépendant du nombre de facteurs. Cela s'explique par le fait que le prix d'un caplet vanille ne dépend que d'un seul taux forward. Les prix des caplets dans les instruments non standard que nous venons d'évoquer sont différents car ils dépendent de la distribution

jointe d'un vecteur de taux forward. Par conséquent, leurs prix reposent sur plusieurs facteurs.

L'évaluation des swaptions européennes

Comme l'ont montré Hull et White, on peut trouver une approximation analytique pour l'évaluation des swaptions européennes dans le modèle LMM[9]. Notons T_0 la maturité de l'option de swap, $T_1,\ldots,T_N$ les dates de paiement du swap et $\tau_i = T_{i+1} - T_i$; de l'équation (28.23), on déduit le taux de swap en t sous la forme :

$$s(t) = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})}$$

On sait aussi que :

$$\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1+\tau_j G_j(t)}$$

pour $1 \leq i \leq N$ où $G_j(t)$ est le taux forward en date t pour la période (T_j,T_{j+1}). Ces deux équations définissent une relation entre $s(t)$ et les $G_j(t)$. Lorsque le lemme d'Itô est appliqué (voir problème 33.12), la variance du taux de swap, $s(t)$, est donnée par :

$$V(t) = \sum_{q=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t)\, G_k(t) \gamma_k(t)}{1+\tau_k G_k(t)} \right]^2 \tag{33.17}$$

où :

$$\gamma_k(t) = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1+\tau_j G_j(t)]}{\prod_{j=0}^{N-1} [1+\tau_j G_j(t)] - 1} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1} [1+\tau_j G_j(t)]}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N} [1+\tau_j G_j(t)]}$$

et $\beta_{j,q}(t)$ est la q-ième composante de la volatilité de $G_j(t)$. Nous approximons $V(t)$ en posant $G_j(t) = G_j(0)$ pour tout j et tout t. La volatilité du swap substituée dans le modèle LMM s'écrit alors :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} V(t)\, dt}$$

ou encore :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t)\, G_k(0) \gamma_k(0)}{1+\tau_k G_k(0)} \right]^2 dt} \tag{33.18}$$

9. Voir J. C. Hull et A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model", *Journal of Fixed Income*, 10 (2), septembre 2000, 46-62. D'autres approximations analytiques ont été proposées par A. Brace, D. Gatarek et M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Mathematical Finance*, 7 (2), 1997, 127-55, et L. Andersen et J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model", *Applied Mathematical Finance*, 7 (1), mars 2000, 1-32.

Dans le cas où la longueur des périodes pour le swap sous-jacent à l'option est la même que celle du cap, $\beta_{k,q}(t)$ est la q-ième composante de la volatilité d'un taux de cap forward quand la durée jusqu'à maturité est $T_k - t$. Cela peut être déduit de données comme celles du tableau 33.5.

Les durées des intervalles entre deux paiements ne sont pas toujours les mêmes pour les swaps sous-jacents des swaptions et les caps/floors qui sont utilisés pour calculer les volatilités. Les résultats précédents peuvent cependant être étendus pour prendre ce problème en considération. Supposons que la durée entre deux paiements sur le swap contienne M durées de caplets. Notons $\tau_{j,m}$ la durée de la m-ième sous-période de la j-ème période, de façon que :

$$\tau_j = \sum_{m=1}^{M} \tau_{j,m}$$

Notons $G_{j,m}(t)$ le taux forward observé à la date t pour la période $\tau_{j,m}$. Nous pouvons écrire :

$$1 + \tau_j G_j(t) = \prod_{m=1}^{M} (1 + \tau_{j,m} G_{j,m}(t))$$

Il est ainsi possible de modifier l'analyse qui conduit à l'équation (33.18) de manière à ce que la volatilité de $s(t)$ soit exprimée à partir des volatilités des $G_{j,m}(t)$ plutôt qu'à partir des $G_j(t)$. La volatilité du swap à utiliser dans le modèle de marché standard d'évaluation des swaptions est alors (voir problème 33.13) :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^{p} \left[\sum_{k=n}^{N-1} \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_{k,m}\beta_{k,m,q}(t)\, G_{k,m}(0)\gamma_k(0)}{1 + \tau_{k,m} G_{k,m}(0)} \right]^2 dt} \tag{33.19}$$

où $\beta_{j,m,q}(t)$ est la q-ième composante de la volatilité de $G_{j,m}(t)$. C'est en fait la q-ième composante de la volatilité d'un taux de cap forward quand la durée de vie va de la date t jusqu'au début de la m-ième sous-période de la période (T_j,T_{j+1}) de capitalisation du swap.

Les expressions (33.18) et (33.19) de la volatilité du swap font intervenir les approximations $G_j(t) = G_j(0)$ et $G_{j,m}(t) = G_{j,m}(0)$. Hull et White ont comparé les prix de swaptions européennes obtenues en utilisant ces expressions avec ceux qui découlent d'une simulation de Monte-Carlo. Les résultats sont très proches. Dès que le modèle de marché LIBOR a été calibré, ces deux équations permettent d'obtenir très rapidement des prix de swaptions européennes. Les analystes peuvent alors déterminer si ces produits sont sur ou sous-évalués par rapport aux caps. Ils peuvent utiliser ces résultats pour calibrer le modèle à partir des prix de swaptions. Cette analyse peut être étendue au cas de l'actualisation par des taux OIS.

Le calibrage du modèle

Pour calibrer le modèle de marché LIBOR, il faut déterminer les Λ_i et la façon dont ces coefficients sont répartis dans les $\lambda_{i,q}$. La première étape consiste à faire une analyse en composantes principales (ACP) comme cela a déjà été fait à la section 22.9. L'ACP

s'écrit :

$$\Delta F_j = \sum_{q=1}^{M} \alpha_{j,q} x_q$$

où M est le nombre de facteurs, ΔF_j est la variation du taux forward pour un contrat forward dont l'échéance est à j périodes de capitalisation de la date actuelle, $\alpha_{j,q}$ est le poids du j-ème taux sur le q-ième facteur et x_q est le score factoriel du q-ième facteur. Notons s_q l'écart-type du q-ième score factoriel. Si le nombre de facteurs du modèle de marché LIBOR, noté p, est égal au nombre total de facteurs, M, on peut écrire :

$$\lambda_{j,q} = \alpha_{j,q} s_q$$

pour $1 \leq j, q \leq M$. Quand $p < M$, les $\lambda_{j,q}$ doivent être normalisés par :

$$\Lambda_j = \sqrt{\sum_{q=1}^{p} \lambda_{j,q}^2}$$

Cela revient à poser :

$$\lambda_{j,q} = \frac{\Lambda_j s_q \alpha_{j,q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^{p} s_q^2 \alpha_{j,q}^2}} \tag{33.20}$$

L'équation (33.11) donne une façon de déterminer les Λ_j de sorte qu'ils soient cohérents avec le prix des caplets. Dans la pratique, cette méthode est rarement utilisée car on observe des choses « curieuses » Parfois, il n'existe pas d'ensemble de coefficients Λ_j cohérents avec ces prix. En conséquence, bien que le modèle de marché LIBOR soit construit pour assurer la cohérence avec les prix de caplets, les analystes préfèrent parfois le calibrer à partir de swaptions européennes.

La méthode la plus couramment utilisée est similaire à celle décrite à la section 32.6. Notons U_i le prix de marché du i-ème instrument servant au calibrage et V_i le prix donné par le modèle. On choisit les Λ_j de façon à minimiser :

$$\sum_i (U_i - V_i)^2 + P$$

où P est une fonction de pénalité choisie de façon à assurer que les coefficients λ_j aient un comportement régulier. Comme à la section 32.6, P s'écrit :

$$P = \sum_i w_{1,i} (\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)^2 + \sum_i w_{2,i} (\Lambda_{i+1} + \Lambda_{i-1} - 2\Lambda_i)^2$$

Quand certains des instruments servant au calibrage sont des swaptions européennes, les formules (33.18) et (33.19) rendent la minimisation possible en utilisant la procédure de Levenberg-Marquardt. L'équation (33.20) sert alors à déterminer les $\lambda_{j,q}$ à partir des Λ_j.

Les asymétries de volatilité

Les brokers fournissent des volatilités sur des caps qui ne sont pas forcément à la monnaie. Sur certains marchés, on observe une volatilité (de Black) décroissante par rapport

au prix d'exercice. Ceci peut être abordé par un modèle à élasticité constante de la variance (voir une application de ce modèle à la section 27.1). Le modèle s'écrit ici :

$$dF_i(t) = \cdots + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{i,q}(t)\, F_i^{\alpha}(t)\, dz_q \tag{33.21}$$

où α $(0 < \alpha < 1)$ est une constante. Ce modèle peut être traité de la même manière que le modèle log-normal. Les caps et les floors peuvent être évalués en utilisant la fonction de répartition de la loi de χ^2 décentrée. Il existe alors des approximations analytiques analogues à celles qui ont été données ci-dessus pour évaluer les swaptions européennes [10].

Les swaptions bermudiennes

Une swaption bermudienne est une swaption qui peut être exercée à certaines dates de paiement du swap sous-jacent. Elles sont difficiles à évaluer dans le modèle LMM car la mise en œuvre de celui-ci est fondée sur des simulations de Monte-Carlo avec lesquelles il est délicat de prendre en compte l'exercice prématuré. Cependant, les techniques décrites à la section 27.8 peuvent être employées. Longstaff et Schwartz utilisent une approche de moindres carrés quand le nombre de facteurs est important. La valeur de non-exercice à une date de paiement donnée est modélisée comme une fonction polynomiale de la valeur des facteurs [11]. Andersen montre que la méthode de la frontière d'exercice prématuré optimal est utilisable dans ce cadre. Des résultats corrects sont obtenus quand on suppose que la décision d'exercice prématuré dépend uniquement de la valeur intrinsèque de l'option [12]. La plupart des traders utilisent en fait un des modèles à un facteur présentés au chapitre 32. Cependant, l'efficacité de ces modèles dans l'évaluation de ces options particulières est remise en cause [13].

33.3 Les courbes de taux multiples

Les modèles des chapitres 29 et 31, et ceux considérés jusqu'à présent dans ce chapitre, supposent qu'une seule courbe des taux est utilisée dans la procédure d'évaluation d'un actif dérivé de taux d'intérêt. C'était effectivement le cas avant la crise de 2007. Pour la plupart des actifs, la courbe LIBOR/swap servait à calculer les payoffs et à actualiser ceux-ci. Depuis la crise, il est courant d'actualiser avec des taux OIS comme taux sans

10. Pour plus de détails, voir L. Andersen et J. Andersen, "Volatility Skews and Extension of the LIBOR Market Model", *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (2000), 1-32 ; J. C. Hull et A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model", *Journal of Fixed Income*, 10 (2), septembre 2000, 46-62.

11. Voir F. A. Longstaff et E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation : A Simple Least Squares Approach", *Review of Financial Studies*, 14 (1), 2001, 113-147.

12. Voir L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model", *Journal of Computational Finance*, 3 (2), hiver 2000, 1-32.

13. Pour des avis divergents, voir "Factor Dependence of Bermudan Swaptions : Fact or Fiction" par L. Andersen et J. Andersen, et "Throwing Away a Billion Dollars : The Cost of Suboptimal Exercise Strategies in the Swaption Market" par F. A. Longstaff et E. S. Schwartz. Ces deux articles ont été publiés dans le *Journal of Financial Economics*, 62 (1), octobre 2001.

risque et d'introduire une composante de risque de crédit dans l'estimation des taux LIBOR. Comme le montre le graphique 33.2, le spread LIBOR-OIS dépend de la maturité. Le spread est plus grand pour une maturité de 12 mois que pour une maturité de 6 mois, ce spread étant lui-même plus grand que le spread correspondant pour une maturité de 3 mois. La courbe LIBOR est donc nécessaire pour calculer les flux, et la courbe OIS pour actualiser ces derniers.

Si nous construisons deux courbes et si nous supposons qu'il est possible d'emprunter et de prêter aux taux de chacune des courbes, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ne tient plus. En effet, les banques emprunteraient au taux OIS pour prêter au taux LIBOR et encaisseraient la différence. Une alternative consiste à modéliser les risques de liquidité et de crédit de sorte que le spread entre les taux OIS et LIBOR soit expliqué par ces risques. Malheureusement, cette approche complique considérablement les modèles et leur utilisation. De ce fait, les professionnels modélisent séparément les deux courbes, sans considérer explicitement les risques de défaut et de liquidité, et en ignorant les opportunités d'arbitrage théoriques induites par cette démarche.

On pourrait penser qu'il existe une seule courbe LIBOR. Si le processus du taux court était connu, nous pourrions (comme au chapitre 31) connaître l'intégralité de la courbe. Avant la crise de 2007, cette hypothèse était raisonnable. Comme nous l'avons mentionné à la section 9.3, depuis la crise les professionnels calculent des courbes différentes à partir d'instruments dépendant de taux LIBOR à 1, 3, 6 et 12 mois. Cela veut dire que 5 courbes différentes sont utilisées par les opérateurs pour les transactions d'actifs dérivés liés aux taux LIBOR.

Modéliser la courbe des taux OIS n'a rien de compliqué. Soit on utilise le modèle de taux court du chapitre 31, soit on se place dans le contexte des modèles HJM/LMM du début de ce chapitre (et dans ce cas, le modèle LMM devient le modèle OIS). À la section 9.3, nous avons expliqué que les taux forward LIBOR sont différents quand l'actualisation s'appuie sur les taux OIS. Ce point est important mais parfois négligé par les professionnels.

L'évaluation de produits plus complexes requiert généralement d'estimer simultanément les deux courbes de taux (LIBOR et OIS). Un certain nombre de travaux ont proposé des solutions pour cette estimation. Une possibilité consiste à estimer les deux courbes séparément, mais en supposant que les processus stochastiques suivis par les deux taux sont corrélés. L'inconvénient de cette démarche est que le taux OIS peut être supérieur au taux LIBOR. Une approche alternative consiste à s'appuyer soit sur le modèle de taux court du chapitre 31, soit sur la démarche du modèle HJM/LMM pour modéliser le taux OIS. La structure par termes du spread LIBOR/OIS peut être modélisée séparément comme un processus stochastique ne prenant que des valeurs positives. La solution la plus simple consiste à supposer que le spread est égal au spread forward. Le modèle de spread forward peut être spécifié avec un ou plusieurs facteurs, comme ceux des équations (33.10) et (33.15), de sorte que :[14]

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \cdots + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{k,p}(t)\, dz_q$$

14. Voir par exemple F. Mercurio et Z. Xie, "The Basis Goes Stochastic", *Risk*, 25 (12), décembre 2012, 78-83.

où $F_k(t)$ désigne dans cette équation le spread forward entre les dates t_k et t_{k+1}, vu de la date t, et ζ est la q-ième composante du processus de volatilité de ce spread forward. Tous les résultats de la section 33.2 permettant de calculer le processus suivi par les taux d'intérêt sous la mesure forward-neutre glissante s'appliquent alors au spread forward.

33.4 Les créances hypothécaires

Les modèles présentés dans ce chapitre peuvent être appliqués au marché américain des créances hypothécaires (*mortgage backed security market*). Les institutions financières peuvent décider de vendre une part de leurs prêts immobiliers à des investisseurs. Ces prêts sont regroupés dans un fonds et les investisseurs achètent des parts de ce fonds. Celles-ci sont appelées *mortgage backed securities* (MBS). Ces titres ont la même nature que certains ABS présentés au chapitre 8. Il existe un marché secondaire pour ces MBS. Par exemple, un investisseur qui possède X % d'un fonds reçoit la part correspondante des intérêts et des principaux des prêts regroupés dans le fonds.

Ces MBS sont généralement garanties par une agence gouvernementale comme la *Government National Mortgage Association* (GNMA, qu'on prononce Ginnie Mae) ou la *Federal National Mortgage Association* (FNMA, qu'on prononce Fannie Mae), de sorte que les investisseurs sont protégés contre le risque de défaut. Cependant, depuis la crise ayant débuté en 2007, ces agences ont connu de grandes difficultés et la notion de garantie est sans doute à relativiser.

Ces actifs financiers ressemblent à des titres de créance classiques à taux fixe. Il y a cependant une différence cruciale par rapport à un produit standard. Il s'agit de la possibilité de remboursement anticipé associée à un prêt immobilier. Le plus souvent, l'emprunt a une durée longue, 20 ans ou plus, et l'emprunteur peut rembourser par anticipation à n'importe quel moment. Cela signifie que chaque emprunteur dispose d'une option américaine de remboursement à la valeur faciale de l'emprunt.

La décision de remboursement par anticipation peut avoir plusieurs causes. La plus courante est une baisse des taux et le souhait, de la part de l'emprunteur, de se refinancer à moindre coût. En conséquence, pour évaluer les MBS, la question cruciale est la détermination de la fonction de remboursement anticipé, c'est-à-dire l'estimation, à partir des informations détenues à une date t (notamment la courbe des taux), du rythme des remboursements futurs. Bien sûr, une telle fonction n'est pas très fiable si on cherche à prévoir le comportement individuel des emprunteurs ; en revanche, elle est plus efficace si on s'intéresse à un pool d'emprunteurs. L'analyse des données historiques permet d'obtenir une meilleure estimation du rythme de remboursement potentiel. En effet, même si le niveau des taux n'est pas le seul déterminant pour un emprunteur donné, c'est le paramètre clé au niveau du pool. La conséquence est que les investisseurs exigeront un rendement espéré plus élevé sur les MBS que sur des titres classiques afin de compenser l'option de remboursement anticipé cédée à l'emprunteur.

La décomposition des MBS

Les MBS décrites jusqu'à présent mettent tous les investisseurs sur un pied d'égalité puisqu'ils obtiennent tous le même rendement et supportent le même risque de rem-

boursement anticipé (de telles MBS sont qualifiées de *pass-throughs*). Mais ce n'est pas le cas pour toutes les MBS ; il arrive que les investisseurs soient divisés en classes avec des règles de paiement différentes selon les classes. On parle alors de CMO (*collateralized mortgage obligation*). Supposons qu'il existe trois classes d'investisseurs, notées A, B et C, auxquels on affecte une part du fonds avec les règles de paiement suivantes. Les remboursements survenant en premier sont affectés à la classe A, que ceux-ci soient prévus ou anticipés, pour un montant de principal donné. Quand celui-ci est atteint, la classe B commence à être payée pour le montant prévu, mais toujours au rythme aléatoire des remboursements, puis la classe C est payée en dernier. Dans cette situation, les investisseurs de la classe A supportent le risque de remboursement anticipé le plus important, avec un horizon plus proche que ceux de la classe B et de la classe C. L'objet de ces décompositions est de créer, pour les investisseurs institutionnels, des titres plus attractifs que les MBS classiques. Bien sûr, la part de risque supportée par chaque classe dépend de la clé de répartition de la valeur faciale du fonds. Par exemple, si on affecte aux classes A, B et C les montants 400, 300 et 100, la classe C supporte un risque de remboursement anticipé très faible. La situation est très différente si la répartition est de la forme 100, 200, 500.

Les créateurs des MBS ont imaginé des structures de paiement bien plus exotiques que celle qui vient d'être présentée. L'encadré 33.1 en donne un exemple.

Encadré 33.1 La décomposition en intérêt et principal

Dans certains cas, les paiements distinguent le principal des intérêts. Tous les remboursements de principal sont affectés à une classe (appelée PO pour *principal only*) et tous les paiements d'intérêts à une autre (appelée IO pour *interest only*). Les deux sont des investissements risqués. En effet, quand le taux de remboursement anticipé est élevé, la valeur d'un PO augmente et celle d'un IO diminue. Quand ce taux faiblit, la relation inverse est vérifiée : dans le cas du PO, le détenteur reçoit un montant donné de principal mais à des dates aléatoires. Quand le taux de remboursement anticipé est élevé, la somme est récupérée plus rapidement, ce qui avantage le détenteur du PO. S'il est faible, le détenteur devra attendre plus longtemps. Pour le détenteur de l'IO, c'est le montant reçu qui est aléatoire. Plus le taux de remboursement anticipé est élevé, plus le montant reçu sera faible, puisque les emprunteurs ne versent plus d'intérêts après le remboursement (anticipé ou non) de l'emprunt.

L'évaluation des MBS

On utilise le plus souvent la simulation de Monte-Carlo pour évaluer les MBS. La dynamique des taux est simulée à l'aide du modèle HJM ou du modèle de marché LIBOR. Analysons le déroulement d'un tirage de la simulation. Chaque mois, les paiements anticipés sont calculés à l'aide de la courbe des taux actuelle et de l'historique des mouvements de celle-ci. Ces remboursements anticipés déterminent les cash-flows reçus par

le détenteur du titre et sont actualisés. Cela donne une valeur de la MBS. Une estimation de la valeur de celle-ci est ensuite obtenue en faisant la moyenne des résultats obtenus sur un grand nombre de tirages.

Le spread d'ajustement

Les traders, au-delà du calcul des prix théoriques des MBS, cherchent à mesurer le spread entre le taux des obligations d'état et le taux actuariel des MBS (on le note OAS pour *option adjusted spread*), calculé en supposant l'absence de remboursement anticipé.

Dans un modèle de la dynamique de la structure par termes des taux, la courbe actuelle est un input classique. Toutefois, pour estimer les OAS, on commence par l'évaluer avec la courbe des taux zéro-coupon et on compare le prix obtenu au prix de marché. De manière itérative, on cherche ensuite les déplacements parallèles de la courbe zéro-coupon qui permettent de faire coïncider le prix théorique et le prix de marché. L'OAS est l'amplitude du déplacement nécessaire pour obtenir cette coïncidence.

Résumé

Les modèles HJM et BGM donnent complète liberté à l'utilisateur en ce qui concerne le choix des structures de volatilité. Le modèle LMM présente deux avantages par rapport à celui de HJM. Le premier est qu'il est construit à partir des taux forward qui déterminent le prix des caps ; le second est qu'il est relativement facile à calibrer à partir de caps et de swaptions européennes. Les deux ont cependant un inconvénient commun : ils ne peuvent être représentés par des arbres recombinants. En pratique, cela signifie qu'une simulation de Monte-Carlo est nécessaire à leur utilisation et que, par conséquent, le temps de calcul nécessaire est supérieur à celui associé aux modèles du chapitre 32.

Depuis la crise du crédit de 2007, les taux OIS sont couramment utilisés comme taux sans risque pour l'évaluation des actifs dérivés associés à des garanties (*collateral*). Cela signifie que les méthodes d'évaluation des swaps de taux, des caps/floors et des swaptions doivent être ajustées de sorte que les taux OIS soient utilisés comme taux d'actualisation, et les processus de taux forward et autres taux de swap sont calculés sous la probabilité forward-neutre pertinente. Pour les instruments financiers plus complexes, il est nécessaire de modéliser l'évolution jointe des courbes de taux OIS et LIBOR.

Le marché américain des MBS a donné naissance à des actifs dérivés de taux très exotiques : CMO, IO, PO, etc. Les flux engendrés par ces titres dépendent du rythme de remboursement anticipé sur un pool de prêts, qui dépendent eux-mêmes de l'évolution des taux d'intérêt. Ces titres sont donc fortement *path-dependent*. La simulation de Monte-Carlo est de ce fait une méthode adaptée à leur évaluation et ce sont des supports très intéressants pour l'application du modèle HJM et du modèle de marché LIBOR.

Références complémentaires

Andersen L., "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model", *Journal of Computational Finance*, 3 (2), hiver 2000, 5-32.

Andersen L. et J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model", *Applied Mathematical Finance*, 7 (1), mars 2000, 1-32.

Andersen L. et V. Piterbarg, *Interest rate modeling*, Vol. I-III, Atlantic Financial Press, New York, 2010.

Brace A., D. Gatarek et M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Mathematical Finance*, 7 (2), 1997, 127-155.

Duffie D. et R. Kan, "A Yield Factor Model of Interest Rates", *Mathematical Finance*, 6 (4), 1996, 379-406.

Heath D., R. Jarrow et A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A Discrete-Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (4), 1990, 77-105.

Heath D., R. Jarrow et A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology", *Econometrica*, 60 (1), 1992, 77-105.

Hull J. et A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model", *Journal of Fixed Income*, 10 (2), 2000, 46-62.

Jamshidian F., "LIBOR and Swap Market Models and Measures", *Finance and Stochastics*, 1, 1997, 293-330.

Jarrow R. et S. M. Turnbull, "Delta, Gamma and Bucket Hedging of Interest Rates Derivatives", *Applied Mathematical Finance*, 1, 1994, 21-48.

Mercurio F. Z. Xie, "The Basis Goes Stochastic", *Risk*, 25 (12), 2012, 78-83.

Miltersen K., K. Sandmann et D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rate", *Journal of Finance*, 52 (1), mars 1997, 409-430.

Rebonato R., *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives : the LIBOR Market Model and Beyond*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.

Problèmes et exercices

33.1 Expliquez la différence entre un modèle markovien et un modèle non markovien du taux court.

33.2 Montrez la relation liant le drift et la volatilité du taux forward pour la version à plusieurs facteurs du modèle HJM de l'équation (33.6).

33.3 « Quand la volatilité du taux forward $s(t,T)$ est constante dans le modèle HJM, on obtient le modèle de Ho et Lee. » Vérifiez que cette affirmation est correcte en montrant que le modèle HJM conduit à un processus de prix des obligations cohérent avec celui obtenu avec le modèle de Ho et Lee du chapitre 32.

33.4 « Quand la volatilité du taux forward $s(t,T)$ est égale à $\sigma\,\mathrm{e}^{-a(T-t)}$ dans le modèle HJM, on obtient le modèle de Hull et White. » Vérifiez que cette affirmation est correcte en montrant que le modèle HJM conduit à un processus de prix des obligations cohérent avec celui obtenu avec le modèle de Hull et White du chapitre 32.

33.5 Quel est l'avantage du modèle de marché LIBOR par rapport au modèle HJM ?

33.6 Donnez une explication intuitive à la croissance du prix d'un cap à cliquet en fonction du nombre de facteurs.

33.7 Montrez que l'équation (33.10) devient l'équation (33.4) quand δ_i tend vers zéro.

33.8 Expliquez pourquoi un sticky cap vaut plus qu'un cap à cliquet.

33.9 Expliquez pourquoi les IO et les PO ont une sensibilité opposée aux variations du taux de remboursement anticipé.

33.10 « Un OAS est similaire au taux actuariel d'une obligation. » Que pensez-vous de cette affirmation ?

33.11 Démontrez l'équation (33.15).

33.12 Démontrez la formule de $V(t)$ donnée dans l'équation (33.17).

33.13 Démontrez l'équation (33.19).

Questions complémentaires

33.14 Dans un cap à paiements annuels, les volatilités (de Black) des caplets de maturités 1, 2, 3 et 5 ans sont respectivement 18 %, 20 %, 22 % et 20 %. Estimez la volatilité d'un taux forward à 1 an dans le modèle LMM quand la période va (a) de 0 à 1 an, (b) de 1 à 2 ans, (c) de 2 à 3 ans, (d) de 3 à 5 ans. Supposez que la courbe ZC soit plate à 5 % par an en composition annuelle et utilisez DerivaGem pour estimer les volatilités plates pour des caps à 2, 3, 4, 5 et 6 ans.

33.15 Dans le cap flexible de la section 33.2, le détenteur est obligé d'exercer les N premiers caplets dans la monnaie. Il ne peut ensuite plus exercer (dans l'exemple $N = 5$). Deux autres possibilités de définition sont parfois rencontrées :

a. le détenteur peut choisir si un quelconque caplet doit être exercé, mais le nombre total n'excède pas N ;

b. dès que le détenteur a décidé d'exercer un caplet, il doit exercer les suivants dans la monnaie jusqu'à un maximum de N.

Parmi les trois possibilités décrites ci-dessus, quelle est, à votre avis, celle qui a la plus grande valeur ? Et quelle est celle qui a la moins grande valeur ?

Chapitre 34

Retour sur les swaps

Les swaps ont largement contribué au succès des marchés de gré à gré. Ce sont des instruments très souples pour la gestion des risques. Fondés sur des supports variés, ils constituent une des innovations financières majeures des dernières décennies.

Au chapitre 7, nous avons traité l'évaluation des swaps de taux vanille. L'approche classique consiste en une cristallisation des taux, c'est-à-dire en l'identification des taux forward observés aujourd'hui et des taux spot futurs. Cette évaluation compte deux étapes :

1. Calculer les cash-flows nets du swap en supposant que les taux LIBOR dans le futur sont les taux LIBOR forward aujourd'hui ;
2. Définir la valeur du swap comme la valeur actuelle des flux futurs.

Dans ce chapitre, nous abordons la description et l'évaluation d'un certain nombre de swaps non standard. Certains peuvent être évalués selon l'approche classique, d'autres requièrent des ajustements de convexité ou quanto, ou encore la prise en compte de décalages temporels, tels que nous les avons décrits au chapitre 30. D'autres enfin contiennent des options qui modifient leur valeur et doivent être évalués avec les méthodes des chapitres 29, 32 et 33.

34.1 Variations sur le swap vanille

De nombreux swaps présentent des modifications mineures par rapport au swap vanille du chapitre 7. Le principal peut évoluer dans le temps selon un mode déterministe. Les swaps dont le principal est une fonction croissante du temps sont qualifiés de *step-up* ; nous dirons swap croissant. Quand le principal est décroissant, on parle d'*amortizing swap*, nous dirons simplement swap décroissant. Par exemple, les swaps croissants sont utiles pour une entreprise de construction, amenée à emprunter des montants croissants à taux variable dans le cadre de la réalisation d'un projet, et qui souhaite échanger ces emprunts contre des emprunts à taux fixe. Un swap décroissant intéressera une entreprise qui a des emprunts à taux fixe avec un certain rythme d'amortissement et qui souhaite transformer cette dette en une dette à taux variable.

Il peut arriver que le principal et/ou le rythme des paiements diffèrent pour les deux parties prenantes. Ce cas est illustré dans l'encadré 34.1, qui montre un swap hypothétique entre Microsoft et Goldman Sachs, dans lequel le principal est de 120 millions pour la jambe variable et de 100 millions sur la jambe fixe. Par ailleurs, les paiements sont semestriels d'un côté et mensuels de l'autre. Ces variations sont toutefois mineures et n'affectent pas la méthodologie d'évaluation. On peut encore, ici, faire l'hypothèse de taux spot futurs égaux aux taux forward observés aujourd'hui.

Le taux variable de référence n'est pas toujours un taux LIBOR. Dans certains swaps, c'est le taux du *commercial paper* qui sert de référence. Un *basis swap* (swap de base) est un swap consistant à échanger des flux calculés avec deux taux variables différents. Par exemple, cela peut consister, sur un principal de 100 millions, à échanger le taux du *commercial paper* ou le taux OIS à 3 mois plus 10 points de base contre le LIBOR 3 mois. Ce type de swap est utile lorsqu'une institution financière a des actifs et des passifs dépendant de plusieurs taux variables. L'évaluation des swaps pour lesquels le LIBOR n'est pas le taux de référence se fait en général par cristallisation des taux. Le taux forward est alors calculé de telle sorte que les swaps construits avec le taux de référence aient une valeur nulle. Cette approche est analogue à celle employée pour déterminer les taux forward LIBOR quand les taux OIS sont utilisés pour l'actualisation.

Encadré 34.1 Extrait d'une confirmation pour un swap hypothétique non standard

Date de transaction	4 janvier 2016
Date de départ	11 janvier 2016
Convention jours ouvrés	Suivant
Calendrier jours ouvrés	US
Date de fin	11 janvier 2021
Paiements fixes	
Payeur du taux fixe	Microsoft
Principal du fixe	100 millions de dollars US
Taux fixe	6 %
Décompte des jours	Exact/365
Dates de paiement	11 juillet et 11 janvier de chaque année, commençant le 11 juillet 2016 jusqu'au 11 janvier 2021 inclus
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Goldman Sachs
Principal du variable	120 millions de dollars US
Taux variable	LIBOR 1 mois sur dollars US
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	11 juillet 2016, puis le 11 de chaque mois jusqu'au 11 janvier 2021 inclus

34.2 Les swaps composés

L'encadré 34.2 donne un exemple de swap composé. Il y a une seule date de paiement sur chaque jambe, à la fin de la durée de vie du swap. Dans cet exemple, le LIBOR + 20 est la référence variable pour le calcul des flux, mais ceux-ci, habituellement payés à des dates régulières, sont ici capitalisés jusqu'à la fin du swap au taux LIBOR + 10. Pour la jambe fixe, le taux déterminant les cash-flows est 6 %, mais ils sont capitalisés à 6,3 %.

Encadré 34.2 Extrait d'une confirmation pour un swap composé entre Microsoft et Goldman Sachs

Date de transaction	4 janvier 2016
Date de départ	11 janvier 2016
Convention jours ouvrés	Suivant
Calendrier jours ouvrés	US
Date de fin	11 janvier 2021
Paiements fixes	
Payeur du taux fixe	Microsoft
Principal du fixe	100 millions de dollars US
Taux fixe	6 %
Décompte des jours	Exact/365
Dates de paiement	11 janvier 2021
Taux fixe de capitalisation	6,3 %
Dates de composition au taux fixe	11 juillet et 11 janvier de chaque année, commençant le 11 juillet 2016 jusqu'au 11 juillet 2020 inclus
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Goldman Sachs
Principal du variable	100 millions de dollars US
Taux variable	LIBOR 6 mois sur dollars US + 20 points de base
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	11 janvier 2021
Taux de capitalisation	LIBOR 6 mois sur dollars US + 10 points de base
Dates de composition au taux variable	11 juillet et 11 janvier de chaque année, commençant le 11 juillet 2016 jusqu'au 11 juillet 2020 inclus

Ici encore, la méthodologie d'évaluation est inchangée. Pour la jambe fixe, il n'y a aucun problème, puisque le flux terminal est connu avec certitude. On peut supposer les taux forward égaux aux taux spot futurs car le swap peut être décomposé en un portefeuille de FRA[1].

■ **Exemple 34.1** Un swap composé durant trois ans a une périodicité annuelle de capitalisation des intérêts. Un taux fixe de 4 % est payé et le taux LIBOR 12 mois est reçu. La jambe fixe est capitalisée au taux de 3,9 % et la jambe variable à LIBOR – 20 bp. La courbe ZC LIBOR est plate à 5 % en composition annuelle et le principal est de 100 millions. Les taux OIS sont tous à 4 % et sont utilisés pour l'actualisation. La jambe fixe reçoit 4 millions à la fin de chaque année, ce qui donne $4 \times 1{,}039 = 4{,}156$ à la fin de la première année. Cette somme est ajoutée aux 4 millions reçus à la fin de la seconde année et à nouveau capitalisée à 3,9 %, ce qui mène à $8{,}156 \times 1{,}039 = 8{,}474$ millions. Quatre millions sont ajoutés une dernière fois à la fin de la vie du swap, ce qui conduit à un paiement total de 12,474 millions. Pour la jambe variable, nous supposons que les taux forward aujourd'hui sont les taux spot futurs. La courbe ZC LIBOR étant plate, les taux forward sont égaux à 5 %. L'intérêt à la fin de la première année est de 5 millions. Il est capitalisé au taux de 4,8 % (forward LIBOR – 20 bp), ce qui donne $5 \times 1{,}048 = 5{,}24$ millions. On ajoute alors le nouvel intérêt de 5 millions, ce qui nous amène à 10,24 millions. Cette somme est à nouveau capitalisée à 4,8 % et on ajoute le dernier intérêt de 5 millions, ce qui donne $10{,}24 \times 1{,}048 + 5 = 15{,}731$ millions. Le swap peut être évalué comme la valeur actuelle de la différence des deux flux, à savoir les 15,731 millions encaissés sur la jambe variable et les 12,474 millions payés sur la jambe fixe. On a donc :

$$\frac{15{,}731 - 12{,}474}{1{,}04^3} = 2{,}895$$

Le swap vaut 2,895 millions (nous avons, ici encore, ignoré les conventions de décompte des jours et fait l'approximation décrite dans la note de bas de page n° 1).

34.3 Les swaps de devises

Les swaps de devises ont été introduits au chapitre 7. Ils permettent d'échanger une exposition à un risque de taux dans une devise contre une exposition à un risque de taux dans une autre devise. Un principal est spécifié pour chaque devise et ils sont échangés au début et à la fin de la durée de vie du swap (voir section 7.9).

Supposons que l'euro et le dollar US soient les deux devises d'un swap fixe-fixe (les taux sont des taux fixes dans les deux devises). Cela signifie que des intérêts en dollars US sont calculés sur le principal exprimé en dollars US et payés par l'une des parties alors que l'autre paie des intérêts en euros sur le principal en euros. La méthode d'évaluation d'un tel swap a été exposée à la section 7.10.

1. Voir la note technique n° 18 sur le site www.pearson.fr pour plus de détails. L'hypothèse selon laquelle les taux forward aujourd'hui sont les taux spots futurs n'est pas une approximation si le spread utilisé pour la composition des intérêts, s_c, est nul, ou s'il est appliqué de sorte qu'un montant Q à la date t devienne $Q\left[(1 + R\tau)\,(1 + s_c\tau)\right]$ à la date $t+\tau$, où R est le taux LIBOR. Si, comme c'est plus courant, la composition donne $Q\left[(1 + (R + s_c)\tau)\right]$, il y a une légère approximation.

D'autres types de swap de devises sont discutés à la section 7.11. Un swap de devises assez courant est le swap variable-variable. Dans ce cas, les intérêts payés sont calculés au taux LIBOR d'une devise (éventuellement avec un spread) et les intérêts reçus au taux LIBOR de l'autre devise (éventuellement avec un spread).

Les swaps variable-variable peuvent être évalués selon la méthodologie habituelle supposant les taux forward égaux aux taux spot futurs dans chacune des deux devises. On peut ainsi évaluer les flux dans chaque devise ; ils sont ensuite actualisés aux taux ZC LIBOR dans la devise correspondante. Le taux de change d'aujourd'hui est ensuite utilisé pour comparer les valeurs actuelles des deux séries de flux et définir la valeur du swap.

Cette procédure doit souvent être amendée pour tenir compte des réalités du marché. En effet, un contrat variable-variable, par exemple dollars US-LIBOR contre euro-LIBOR (ou Euribor), ne devrait pas comporter de spread. Cependant les conditions de marché font que, dans certains cas, on pourra avoir un nouveau swap échangeant le LIBOR en dollars US contre LIBOR – 10 bp en euros. Dans l'évaluation, l'institution financière actualisera les flux en euros à LIBOR – 10 bp [2].

34.4 Les swaps plus complexes

Nous abordons maintenant l'évaluation de swaps pour lesquels la règle consistant à identifier taux forward et taux spot futurs ne s'applique pas. Dans chaque cas, la technique consiste à ajuster les taux forward. Cette section s'appuie sur les résultats du chapitre 30.

Les swaps à flux décalés

Dans un swap vanille, le taux variable observé à une date s'applique au flux qui sera payé à la date suivante. Certains swaps à arrérages (*LIBOR in arrears*) impliquent que le paiement effectivement réalisé à une date est calculé avec le taux variable observé à cette même date. Notons t_i, $i = 0, \ldots, n$ les dates de paiement du swap et $\tau_i = t_{i+1} - t_i$; R_i est le LIBOR pertinent pour la maturité τ_i à la date t_i, F_i est le taux forward pour cette même période, vu de la date initiale, et σ_i désigne la volatilité de ce taux forward (σ_i peut être déduit des prix de caplets). Dans un swap à arrérages, le paiement de la jambe variable en date t_i est calculé à partir du taux R_i au lieu du taux R_{i-1}. Comme nous l'avons détaillé à la section 30.1, il est nécessaire de procéder à un ajustement de convexité sur le taux forward au moment de l'évaluation. L'évaluation du swap doit alors se faire avec les taux forward suivants :

$$F_i + \frac{F_i^2 \sigma_i^2 \tau_i t_i}{1 + F_i \tau_i} \tag{34.1}$$

au lieu des taux F_i.

2. Il s'agit d'un ajustement *ad hoc*, mais s'il n'était pas réalisé, les traders feraient des gains/pertes immédiats chaque fois qu'ils concluent un nouveau swap euro-dollar US variable-variable.

■ **Exemple 34.2** Considérons un principal de 100 millions d'euros sur un swap à arrérages ; un taux fixe de 5 % est reçu annuellement et le taux LIBOR est payé. Les paiements sont échangés à la fin des années 1 à 5. La courbe ZC LIBOR est supposée plate à 5 % (en composition annuelle) et la volatilité des taux forward, déduite des prix de caplets, est de 22 % par an. Les taux OIS utilisés pour l'actualisation sont tous égaux à 4 %. Le taux forward pour chaque paiement variable est de 5 %. S'il s'agissait d'un swap classique, sans décalage des flux, sa valeur serait nulle (en ignorant le problème de décompte des jours). Comme le calcul des flux se fait avec un taux décalé, l'ajustement de convexité doit être pris en compte. Dans l'équation (30.1), on a $F_i = 5\ \%$, $\sigma_i = 22\ \%$ et $\tau_i = 1$ pour tout i. Le taux à prendre en compte en date t_i est donc :

$$0{,}05 + \frac{0{,}05^2 \times 0{,}22^2 \times 1 \times t_i}{1 + 0{,}05 \times 1} = 0{,}05 + 0{,}000115\, t_i$$

Les taux variables pour le calcul des flux à la fin des années 1 à 5 sont donc respectivement 5,0115 %, 5,023 %, 5,0345 %, 5,0460 % et 5,0575 %. Le flux net à la première date est donc 0,0115 % de 100 millions, soit 11 500 €. Les autres cash-flows nets sont calculés de la même manière et la valeur du swap est alors :

$$-\frac{11\,500}{1{,}04} - \frac{23\,000}{1{,}04^2} - \frac{34\,500}{1{,}04^3} - \frac{46\,000}{1{,}04^4} - \frac{57\,500}{1{,}04^5} \approx -150\,000\ €$$

Les swaps à maturité constante

Un swap à maturité constante (connu sous le sigle CMS, pour *Constant Maturity Swap*) est un swap dans lequel le taux variable est le taux de swap pour un swap d'une maturité donnée. Par exemple, les paiements de la jambe variable ont lieu tous les six mois sur la base du taux de swap à cinq ans constaté. En général, le taux de swap constaté à une date donnée sert à calculer le flux qui sera effectivement payé six mois plus tard. Notons encore t_i, $i = 0, \ldots, n$ les dates auxquelles sont observés les taux de swap servant à calculer les paiements. Le paiement de la jambe variable à la date t_{i+1} est égal à :

$$\tau_i L S_i$$

où $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, L est le principal du swap, et S_i est le taux de swap pour la maturité convenue, observé en t_i.

Notons y_i la valeur forward du taux de swap S_i ; pour évaluer le flux de date t_{i+1}, on utilise l'ajustement de convexité appliqué à y_i, ce qui conduit à transformer le taux de swap forward en :

$$y_i - \frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)} - \frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i} \tag{34.2}$$

au lieu de y_i. Dans cette équation, $\sigma_{y,i}$ est la volatilité du taux de swap forward, F_i est le taux forward pour la période séparant t_i et t_{i+1}, $\sigma_{F,i}$ est la volatilité de F_i, ρ_i est le coefficient de corrélation entre y_i et F_i. $G_i(x)$ est le prix en date t_i d'une obligation en fonction de son taux actuariel x. Cette obligation paie ici un taux de coupon y_i, sa durée de vie et ses paiements sont ceux du swap à partir duquel le taux du CMS est calculé. Les volatilités $\sigma_{y,i}$ peuvent être déduites du prix de swaptions et les $\sigma_{F,i}$ du prix de caplets. La corrélation est estimée à partir d'historiques de données.

L'équation (34.2) est un ajustement à la fois temporel et de convexité. Le terme :

$$-\frac{1}{2}y_i^2\sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)}$$

correspond à l'ajustement utilisé dans l'exemple 30.2 de la section 30.1. Il est fondé sur l'hypothèse que le taux de swap S_i détermine le seul paiement de date t_i. Le terme :

$$-\frac{y_i\tau_i F_i\rho_i\sigma_{y,i}\sigma_{F,i}t_i}{1+F_i\tau_i}$$

est équivalent à celui calculé dans la section 30.2 et intègre le fait que le paiement déterminé par S_i est effectivement réalisé en t_{i+1} plutôt qu'en t_i.

■ **Exemple 34.3** Dans un swap CMS à six ans, le taux de swap 5 ans est reçu, et un taux fixe de 5 % est payé sur un principal de 100 millions d'euros. L'échange des flux est semestriel (à la fois sur le CMS et sur le swap de référence). Le paiement variable à une date donnée est calculé à partir du taux de swap 5 ans observé à la date de paiement précédente. La structure par termes des taux ZC est plate à 5 %. La volatilité implicite des swaptions est de 15 % pour toutes les maturités, et les caplets de tenor 6 mois ont une volatilité implicite de 20 %. La corrélation entre taux de swap et taux de cap est de 0,7. On a donc ici y_i = 0,05 ; $\sigma_{y,i} = 0{,}15$; $\tau_i = 0{,}05$; F_i = 0,05 ; $\sigma_{F,i} = 0{,}20$ et $\rho_i = 0{,}7$ pour tout i. De plus, on a :

$$G_i(x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{2{,}5}{(1+x/2)^i} + \frac{100}{1+x/2)^{10}}$$

On en déduit $G_i(y_i) = -437{,}603$ et $G_i(y_i) = 2\,261{,}23$. L'équation (34.2) donne l'ajustement total à réaliser, égal à $0{,}0001197t_i$, ou encore 1,197 point de base par an. Par exemple, le taux de swap cinq ans dans quatre ans serait supposé égal à 5,0479 % au lieu de 5 %, et le cash-flow net reçu dans 4,5 ans serait :

$$0{,}5 \times 0{,}000479 \times 100\,000\,000 = 23\,940\ €$$

En appliquant la même méthode aux autres dates, on aboutit à une valeur de swap de 159 811 €.

Les swaps à maturité constante sur taux d'État, connus sous le sigle CMT (*Constant Maturity Treasury swap*), fonctionnent comme les CMS, mais le taux variable est en fait le taux actuariel d'une obligation d'État avec une maturité spécifiée. Les CMT s'analysent donc comme les CMS sauf que S_i est le taux actuariel au pair d'une obligation du Trésor servant de référence (en termes de maturité).

Les swaps différentiels

Un swap différentiel, souvent appelé *diff swap*, est un swap dans lequel le taux variable observé dans une devise donnée est appliqué à un principal exprimé dans une autre devise. Supposons que le LIBOR observé en t_i dans une devise Y soit appliqué à un

principal dans une devise X avec un paiement effectif en t_{i+1} ; notons V_i le taux forward dans la devise Y et W_i le taux de change forward pour un contrat de maturité t_{i+1} (exprimé en nombre d'unités de devise Y pour une unité de X). Si le LIBOR observé dans la devise Y était appliqué à un principal dans la devise Y, le cash-flow de date t_{i+1} serait évalué sous l'hypothèse que le taux LIBOR en t_i est égal à V_i. Nous avons vu à la section 30.3 qu'il faut appliquer un ajustement quanto pour un principal en devise X, en supposant que le taux LIBOR est égal à :

$$V_i + V_i \rho_i \sigma_{W,i} \sigma_{V,i} t_i \tag{34.3}$$

où $\sigma_{V,i}$ est la volatilité de V_i, $\sigma_{W,i}$ la volatilité de W_i, et ρ_i est le coefficient de corrélation entre V_i et W_i.

■ **Exemple 34.4** Supposons que les taux aux États-Unis et en France soient de 5 % pour toutes les maturités, en composition annuelle ; dans un *diff swap* à trois ans avec paiements annuels, le LIBOR 12 mois sur dollars US est reçu et le LIBOR 12 mois sur EUR est payé, les deux étant appliqués à un principal de 10 millions d'euros. La volatilité des taux forward à 1 an aux États-Unis est estimée à 20 % et la volatilité du taux de change forward (en dollars US par euro) est de 12 % pour toutes les maturités, avec une corrélation entre taux forward et taux de change forward égale à 0,4. On a alors V_i = 0,05 ; $\rho_i = 0{,}4$; $\sigma_{V,i} = 0{,}2$ et $\sigma_{W,i} = 0{,}12$. Les cash-flows dépendant du taux LIBOR US doivent alors être calculés avec le taux ajusté suivant :

$$0{,}05 + 0{,}05 \times 0{,}4 \times 0{,}12 \times 0{,}2 \times t_i = 0{,}05 + 0{,}00048 t_i$$

Les cash-flows nets à la fin des trois années sont donc respectivement 0, 4 800 et 9 600 €. En supposant que les taux OIS utilisés pour l'actualisation sont égaux à 4,8 % en composition annuelle, la valeur du diff swap est :

$$\frac{0}{1{,}048} + \frac{4\,800}{1{,}048^2} + \frac{9\,600}{1{,}048^3} = 12\,711 \ \text{€}$$

34.5 Les swaps sur actions ou indices (*equity swaps*)

Dans un swap sur indices, une des parties s'engage à payer la rentabilité d'un indice, alors que l'autre partie paie un taux d'intérêt fixe ou variable. Pour les gérants de fonds, c'est un moyen de modifier l'exposition au risque de marché d'un portefeuille sans changer la composition de celui-ci. Un swap sur indices est un moyen pratique de dupliquer une série de contrats forward sur indices.

L'indice sous-jacent est en général un indice de rendement global tenant compte du réinvestissement des dividendes dans l'indice. Un exemple de ce type de swap est donné dans l'encadré 34.3.

Dans cet exemple, le taux de rentabilité à 6 mois du S&P500 est échangé contre le LIBOR. Le principal est de 100 millions pour chaque partie, et les paiements sont semestriels.

Encadré 34.3 Extrait d'une confirmation pour un swap sur indices entre Microsoft et Goldman Sachs

Date de transaction	4 janvier 2016
Date de départ	11 janvier 2016
Convention jours ouvrés	Suivant
Calendrier jours ouvrés	US
Date de fin	11 janvier 2021
Paiements fixes	
Payeur de l'indice	Microsoft
Principal de l'indice	100 millions de dollars US
Indice	Rendement global du S&P500
Paiement	100 $(I_1 - I_0)/I_0$, où I_1 est le niveau de l'indice à la date de paiement et I_0 le niveau de l'indice à la date de paiement précédente. Pour le premier paiement, I_0 est le niveau de l'indice le 11 janvier 2016
Dates de paiement	Chaque 11 juillet et 11 janvier, commençant le 11 juillet 2016 jusqu'au 11 janvier 2021
Paiements variables	
Payeur du taux variable	Goldman Sachs
Principal du variable	100 millions de dollars US
Taux variable	LIBOR 6 mois sur dollars US
Décompte des jours	Exact/360
Dates de paiement	Chaque 11 juillet et 11 janvier, commençant le 11 juillet 2016 jusqu'au 11 janvier 2021

Au début de la vie d'un swap comme celui de l'encadré 34.3, sa valeur est nulle. C'est dû au fait que l'on peut toujours emprunter le principal au LIBOR pour investir dans l'indice jusqu'à la date de paiement suivante, en y réinvestissant les dividendes éventuels. Un raisonnement du même type montre que la valeur d'un swap de ce type est nulle immédiatement après chaque date de paiement.

Entre deux dates de paiement, il faut évaluer les cash-flows (indice et LIBOR) à la prochaine date de paiement. Le cash-flow LIBOR peut facilement être calculé, puisqu'il a été fixé à la précédente date de réajustement. La valeur du cash-flow lié à l'indice est

LE/E_0 où L est le principal, E est la valeur de l'indice aujourd'hui, et E_0 est cette même valeur à la précédente date de réajustement [3].

34.6 Les swaps contenant des options

Certains swaps contiennent des options. Dans cette section, nous présentons quelques exemples parmi les plus courants.

Les swaps à capitalisation conditionnelle (accrual swaps)

Il s'agit de swaps dans lesquels l'intérêt d'une des deux parties n'est capitalisé que si la référence de taux variable se situe dans un certain intervalle. Cet intervalle peut être fixé pour toute la durée du swap ou modifié périodiquement. Cela peut être par exemple un swap dans lequel un taux fixe Q est échangé contre un LIBOR 3 mois. L'intérêt à taux fixe n'est payé que dans les périodes où le LIBOR 3 mois est inférieur à 5 %. Notons toujours L le principal ; dans un swap classique, le payeur du taux fixe verse QLn_1/n_2, où n_1 est le nombre de jours depuis le paiement précédent et n_2 le nombre de jours dans l'année (nous supposons ici une convention Exact/Exact). Dans un swap à capitalisation conditionnelle, le paiement sera QLn_3/n_2, où n_3 est le nombre de jours du trimestre qui vient de s'écouler pendant lequel le taux LIBOR 3 mois était inférieur à 5 %. Le payeur du taux fixe a de ce fait une position combinant un swap classique et un portefeuille d'options digitales, une pour chaque jour de la durée de vie du swap. Ces options ont un payoff égal à QL/n_2 quand le LIBOR est supérieur à 5 %.

Pour généraliser cet exemple, notons R_K le taux en deçà duquel le taux fixe (5 % dans notre exemple) cesse d'être payé et τ le délai entre deux paiements successifs (en années). i est un jour quelconque et t_i est le délai entre aujourd'hui et le jour i. R_i est le taux LIBOR de maturité τ observé au jour i, F_i est le taux forward et σ_i la volatilité de ce dernier, estimée à partir de volatilités spot de caplets. Sous l'hypothèse de log-normalité, la probabilité que le LIBOR soit plus grand que R_K sous la probabilité forward-neutre ayant pour numéraire le zéro-coupon d'échéance $t_i + \tau$ est $N(d_2)$ avec :

$$d_2 = \frac{\ln(F_i/R_K) - \sigma_i^2 t_i/2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

Le payoff de l'option digitale est réalisé à la première date de paiement du swap suivant le jour i. Notons s_i cette date ; $N(d_2^*)$ est la probabilité que le taux LIBOR soit plus grand que R_K, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance s_i. Le coefficient d_2^* est calculé par la même formule que d_2, mais avec un ajustement temporel traduisant la différence entre $t_i + \tau$ et s_i. La valeur de l'option digitale correspondant au jour i est alors :

$$\frac{QL}{n_2} P(0,s_i)\, N(d_2^*)$$

3. Voir la note technique n° 19 sur le site www.pearson.fr pour une analyse plus détaillée.

La valeur totale des options digitales incluses dans le swap est obtenue en additionnant l'expression précédente pour tous les jours considérés. En pratique, l'ajustement temporel consistant à remplacer d_2 par d_2^* est si faible qu'il est le plus souvent ignoré.

Les swaps annulables

Un swap annulable (*cancelable swap*) est un swap de taux vanille dans lequel une des deux parties a la possibilité de terminer le swap à une ou plusieurs dates. Mettre fin au swap équivaut bien sûr à prendre une position sur un swap exactement symétrique en termes de caractéristiques. Considérons à nouveau un swap entre Microsoft et Goldman Sachs ; si Microsoft a la possibilité d'arrêter le swap à une date donnée, cela peut être interprété comme une position comportant un swap classique, plus une position longue sur une option de swap sur le swap symétrique. En revanche, si c'est Goldman Sachs qui a la possibilité de stopper, la position de Microsoft est composée d'un swap classique, auquel s'ajoute une position courte sur une swaption dont le sous-jacent est le swap symétrique.

Lorsque la possibilité d'arrêter le swap n'est offerte qu'à une seule date, la position est la combinaison d'un swap vanille avec une swaption européenne dont l'échéance est la date possible d'arrêt. Considérons par exemple un swap durant 10 ans entre Microsoft et Goldman Sachs, dans lequel Microsoft reçoit 4 %, paie le LIBOR et a la possibilité d'arrêter le swap après six ans. Ce swap est la combinaison d'un swap vanille avec une swaption européenne d'échéance 6 ans donnant le droit de conclure un swap de 4 ans, dans lequel Microsoft paiera 4 % et recevra le LIBOR (ce contrat est appelé option européenne 6×4). Les modèles de marché standard du chapitre 29 permettent d'évaluer ce type d'options.

Lorsque le swap peut être arrêté à plusieurs dates, l'option combinée avec le swap vanille est une swaption bermudienne. Elle peut être évaluée à l'aide des méthodes présentées aux chapitres 32 et 33.

Les swaps annulables composés

Parfois, les swaps composés peuvent être annulés à certaines dates de paiement spécifiées à l'avance. Au moment de l'annulation, le payeur du taux variable règle la valeur capitalisée des montants à taux variable (jusqu'à la date d'arrêt) et le payeur du taux fixe règle la valeur capitalisée des paiements fixes jusqu'à cette même date.

Il faut utiliser quelques ruses pour évaluer ces contrats. Supposons, par exemple, que le taux variable soit le LIBOR, que ce même taux soit le taux de capitalisation et que le principal soit payé, sur les deux jambes, à l'échéance du swap. Cela revient à passer du tableau 7.1 au tableau 7.2 pour un swap vanille. Cela ne change pas la valeur du swap mais a pour effet d'assurer que la jambe variable est toujours égale à la valeur notionnelle du principal à une date de paiement. La décision d'arrêt est prise en analysant uniquement la jambe fixe. On construit un arbre comme celui décrit au chapitre 32 et on évalue la jambe fixe par induction arrière. À chaque date possible d'annulation et à chaque nœud, on teste le caractère optimal de l'arrêt. L'annulation

fixe en effet la valeur de la jambe fixe au pair ; si on est en position de recevoir le fixe et de payer le variable, l'objectif est alors de maximiser la valeur de la jambe fixe.

Quand le taux de référence de la jambe variable est LIBOR + spread avec un taux de capitalisation LIBOR, on peut soustraire de la jambe fixe les cash-flows correspondant au spread, plutôt que de les ajouter à la jambe variable. L'option peut alors être évaluée en faisant comme si le spread était nul. Lorsque le taux de capitalisation est LIBOR + spread, une méthode approchée doit être utilisée [4] :

1. On calcule la valeur de la jambe variable à chaque date d'annulation en identifiant taux forward et taux spot futurs ;
2. On calcule la valeur de la jambe variable à chaque date d'annulation en supposant que le taux variable est le LIBOR et en capitalisant au LIBOR ;
3. On définit l'écart entre les valeurs obtenues aux points (1) et (2) comme la « valeur des spreads » à la date d'annulation ;
4. On considère l'option comme dans le cas précédent. Pour décider d'exercer ou non, on soustrait la valeur des spreads aux valeurs calculées pour la jambe fixe.

Une approche analogue peut être employée si le taux d'actualisation est un taux OIS, à condition de supposer que le spread entre OIS et LIBOR est égal au forward spread.

34.7 Quelques autres swaps

Dans ce chapitre, nous avons analysé quelques catégories importantes de swaps, mais la variété des contrats qu'il est possible de construire a pour seules limites l'imagination des professionnels de la finance et l'appétit des trésoriers pour les innovations financières et les outils sophistiqués de gestion du risque.

Un swap très populaire aux États-Unis dans les années 1990 était le swap à principal indexé (*index amortizing swap*), dans lequel le principal diminue dans le temps en fonction du niveau d'un taux d'intérêt. La diminution du principal est d'autant plus forte que la baisse du taux qui sert de base à l'indexation est importante. La jambe fixe de ce type de swap était destinée à dupliquer, au moins approximativement, la rentabilité obtenue par un investisseur sur un portefeuille de créances hypothécaires, après prise en compte des options de remboursement anticipé. Dans ce contrat, cette rentabilité était donc échangée contre un taux variable.

Les swaps sur marchandises ou matières premières (*commodity swaps*) sont de plus en plus prisés. Par exemple, une entreprise qui consomme 100 000 barils de pétrole par an pourrait échanger un paiement annuel de 8 millions de dollars US contre un paiement de $100\,000 \times S$, où S est le prix du baril aux différentes dates de paiement. Ce contrat permet d'assurer un prix du baril qui ne dépasse pas 80 $. Les dérivés d'énergie seront examinés plus en détail au chapitre 34.

4. Cette approche n'est pas parfaite car elle suppose que la décision d'exercice de l'option n'est pas influencée par le fait que les paiements futurs seront capitalisés à un taux différent du LIBOR.

Un certain nombre d'autres swaps ont été détaillés dans d'autres chapitres. Par exemple, les swaps d'actif ont été étudiés au chapitre 24, certains swaps de crédit au chapitre 25 et les swaps de volatilité au chapitre 26. D'autres swaps contiennent des options. Les swaps à capitalisation conditionnelle s'interprètent comme un swap vanille auquel on a ajouté un large portefeuille d'options digitales (une option pour chaque jour de vie du swap). Enfin, un swap annulable peut être vu comme un swap vanille auquel on a ajouté une swaption bermudienne.

Contrats inhabituels

Enfin, certains contrats supposent un calcul des flux relativement étrange. Un exemple célèbre est le swap 5/30 conclu par Bankers Trust (BT) et Procter & Gamble (P&G) en 1993 [5] (voir encadré 34.4). Les détails de cette opération sont de notoriété publique, car elle fut l'objet d'une affaire judiciaire.

Encadré 34.4 L'étrange contrat de Procter & Gamble

Le swap 5/30 conclu par Bankers Trust (BT) et Procter & Gamble (P&G) le 2 novembre 1993 était un swap durant cinq ans, avec des paiements semestriels sur un principal de 200 millions de dollars US. BT payait 5,3 % par an et P&G payait le taux moyen des billets de trésorerie à 30 jours (*commercial paper*), moins 75 points de base plus un spread. La moyenne était calculée sur la période courant depuis la précédente date de paiement. Le spread était nul à la première date de paiement (le 2 mai 1994) ; en revanche, les spreads suivants étaient calculés selon la formule suivante :

$$\max\left[0\,;\ \frac{98{,}5\left(\frac{R_5}{5{,}78\ \%}\right)-P_{30}}{100}\right]$$

où R_5 est le taux actuariel des obligations à 5 ans du Trésor (*5-year Treasury notes*) tel qu'il est transmis par la Federal Reserve, et P_{30} est le milieu de fourchette du prix, coupon couru, de l'obligation à 30 ans du Trésor, dont l'échéance est en août 2021, et qui paie 6,25 % de taux de coupon. Notez que le taux calculé est un taux décimal et non un taux mesuré en points de base. Si le calcul de cette formule donne un résultat égal à 0,1, et que le taux des billets de trésorerie est de 6 %, le taux payé par Procter & Gamble est de 15,25 %. P&G espérait bien sûr que le spread reste nul, ce qui permettait à l'entreprise d'échanger un taux fixe de 5,30 % contre un taux variable inférieur de 75 points de base au taux des billets de trésorerie. En 1994, les taux augmentèrent fortement, ce qui fit chuter le prix des obligations. On voit dans la formule précédente l'effet d'un tel mouvement sur le spread : R_5 augmente et P_{30} diminue, ce qui, à l'époque, fit exploser le spread (voir problème 34.10).

5. Voir D. J. Smith, "Agressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap", *Journal of Derivatives*, 4 (4), été 1997, 67-79.

Résumé

Les swaps constituent une classe d'instruments financiers d'une grande diversité. Nombre d'entre eux peuvent être évalués simplement, en considérant que les taux spot futurs sont égaux aux taux forward observés aujourd'hui. Les swaps vanille, la plupart des swaps sur devises, les swaps dont le principal évolue de manière déterministe, les swaps composés appartiennent à cette catégorie.

Certains swaps nécessitent un ajustement des taux forward pour pouvoir appliquer la méthode classique ; ces ajustements sont liés aux décalages temporels, à la convexité ou aux devises considérées. Les swaps à arrérages, les swaps différentiels ou les CMS nécessitent ce genre d'ajustement.

Les swaps sur actions ou indices font intervenir la rentabilité d'une action ou d'un indice qui sera échangée contre un taux d'intérêt fixe ou variable. Ils sont habituellement conçus de façon que leur valeur soit nulle immédiatement après chaque date de paiement. Une certaine prudence est cependant nécessaire pour les évaluer entre deux dates de paiements.

Références complémentaires

Chance D. et D. Rich, "The Pricing of Equity Swap and Swaptions", *Journal of Derivatives*, 5 (4), été 1998, 19-31.

Smith D. J., "Agressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap", *Journal of Derivatives*, 4 (4), été 1997, 67-79.

Problèmes et exercices

34.1 Calculez tous les cash-flows à taux fixe et les dates exactes de paiement du swap de l'encadré 34.1. Supposez que les conventions de décompte des jours s'appliquent aux dates de paiement prévues, hors conventions sur les jours ouvrés.

34.2 Un swap spécifie l'échange d'un taux fixe contre deux fois le taux LIBOR. Peut-on, pour l'évaluer, assimiler les taux forward observés aujourd'hui aux taux spot futurs ?

34.3 Quelle est la valeur d'un swap composé (fixe contre variable) à 2 ans, avec un principal de 100 millions d'euros et des paiements semestriels, quand le taux fixe est payé et le taux variable reçu ? Le taux fixe est de 8 % et les paiements capitalisés à 8,3 %. Le taux variable est LIBOR + 10 bp et les paiements capitalisés à LIBOR + 20 bp. La courbe ZC LIBOR, en composition semestrielle, est plate au niveau de 8 %.

34.4 Quelle est la valeur d'un swap à 5 ans quand, d'un côté, le LIBOR est payé de la manière habituelle, tous les six mois, et de l'autre un seul flux est payé en fin de vie du swap ? Ce flux est calculé sur le LIBOR 6 mois et capitalisé à ce même taux. Le principal est de 100 millions des deux côtés. Les dates de paiements (semestriels) de la première jambe du swap sont aussi les dates auxquelles on débute la capitalisation des intérêts sur la seconde jambe du swap. La courbe ZC LIBOR en composition semestrielle est plate à 5 %.

34.5 Calculez l'ajustement global dans l'exemple 34.3 de la section 34.4 si toutes les volatilités déduites des caps sont de 18 % au lieu de 20 %, et les volatilités de toutes les options sur swap à cinq ans sont de 13 % au lieu de 15 %. Quelle hypothèse devrait-on faire sur le niveau du taux de swap à 5 ans dans 3 ans pour l'évaluation ? Quelle est la valeur du swap ?

34.6 Expliquez pourquoi un swap de taux vanille ainsi que le swap composé de la section 34.2 peuvent être évalués en assimilant les taux forward observés aujourd'hui aux taux spot futurs, alors que le swap à arrérages de la section 34.4 ne peut être évalué par cette même technique.

34.7 Dans le swap à capitalisation conditionnelle présenté dans ce chapitre, la capitalisation au taux fixe a lieu seulement si le taux variable de référence se situe en deçà d'un seuil donné. Comment peut-on adapter l'analyse si la condition pour la capitalisation à taux fixe est que le taux variable de référence soit situé au-delà d'un seuil de taux et en deçà d'un autre seuil supérieur au premier.

Questions complémentaires

34.9 Supposons que la courbe ZC LIBOR est plate à 5 % aux États-Unis et plate à 10 % en France (en composition annuelle pour les deux) ; on considère un contrat dans lequel le LIBOR en euros est reçu et un taux de 9 % est payé, les deux calculés sur un principal de 10 millions de dollars US. Les paiements sont annuels. La volatilité de tous les taux forward à 1 an en euros est estimée à 25 % et la volatilité du taux de change forward dollar US/euro (nombre d'euros par dollar US) est de 15 % par an pour toutes les maturités ; la corrélation entre taux forward et taux de change forward est de 0,3. Quelle est la valeur du swap ?

34.10 Estimez le taux d'intérêt payé par P&G sur le swap 5/30 de la section 34.7 si : (a) le taux des billets de trésorerie est de 6,5 % et la courbe des taux actuariels obligataires est plate à 6 %, et (b) le taux des billets de trésorerie est à 7,5 % et la courbe des taux actuariels obligataires est plate à 7 % (en composition semestrielle).

34.11 Supposons que vous concluiez un swap à arrérages avec une contrepartie qui néglige les ajustements de convexité. Pour profiter de cette situation, devriez-vous plutôt payer le taux fixe ou recevoir le taux fixe ? Comment devriez-vous structurer le swap en termes de durée de vie et de fréquence de paiements ? Supposez que la courbe des taux actuariels est plate à 10 % en composition annuelle. Les volatilités déduites des caps sont à 18 %. Quelle est la différence d'évaluation d'un swap à arrérages (sur le LIBOR) de principal 1 million, selon que l'on tienne compte ou pas de l'ajustement, lorsque les paiements sont annuels et que le swap dure (a) 5 ans, (b) 10 ans, et (c) 20 ans ?

34.12 Supposons que la courbe des taux ZC LIBOR soit plate à 5 % en composition annuelle. Dans un swap à cinq ans, une entreprise X paie annuellement un taux fixe de 6 % et reçoit le LIBOR. La volatilité du taux de swap deux ans dans trois ans est de 20 %. Le principal est égal à 100 €.

a. Quelle est la valeur de ce swap ?

b. Utilisez DerivaGem pour évaluer ce swap si X a la possibilité d'arrêter le swap dans 3 ans.

c. Utilisez DerivaGem pour évaluer ce swap si la contrepartie a la possibilité d'arrêter le swap dans 3 ans.

d. Quelle est la valeur du swap si chacune des deux parties a l'option de stopper le swap dans trois ans ?

34.13 Comment pouvez-vous calculer la valeur initiale du swap d'actifs de l'encadré 34.3 si des taux OIS sont utilisés pour l'actualisation ?

Chapitre 35

Les dérivés climatiques, d'énergie et d'assurance

Dans les chapitres précédents, l'actif sous-jacent des contrats dérivés pouvait être une action, un indice, une perte sur un aléa de crédit, etc. Dans ce chapitre, nous considérons une gamme de sous-jacents alternatifs.

Dans la première partie, l'actif sous-jacent est une matière première. Au chapitre 2, nous avons décrit les contrats futures sur matières premières et, au chapitre 18, les options sur contrats futures de matières premières. Comme une option européenne sur futures a le même payoff qu'une option sur le sous-jacent (spot) au contrat futures, quand l'option et le contrat futures ont la même échéance, le modèle d'évaluation (modèle de Black) d'options sur futures peut aussi être utilisé pour évaluer les options spot. Cependant, les options américaines sur spot et d'autres dérivés plus complexes dépendant du prix spot d'une matière première exigent des modèles plus sophistiqués. En effet, les prix de matières premières sont souvent sujets à un phénomène de retour à la moyenne (comme les taux d'intérêt) et présentent parfois des sauts. Certains des modèles développés pour les taux sont donc adaptables aux matières premières.

La seconde partie du chapitre analyse les dérivés climatiques et d'assurance. Les sous-jacents de ces contrats sont spécifiques car ils ne présentent pas de risque systématique. Par exemple, la valeur espérée d'une température à un endroit donné ou les pertes consécutives à un ouragan peuvent raisonnablement être supposées identiques dans l'univers réel et dans l'univers risque-neutre. Par conséquent, les données historiques sont plus utiles pour ces actifs dérivés que pour d'autres.

35.1 Les matières premières agricoles

Les matières premières agricoles incluent les produits qui sont semés, puis récoltés (ou créés à partir de produits qui sont semés, puis récoltés), tels que le maïs, le blé, le soja, le café, le cacao ou le jus d'orange congelé. Ils incluent aussi le bétail vivant ou les carcasses de porc. Les prix des matières premières agricoles, comme ceux de toutes les matières

premières, sont déterminés par l'offre et la demande. De ce fait, ils dépendent du niveau des stocks et de la saison. Par exemple, le Département de l'agriculture américain publie en fin d'année, pour le blé et le maïs, le ratio stocks/consommation. Il se situe en général entre 20 % et 40 %. Cette information influence la volatilité des prix. Quand le ratio est faible, le prix de la matière première devient plus sensible aux variations de l'offre, ce qui accroît la volatilité.

D'autres arguments peuvent être invoqués pour expliquer le phénomène de retour à la moyenne des prix des matières premières agricoles. Quand les prix d'un produit diminuent, les agriculteurs sont plus tentés d'abandonner la culture de ce produit, réduisant l'offre et conduisant à une augmentation des prix. Le phénomène symétrique se produit quand les prix commencent par augmenter.

Les prix des matières premières agricoles tendent aussi à être saisonniers car le stockage est coûteux et sa durée possible limitée. De plus, la météo joue un rôle fondamental dans les prix. Une période de gel peut avoir des conséquences dramatiques sur la production du café au Brésil, un ouragan en Floride sur les prix du jus d'orange ou les incendies de 2010 en Russie sur le prix du blé. Ces remarques montrent que la volatilité des prix peut être très élevée avant la récolte et diminuer ensuite, ou que le processus de prix peut présenter des sauts du fait d'événements climatiques. Tout cela a aussi des conséquences sur le prix du bétail, puisqu'il dépend du prix des matières premières utilisées pour nourrir les troupeaux, donc des conditions météorologiques.

35.2 Les métaux

Une autre catégorie importante de matières premières regroupe les métaux. Elle comprend l'or, l'argent, le platine, le cuivre, l'aluminium, le zinc, le nickel, etc. Les métaux ont des caractéristiques différentes des matières premières agricoles. Leurs prix ne sont ni saisonniers, ni influencés par la météo. Ces matières premières sont facilement stockables et divisibles. Certains métaux comme le cuivre sont utilisés exclusivement pour la production et sont des actifs de consommation. Comme nous l'avons expliqué dans la section 5.1, d'autres métaux, comme l'or et l'argent, sont détenus à la fois pour l'investissement et pour la consommation et sont classés dans la catégorie « actifs d'investissement ».

Les analystes étudient les niveaux des stocks pour tenter de prévoir la volatilité à court terme, comme c'était déjà le cas pour les matières premières agricoles. La volatilité des taux de change peut aussi influencer celle des prix des métaux, puisque les pays de production sont différents des pays de consommation. Enfin, sur le long terme, le prix des métaux est déterminé par la façon dont le métal est utilisé dans la production. Les modifications technologiques liées à l'exploitation, la géopolitique, l'environnement réglementaire, etc. sont aussi de nature à influencer les prix.

Une source nouvelle d'offre de métal provient du recyclage. Dans les 20 prochaines années, on évalue à 10 % la part du métal dans le processus de production qui proviendra du recyclage.

Pour les métaux qui sont des actifs d'investissement, on ne peut supposer que les prix sont sujets au retour à la moyenne car cette hypothèse induirait des opportunités d'arbi-

trage. En revanche, elle est raisonnable pour les métaux qui sont des actifs de consommation. Comme précédemment, lorsque les prix augmentent, certains investissements plus coûteux (extraction en profondeur, par exemple) s'avèrent désormais rentables. L'augmentation de l'offre conjuguée à la baisse de la consommation en raison des prix initialement élevés entraîne un excès d'offre et un retournement à la baisse des prix. Symétriquement, quand les prix baissent, la consommation augmente, la production sur les sites « difficiles » perd de sa rentabilité et peut être abandonnée, ce qui induit une pression à la hausse sur les prix.

35.3 Les dérivés d'énergie

Les entreprises du secteur de l'énergie font partie des utilisateurs de contrats dérivés les plus actifs et les plus sophistiqués. De nombreux produits d'énergie sont échangés à la fois sur les marchés de gré à gré et sur les marchés organisés. Dans cette section, nous présentons les marchés du pétrole, du gaz naturel, ainsi que les dérivés portant sur le prix de l'électricité. Ici encore, les processus de prix sont susceptibles d'être sujets au retour à la moyenne. En effet, quand le prix d'une source d'énergie augmente, la consommation diminue et par la suite la production augmente, ce qui induit une pression à la baisse. Symétriquement, quand les prix baissent, la production devient moins profitable et la consommation augmente, ce qui conduit à une hausse des prix. On peut aussi mentionner les effets de substitution entre sources d'énergie comme explication des cycles de prix puisque lorsque le prix d'une source d'énergie augmente, la demande peut se reporter sur des sources concurrentes.

Le pétrole

Le pétrole est une des matières premières les plus importantes, avec une demande mondiale journalière de l'ordre de 80 millions de barils. Des contrats d'approvisionnement de long terme (10 ans), à prix fixes, sont conclus depuis de nombreuses années sur les marchés de gré à gré. Des swaps permettant d'échanger du pétrole à prix fixe contre du pétrole à prix variable sont aussi traités sur les marchés.

Il existe différentes qualités de pétrole, qui se distinguent essentiellement par la densité et la teneur en soufre. Les deux benchmarks essentiels sur les marchés sont le Brent de la mer du Nord et le WTI (*West Texas Intermediate*). Ces produits bruts sont ensuite raffinés en essence, fuel domestique, kérosène, etc.

Pratiquement tous les actifs dérivés, dont les sous-jacents sont les actions ou les indices, possèdent leur pendant sur le marché de gré à gré avec le pétrole comme sous-jacent. Les swaps, les contrats forward et les futures sont très courants. Certains contrats sont sujets à un dénouement en cash, alors que d'autres imposent la livraison du sous-jacent (c'est-à-dire le pétrole).

Les marchés organisés rencontrent aussi un grand succès. Le CME Group et l'Intercontinental Exchange (ICE) proposent une grande diversité de contrats futures et d'options sur ces contrats. Ici encore, certains contrats donnent lieu à un règlement en cash et d'autres à la livraison du sous-jacent. Par exemple, le contrat futures sur le Brent, coté sur l'ICE, est débouclé en cash, sur la base du prix du Brent ; le contrat futures sur

pétrole brut léger coté sur le CME Group requiert la livraison du sous-jacent. Dans les deux cas, la quantité de sous-jacent par contrat est de 1 000 barils. Sur le CME Group sont aussi traités des contrats sur deux produits raffinés, le fuel domestique et l'essence. Pour ces contrats, la quantité à livrer est de 42 000 gallons.

Le gaz naturel

L'industrie du gaz naturel a connu une période de dérégulation et d'élimination des monopoles d'État dans les années 1980 et 1990. Le fournisseur de gaz naturel n'est plus forcément le producteur. Les fournisseurs sont donc confrontés au problème de satisfaction de la demande journalière. Un contrat type sur le marché de gré à gré consiste en la fourniture d'une quantité donnée de gaz naturel à un rythme stable pendant une période d'un mois. Les contrats forward, les options ou encore les swaps sont aussi traités sur le marché OTC. Le vendeur du gaz est en général responsable de l'acheminement par pipe-line jusqu'au lieu de livraison. Le CME Group propose un contrat pour la livraison de 10 000 millions de BTU (*British Thermal Units*) de gaz naturel. Ce contrat, s'il n'est pas dénoué avant l'échéance, impose de livrer à un rythme uniforme pendant le mois prévu pour la livraison à un terminal gazier en Louisiane. L'ICE propose un contrat analogue à Londres. Comme le gaz naturel est une ressource essentielle pour le chauffage domestique et la climatisation, les prix sont à la fois saisonniers et dépendants de la météo.

L'électricité

L'électricité n'est pas un produit commun, du fait des difficultés de stockage[1]. L'offre maximale d'électricité dans une région donnée à un moment précis est déterminée par la capacité maximale de production de l'ensemble des centrales de la région considérée. Aux États-Unis, il y a par exemple 140 régions appelées *zones de contrôle*. L'offre et la demande sont, dans un premier temps, appariées dans chacune des zones et les excès d'offre sont ensuite vendus aux zones déficitaires. Ce sont ces excédents qui constituent le marché de l'électricité. La capacité d'une zone de contrôle à vendre du courant à une autre zone dépend de la capacité de transfert par les lignes électriques d'une zone à l'autre. Ce transfert induit un coût, facturé par le propriétaire de la ligne, et il y a généralement une déperdition d'énergie lors du transfert.

Aux États-Unis, une des utilisations essentielles de l'électricité concerne la production d'air conditionné. De ce fait, la demande d'électricité, et donc le prix de cette ressource, sont plus forts pendant les mois d'été que pendant les mois d'hiver. L'impossibilité de stocker l'électricité provoque occasionnellement de très brutales variations de prix. Lors de certaines vagues de fortes chaleurs, des augmentations de 1 000 % ont pu être observées pendant de courtes périodes.

1. Les producteurs d'électricité disposant d'excédents les utilisent régulièrement pour remonter l'eau dans les centrales hydroélectriques, de façon à produire de l'électricité un peu plus tard. C'est le moyen le plus « direct » de stockage de l'électricité.

Comme celle du gaz naturel, l'industrie de l'électricité a connu une période de dérégulation et de suppression des monopoles d'État. Ce mouvement s'accompagne du développement de marchés d'actifs dérivés. Le CME Group propose maintenant un contrat futures sur le prix de l'électricité, et un marché de gré à gré actif propose aussi des contrats forward, des swaps et des options. Le contrat type (négocié de gré à gré) autorise l'une des parties à recevoir un nombre spécifié de mégawatts-heure pour un prix fixé à un endroit donné pendant un mois. Dans un contrat 5×8, l'électricité est reçue cinq jours par semaine (du lundi au vendredi) pendant les heures creuses (de 23 heures à 7 heures) d'un mois spécifié. Pour un contrat 5×16, l'électricité est reçue pendant les heures à forte demande (de 7 heures à 23 heures). Enfin, pour le 7×24, le courant est fourni en continu pendant le mois identifié au contrat.

Les contrats d'options peuvent prévoir soit un exercice quotidien, soit un exercice mensuel. Si l'exercice est quotidien, l'acheteur du contrat peut choisir, chaque jour du mois (en informant un jour à l'avance), de recevoir la quantité prévue au contrat en payant le prix d'exercice. Quand l'exercice est mensuel, une seule décision est prise en début de mois, décision qui détermine la livraison ou non de l'électricité pour le mois entier au prix d'exercice fixé contractuellement.

Sur le marché du gaz naturel ou de l'électricité, il existe des contrats intéressants, appelés *take or pay* ou encore *swing option*. Dans ces contrats, des quantités minimale et maximale d'électricité ou de gaz qui doivent être achetées chaque jour, à un prix donné, par le détenteur du contrat sont spécifiées. Un maximum et un minimum sont aussi définis pour la période mensuelle dans son ensemble. La spécificité de ces contrats réside dans la possibilité donnée au détenteur, pendant le mois, de changer le rythme d'approvisionnement, dans les limites fixées. En général, il existe un nombre maximal de changements de régime autorisés pendant la période de livraison.

35.4 Le prix des matières premières

L'incertitude des prix futurs des matières premières touche de nombreux investissements. Souvent, les prix à terme peuvent être utilisés directement pour estimer le processus risque-neutre du prix d'une matière première. Ce dernier peut donc être assimilé à celui d'un actif d'investissement, car il n'est pas nécessaire d'évaluer directement le prix de marché du risque.

Un processus de prix simple

La section 18.6 a permis de montrer que le prix futur espéré d'une matière première dans l'univers risque-neutre est égal au prix à terme (futures). Si nous supposons que le taux de croissance du prix de cette matière première dépend seulement du temps et que, par ailleurs, la volatilité est constante, le processus risque-neutre de prix, S, s'écrit :

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)\, dt + \sigma\, dz \tag{35.1}$$

et donc :

$$F(t) = \hat{E}[S(t)] = S(0)\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mu(\tau)\, d\tau}$$

où $F(t)$ est le prix futures d'un contrat de maturité t et $\hat{E}$ est l'opérateur d'espérance sous la probabilité risque-neutre. Il s'ensuit que :

$$\ln F(t) = \ln S(0) + \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau$$

En dérivant chaque membre par rapport à t, on obtient :

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t} [\ln F(t)]$$

■ **Exemple 35.1** Supposons que les prix des contrats futures sur bétail vivant à la fin du mois de juillet 2017 soient (en cents par livre) :

Août 2017	62,20
Octobre 2017	60,60
Décembre 2017	62,70
Février 2018	63,37
Avril 2018	64,42
Juin 2018	64,40

Ces prix peuvent être utilisés pour déterminer le taux de croissance espéré du prix du bétail vivant, dans l'univers risque-neutre. Par exemple, le modèle de l'équation (35.1) conduit à une estimation de ce taux entre octobre et décembre 2017 égale à :

$$\ln\left(\frac{62{,}7}{60{,}6}\right) = 0{,}034$$

c'est-à-dire un taux de 3,4 % pour deux mois en composition continue, ce qui correspond à 20,4 % en base annuelle.

■ **Exemple 35.2** Considérons les prix de l'exemple 35.1 et supposons qu'un investissement dans l'élevage nécessiterait un décaissement immédiat de 100 000 $ et des dépenses de 20 000 $ dans 3 mois, 6 mois et 9 mois. Le résultat de cet investissement serait du cheptel supplémentaire pouvant être vendu à la fin de l'année. Les deux incertitudes clés de ce problème sont le poids total de bétail supplémentaire qui résultera de l'investissement et le prix de vente correspondant. Le poids espéré est de 300 000 livres et le prix de vente espéré dans un univers risque-neutre est, à partir des données de l'exemple précédent, de 64,40 cents par livre. En supposant que le taux sans risque est de 10 % en base annuelle, la valeur de l'investissement (en milliers de dollars US) est :

$$-100 - 20\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0{,}25} - 20\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0{,}5} - 20\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0{,}75} + 300\times 0{,}644\times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 17{,}729$$

Cela suppose que toute incertitude à propos de la quantité supplémentaire qui résulte de l'investissement a un risque systématique nul et qu'il n'y a pas de corrélation entre la quantité de bétail qui sera disponible à la vente et le prix.

Un processus de retour à la moyenne

Comme nous l'avons déjà mentionné, la plupart des prix de matières premières suivent des processus avec un retour à la moyenne. Ils tendent donc à osciller autour d'une valeur centrale. Un processus risque-neutre plus réaliste que celui de l'équation (35.1) est donné par :

$$d \ln S = [\theta(t) - a \ln S]\ dt + \sigma\, dz \tag{35.2}$$

Il a la même forme que le processus log-normal de taux court du chapitre 32. Ce processus s'écrit aussi :

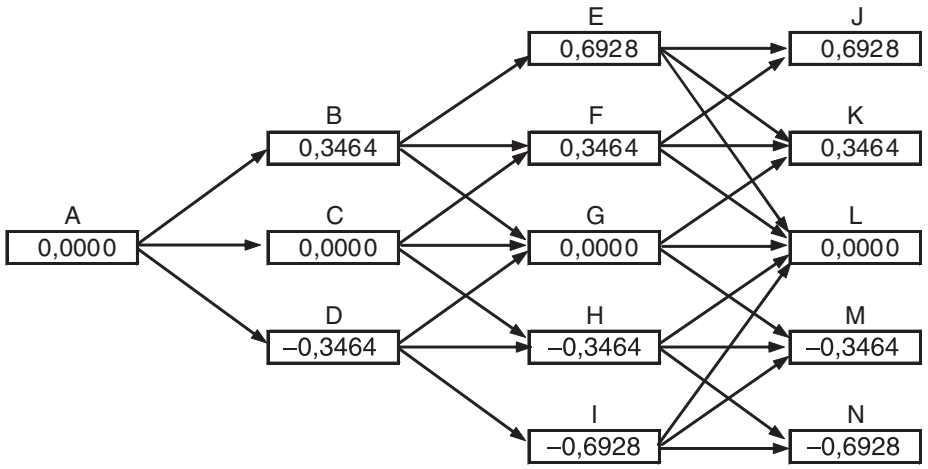
$$\frac{dS}{S} = [\theta^*(t) - a \ln S]\ dt + \sigma\, dz$$

En effet, par le lemme d'Itô, on sait que ce processus est équivalent à celui de l'équation (35.2), quand $\theta^*(t) = \theta(t) + \sigma^2/2$.

La méthode des arbres trinomiaux décrite à la section 31.7 peut être adaptée pour construire l'arbre d'évolution de S et déterminer la valeur de $\theta(t)$ de l'équation (34.2), telle que $F(t) = \hat{E}\,[S(t)]$. Nous allons illustrer cette procédure en construisant un arbre à trois périodes pour le prix d'une matière première. Supposons que le prix spot soit de 20 $ et que les prix futures à un, deux et trois ans soient respectivement 22 $, 23 $ et 24 $. Supposons aussi que $a = 0{,}1$ et $\sigma = 0{,}2$ dans l'équation (34.2). Définissons tout d'abord la variable X valant initialement 0 et gouvernée par le processus suivant :

$$dX = -aX dt + \sigma\, dz \tag{35.3}$$

En utilisant la procédure exposée à la section 32.5, on peut construire l'arbre trinomial de X. Celui-ci est décrit dans le graphique 35.1.



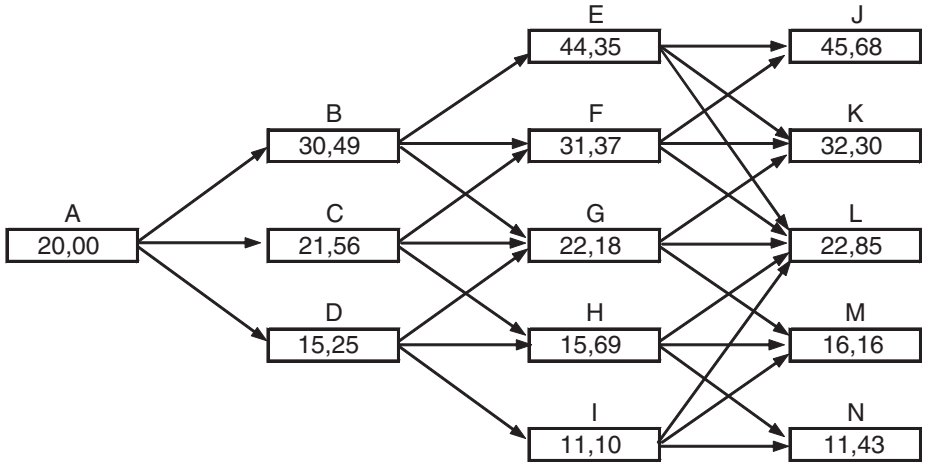
Graphique 35.1 : Arbre de X. La construction de cet arbre est la première étape pour obtenir l'arbre des prix spot de la matière première considérée. Ici p_u, p_m et p_d sont les probabilités respectives d'états « up » « mid » et « down » à partir d'un nœud donné.

La variable $\ln S$ suit le même processus que X, à ceci près que son terme de tendance dépend du temps. Comme à la section 32.5, on peut transformer l'arbre de X en un arbre correspondant pour $\ln S$ en modifiant la valeur des nœuds. Cet arbre est représenté dans le graphique 35.2. Le nœud initial correspond à un prix de 20 $, ce qui implique

une variation pour ce nœud égale à $\ln(20)$. Supposons que la modification à la date 1 soit égale à α_1 ; les valeurs de X sur les trois nœuds à cette même date sont +0,3464 ; 0 ; $-0{,}3464$. Par conséquent, les valeurs de $\ln S$ sont alors $+0{,}3464+\alpha_1$; α_1 ; $-0{,}3464+\alpha_1$. Les valeurs de S sont donc $\mathrm{e}^{0{,}3464+\alpha_1}$; e^{α_1} ; $\mathrm{e}^{-0{,}3464+\alpha_1}$. Nous imposons que la moyenne des valeurs de S en date 1 soit égale au prix futures. Cela suppose :

$$0{,}1667 \times \mathrm{e}^{0{,}3464+\alpha_1} + 0{,}6666 \times \mathrm{e}^{\alpha_1} + 0{,}1667\,\mathrm{e}^{-0{,}3464+\alpha_1} = 22$$

La solution de cette équation est $\alpha_1 = 3{,}071$. Les valeurs numériques de S sont alors 30,49 $; 21,56 $ et 15,25 $.



Graphique 35.2 : Arbre du prix spot de la matière première. Ici p_u, p_m et p_d sont les probabilités respectives d'états « up » « mid » et « down » à partir d'un nœud donné.

À l'horizon de deux ans, on calcule d'abord les probabilités affectées aux nœuds E, F, G, H et I, accessibles à partir des nœuds B, C et D. La probabilité d'atteindre F est celle d'atteindre B multipliée par celle de passer de B à F, plus la probabilité d'atteindre C multipliée par celle de passer de C à F. On peut, de ce fait, écrire :

$$0{,}1667 \times 0{,}6566 + 0{,}6666 \times 0{,}1667 = 0{,}2206$$

Les probabilités d'arriver en E, G, H et I sont donc respectivement 0,0203 ; 0,5183 ; 0,2206 et 0,0203.

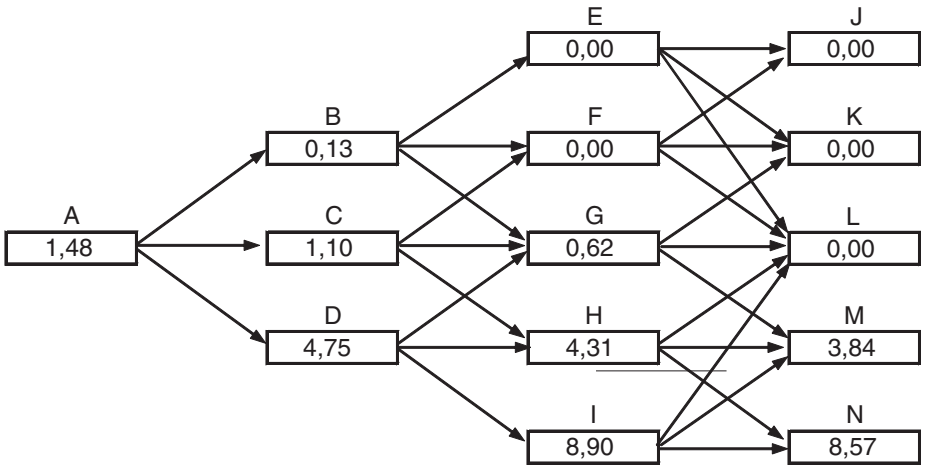
Le montant α_2 dont on doit modifier les valeurs de X pour obtenir celles de $\ln S$ vérifie :

$$\begin{aligned} 0{,}0203 \times \mathrm{e}^{0{,}6928+\alpha_2} &+ 0{,}2206 \times \mathrm{e}^{0{,}3464+\alpha_2} + 0{,}5183 \times \mathrm{e}^{\alpha_2} \\ &+ \ 0{,}2206 \times \mathrm{e}^{-0{,}3464+\alpha_2} + 0{,}0203 \times \mathrm{e}^{-0{,}6928+\alpha_2} = 23 \end{aligned}$$

La solution est ici α_2 = 3,099. Ce résultat implique que les prix possibles en date 2 sont respectivement 44,35 $; 31,37 $; 22,18 $; 15,69 $ et 11,10 $. Un calcul analogue peut être effectué à la date suivante. Le graphique 35.2 montre l'arbre du processus S qui résulte de cette démarche.

■ **Exemple 35.3** Supposons que l'arbre du graphique 35.2 soit utilisé pour évaluer un put américain à trois ans sur la matière première considérée avec un prix d'exercice

de 20 $, quand le taux sans risque continu est de 3 %. En procédant par induction arrière de la manière habituelle, on obtient le graphique 35.3 conduisant à une valeur de l'option de 1,48 $. L'option est exercée prématurément aux nœuds D, H, I. Pour obtenir une valeur plus précise, on utiliserait bien sûr un arbre avec un nombre de pas bien plus grand. Une interpolation serait utilisée pour obtenir les prix futures pour les maturités correspondant aux différentes dates de l'arbre.



Graphique 35.3 : Évaluation d'un put américain de prix d'exercice 20 $ sur le sous-jacent du graphique 35.2

Interpolation et saisonnalité

Quand on utilise un grand nombre de pas dans l'arborescence, il est nécessaire d'interpoler les prix futures pour obtenir un prix à chaque date de l'arbre. Quand la série comporte un caractère saisonnier, l'interpolation doit en tenir compte. Considérons un arbre avec des pas mensuels. Un moyen simple d'incorporer la saisonnalité consiste à collecter des données mensuelles sur le sous-jacent et à calculer la moyenne sur douze mois, de façon à définir un facteur saisonnier en pourcentage. On l'évalue comme la moyenne du ratio du prix spot sur un mois donné, rapporté à la moyenne mobile sur douze mois du prix spot (approximativement centrée sur le mois considéré). Ces coefficients sont alors utilisés pour désaisonnaliser les prix futures, qui sont ensuite intégrés dans les interpolations de façon à construire l'arbre de prix nécessaire à l'évaluation.

Illustrons cette approche par un exemple, en supposant que deux prix futures pour septembre et décembre soient respectivement 40 et 44. Nous souhaitons les interpoler pour octobre et novembre. Les coefficients saisonniers pour les mois de septembre à décembre sont respectivement 0,95 ; 0,85 ; 0,8 et 1,1. Les prix futures désaisonnalisés sont alors 40/0,95 = 42,1 pour septembre et 44/1,1 = 40 pour décembre. Les prix futures désaisonnalisés pour octobre et novembre sont 41,4 pour octobre et 40,7 pour novembre. Il suffit alors de multiplier ces prix par les coefficients saisonniers de ces mois pour retrouver l'estimation des prix futures, c'est-à-dire $41{,}4 \times 0{,}85 = 35{,}2$ pour octobre et $40{,}7 \times 0{,}8 = 32{,}6$ pour novembre.

Comme nous l'avons mentionné, la volatilité du prix d'une matière première peut aussi être saisonnière. Les prix de certaines matières premières agricoles sont plus volatils avant la récolte, du fait des incertitudes climatiques. On peut aussi modéliser la volatilité en tenant compte de ce phénomène, comme nous l'avons montré au chapitre 23. On remplace alors σ par $\sigma(t)$ dans les équations (35.2) et (35.3). Les notes techniques n° 9 et n° 16 sur le site www.pearson.fr décrivent une procédure permettant de construire l'arbre d'évaluation quand la volatilité dépend du temps.

Les sauts dans les processus de prix

Certaines matières premières comme l'électricité ou le gaz naturel montrent des sauts dans leurs processus de prix, à cause d'événements climatiques qui accroissent brutalement la demande. D'autres matières premières (notamment agricoles, mais pas seulement) voient leurs prix bondir à cause de chocs d'offre consécutifs à des événements climatiques ou géopolitiques. Des sauts peuvent être introduits dans l'équation (35.2) sous la forme suivante :

$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S]\ dt + \sigma\, dz + dp$$

où p est un processus de Poisson. C'est ici la même idée que celle du modèle de diffusion à sauts de Merton pour modéliser les prix des actions à la section 27.1. Lorsque la fréquence et l'amplitude des sauts ont été choisies, l'accroissement moyen du prix peut être calculé. Pour déterminer $\theta(t)$, un arbre trinomial est construit avec des prix futures pour la maturité t, qui sont réduits du montant de cet accroissement de prix. La simulation de Monte Carlo peut alors être utilisée pour mettre en œuvre le modèle, comme nous l'avons expliqué aux sections 21.6 et 27.1.

Des modèles alternatifs

Des approches plus sophistiquées peuvent être pertinentes pour modéliser les prix du pétrole. Si y désigne le rendement d'opportunité (*convenience yield*), le drift proportionnel du prix spot vaut $r - y$, où r est le taux court sans risque. Le processus de prix spot est alors supposé de la forme :

$$\frac{dS}{S} = (r - y)\, dt + \sigma_1\, dz_1$$

Gibson et Schwartz suggèrent que le rendement d'opportunité devrait être modélisé avec un retour à la moyenne sous la forme [2] :

$$dy = k\,(\alpha - y)\, dt + \sigma_2\, dz_2$$

où k et α sont des constantes et z_2 est un processus de Wiener corrélé à z_1. Pour procéder à un ajustement exact des prix futures, il faut faire dépendre α du temps.

2. R. Gibson et E. S. Schwartz, "Stochastic Convergence Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims", *Journal of Finance*, 45, 1990, 959-976.

Eydeland et Geman proposent un modèle à volatilité stochastique pour les prix du gaz et de l'électricité, défini comme suit [3] :

$$\frac{dS}{S} = a\,(b - \ln\,S)\,dt + \sqrt{V}\,dz_1$$

$$dV = c\,(d - V)\,dt + e\,\sqrt{V}\,dz_2$$

où a, b, c, d et e sont des constantes. z_1 et z_2 sont des processus de Wiener corrélés. Geman a ensuite proposé un processus de prix du même type pour le pétrole, mais avec un paramètre de retour à la moyenne b stochastique [4].

35.5 Les dérivés climatiques

De nombreuses entreprises ont des résultats qui peuvent être influencés négativement par les conditions climatiques [5]. Il peut s'avérer judicieux pour elles d'envisager de couvrir leur risque climatique, de la même manière qu'elles couvrent le risque de change ou de taux d'intérêt. Le thème du changement climatique, évoqué de plus en plus souvent par les médias, comme la canicule de l'été 2003 en Europe, renforcent encore cet argument.

Les premiers dérivés climatiques ont été négociés de gré à gré à partir de 1997. Considérons le cas des dérivés sur températures. Pour comprendre comment ils fonctionnent, deux variables doivent être définies :

HDD : degrés-jour de chauffage (*heating degree days*) ;

CDD : degrés-jour de climatisation (*cooling degree days*).

Le HDD d'un jour donné est défini par :

$$\text{HDD} = \max\,(0\,;65 - A)$$

et le CDD correspondant s'écrit :

$$\text{CDD} = \max\,(A - 65\,;0)$$

où A est la moyenne des températures minimale et maximale du jour considéré, mesurées dans une station météo, en degrés Fahrenheit. Par exemple, si la température maximale du jour (de minuit à minuit) est 68° Fahrenheit et la température minimale 44° Fahrenheit, on a A = 56. Le HDD du jour est alors égal à 9 et le CDD est nul.

Un dérivé climatique classique est un contrat forward ou une option dont les paiements dépendent des HDD ou CDD cumulés sur une période donnée. Par exemple, un courtier pouvait vendre, en janvier 2011, une option d'achat sur le HDD cumulé de février 2012

3. A. Eydeland et H. Geman, "Pricing Power Derivatives", *RISK*, octobre 1998, 71-73.

4. H. Geman, "Scarcity and price Volatility in Oil Markets", EDF Trading Technical report, 2000.

5. Le Département de l'énergie américain a estimé qu'environ un septième de l'économie aux États-Unis était exposé au risque climatique.

à la station météo de l'aéroport de Chicago-O'Hare. Le prix d'exercice est de 700 et le paiement de 10 000 $ par degré-jour. Si la valeur cumulée réelle est de 820, le paiement est de 1,2 million de dollars US. Souvent, les contrats contiennent une clause de paiement maximal. Si, dans notre exemple, ce paiement est de 1,5 million de dollars US, le contrat est équivalent à un écart vertical haussier (bull spread, voir chapitre 12). Le client détient un portefeuille constitué d'un achat de call sur HDD cumulés avec un prix d'exercice de 700 et un call vendu avec un prix d'exercice de 850.

Le HDD journalier est une mesure du volume journalier nécessaire pour le chauffage. La plupart des dérivés climatiques sont utilisés par les producteurs d'énergie et les consommateurs industriels. Mais la grande distribution, l'industrie agroalimentaire, les agriculteurs et les firmes de l'industrie des loisirs sont aussi des utilisateurs potentiels de dérivés climatiques. La Weather Risk Management Association (www.wrma.org) a été créée pour servir les intérêts de l'industrie de la gestion des risques climatiques.

En septembre 1999, le Chicago Mercantile Exchange (CME) a commencé à proposer des futures et des options européennes sur contrats futures climatiques. Les contrats portent sur des HDD et CDD cumulés sur un mois donné et mesurés dans une station météo spécifiée. Le dénouement des contrats s'effectue en cash juste après la fin du mois, dès que les HDD et CDD sont connus. Un contrat futures porte sur 20 $ fois le HDD ou CDD cumulé. Le CME Group propose également des contrats futures et des options climatiques pour quarante-deux villes à travers le monde ainsi que des contrats sur les ouragans, les chutes de neige et le gel.

35.6 Les dérivés assuranciels

Quand les actifs dérivés sont utilisés dans un but de couverture, ils présentent de nombreux points communs avec des contrats d'assurance. Les deux types de couvertures sont destinés à fournir une protection contre des événements défavorables. Il n'est donc pas surprenant de constater que des filiales de compagnies d'assurance opèrent sur des marchés d'actifs dérivés et que de nombreuses activités de ces compagnies d'assurance se rapprochent de celles des banques d'investissement.

Traditionnellement, les compagnies d'assurances couvrent leurs risques catastrophiques (CAT), tels que ceux liés aux tornades, ouragans ou tremblements de terre, par l'intermédiaire de contrats de réassurance. Ces contrats peuvent prendre des formes diverses. Supposons par exemple qu'une compagnie ait une exposition aux tremblements de terre en Californie se montant à 100 millions et qu'elle souhaite réduire cette exposition à 30 millions. Une première solution consiste à contracter avec un réassureur sur une base proportionnelle correspondant à 70 % de l'exposition globale. Si, durant une année donnée, la sinistralité d'origine sismique s'élève à 50 millions, la compagnie supporte seulement 15 millions, soit 30 % du total. Une autre possibilité de couverture moins onéreuse, en ce qui concerne les primes payées, consiste à acheter une série de contrats de réassurance en couches superposées. Le premier fournit une indemnisation pour les sinistres entre 30 et 40 millions, le suivant couvre les sinistres entre 40 et 50 millions, et ainsi de suite. Chaque contrat est appelé contrat en excédent de sinistre. Le réassureur a en fait vendu un écart vertical haussier (bull spread) sur les pertes totales. Il a

acheté un call avec un prix d'exercice qui est la borne inférieure de la couche considérée, et vendu un call dont le prix d'exercice est la borne supérieure de cette couche [6].

Les principaux fournisseurs de réassurance de type CAT ont traditionnellement été les compagnies de réassurance et les groupements Lloyds (qui sont en fait des groupements d'individus fortunés aux responsabilités non limitées). Dans les années qui viennent de s'écouler, les compagnies d'assurances ont constaté que les besoins de réassurance dépassaient ce qui pouvait être proposé par les moyens classiques. De nouvelles possibilités ont donc été envisagées, en particulier par le biais des marchés financiers. Une des causes de cette remise en question fut l'ouragan Andrew qui, en 1992, causa 15 milliards de dollars US de dégâts (assurés) en Floride. Le coût de cette catastrophe excédait le montant cumulé des primes encaissées dans cette région pendant les sept années précédentes. On estime que si la ville de Miami avait été touchée, les dégâts assurés auraient dépassé les 40 milliards de dollars US. Cette catastrophe, ainsi que d'autres, a entraîné une hausse des primes d'assurance et de réassurance.

Les marchés de gré à gré ont proposé de nombreux produits qui sont autant d'alternatives à la réassurance classique. Le plus courant d'entre eux est l'obligation « catastrophique » (CAT bond). Il s'agit d'une obligation, émise par la filiale d'une compagnie d'assurances, payant un taux d'intérêt supérieur au taux usuel du marché. En contrepartie de cette rémunération complémentaire, le détenteur de l'obligation s'engage à fournir de la réassurance en excédent de sinistre. Selon les clauses de l'obligation CAT, les intérêts et/ou le principal peuvent servir à indemniser les sinistres. Dans l'exemple considéré précédemment, dans lequel une compagnie souhaitait couvrir les pertes consécutives à un séisme en Californie (considérons ici la tranche 30 à 40 millions), la compagnie émet 10 millions d'obligations CAT. Dans le cas où les pertes liées aux sinistres dépassent 30 millions, les obligataires perdent tout ou partie du principal. Une autre solution consisterait, pour la compagnie, à émettre un montant beaucoup plus élevé d'obligations en faisant porter la clause « CAT » sur les seuls intérêts.

35.7 Évaluation des dérivés climatiques et assuranciels

Une particularité des dérivés climatiques et assuranciels est que leurs payoffs ne contiennent pas de risque systématique. Leur risque total peut donc être diversifié dans le cadre d'un portefeuille important. Cela signifie aussi que les estimations réalisées à partir de données historiques (approche actuarielle) s'appliquent dans l'univers risque-neutre. On peut, par conséquent, évaluer ces actifs dérivés comme suit :

1. Estimer les paiements terminaux espérés dans l'univers réel en utilisant les données historiques ;
2. Actualiser ceux-ci au taux sans risque.

6. La réassurance peut aussi prendre la forme d'une somme fixe versée si le sinistre dépasse un seuil fixé. Le réassureur est alors vendeur d'une option d'achat digitale sur les pertes totales.

Une autre caractéristique de ces produits est le lien entre temps et incertitude. Pour un prix d'action, l'incertitude croît approximativement comme la racine carrée du temps. La volatilité du logarithme du prix sur quatre ans est environ le double de la volatilité correspondante sur un an. Pour une matière première, bien que le phénomène de retour à la moyenne entre en jeu, la volatilité sur quatre ans reste bien plus forte que celle sur un an. Pour les dérivés climatiques, ce n'est pas le cas. L'incertitude du HDD de février dans quatre ans à un endroit donné n'est pas beaucoup plus grande que celle du HDD de février dans un an au même endroit. Il en est de même pour l'incertitude sur les pertes liées à un tremblement de terre.

Considérons l'évaluation d'une option sur HDD cumulé. On peut collecter cinquante années de données historiques pour estimer la distribution de probabilité du HDD et l'ajuster à une distribution connue comme une loi log-normale ou autre, et ensuite calculer le payoff espéré de l'option. Il suffit alors d'actualiser ce dernier au taux sans risque pour obtenir la valeur de l'option. Cette approche peut éventuellement être affinée en tenant compte d'une tendance à long terme dans les séries chronologiques de températures.

■ **Exemple 35.4** Considérons une option sur HDD cumulé en février 2016, mesuré à la station météo de l'aéroport international Chicago O'Hare. Le prix d'exercice est de 700 et le payoff de 10 000 $ par degré-jour. Supposons que le HDD soit estimé à partir de données historiques et ajusté à une loi log-normale de moyenne 710, l'écart-type du logarithme de cette variable étant 0,07. De l'équation (15A.1), on déduit le payoff espéré :

$$10\,000 \times [710N(d_1) - 700N(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(710/700) + 0{,}07^2/2}{0{,}07} = 0{,}2376$$

$$d_2 = \frac{\ln(710/700) - 0{,}07^2/2}{0{,}07} = 0{,}1676$$

On aboutit à un payoff espéré de 250 900 $. Si le taux sans risque est de 3 % et que l'option est évaluée en février 2018 (un an de durée de vie), la valeur de l'option est donnée par :

$$250\,900 \times \mathrm{e}^{-0{,}03\times 1} = 243\,400\ \$$$

Nous pourrions souhaiter ajuster la distribution de probabilité pour tenir compte de la tendance à long terme. Supposons qu'une régression linéaire montre que le HDD cumulé pour février décroît de 0,5 par an (peut-être à cause du réchauffement climatique), de sorte que l'estimation du HDD moyen pour février 2019 n'est que de 697. En gardant la volatilité au même niveau, cela ramènerait le payoff espéré à 180 400 $ et la valeur de l'option à 175 100 $.

Dans le domaine de l'assurance, Litzenberger *et al.* ont montré (ce à quoi on pouvait s'attendre) qu'il n'y a pas de corrélation significative entre les rentabilités des obligations CAT et celles du marché des actions [7]. Ce résultat confirme que ces titres ne portent pas

7. Voir R. H. Litzenberger, D. R. Beaglehole et E .C. Reynolds, "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class", *Journal of Portfolio Management*, hiver 1996, 76-86.

de risque systématique et que leur évaluation peut être réalisée par l'approche actuarielle à l'aide des données historiques collectées par les compagnies d'assurance.

Les obligations CAT ont typiquement une distribution de rentabilité asymétrique avec une forte probabilité d'obtenir une rentabilité légèrement supérieure à la normale et une faible probabilité de réaliser une rentabilité très largement négative. On peut alors se demander pourquoi les investisseurs sont attirés par ces actifs. La réponse est simplement que la rentabilité espérée est supérieure au taux sans risque, alors que le risque de ces instruments peut être complètement diversifié. Par conséquent, ces obligations sont de nature à améliorer le trade-off rentabilité-risque.

35.8 Comment un producteur d'énergie couvre-t-il son risque ?

Un producteur d'énergie est confronté à deux types de risques : le premier est le risque de prix, le second le risque de volume. Quoique les prix s'ajustent aux volumes produits, la relation entre les deux variables n'est pas parfaite ; par conséquent, les producteurs d'énergie doivent tenir compte de ces deux composantes lorsqu'ils élaborent une stratégie de couverture. Le risque de prix peut être couvert grâce aux actifs dérivés décrits dans cette section. Le risque de volume peut être couvert avec les dérivés climatiques présentés dans la section précédente.

Adoptons les notations suivantes :

Y : profit mensuel ;

P : prix moyen mensuel de l'énergie ;

T : température mensuelle pertinente (HDD ou CDD).

Un producteur d'énergie peut utiliser des données historiques pour obtenir l'ajustement optimal par les moindres carrés, sous la forme :

$$Y = a + bP + cT + \varepsilon$$

où ε est le terme d'erreur. Le producteur couvrira alors ses risques pour le mois courant en prenant une position $-b$ sur des contrats forward ou futures d'énergie, et une position $-c$ sur des contrats forward ou futures climatiques. Cette relation peut aussi être utilisée pour analyser l'efficacité de stratégies optionnelles alternatives.

Résumé

Ce chapitre a montré que, dans le domaine de la gestion des risques, les marchés d'actifs dérivés ont été très innovants pour répondre aux besoins des différents intervenants.

Une large gamme d'actifs dérivés sur matières premières est aujourd'hui échangée dans le monde. Les sous-jacents sont aussi bien des matières premières agricoles que des métaux ou des sources d'énergie. Les modèles de prix de ces actifs incluent le plus souvent une tendance au retour à la moyenne. La saisonnalité et les sauts peuvent aussi être introduits dans la modélisation. Les dérivés portant sur des ressources telles que pétrole,

gaz naturel ou électricité font l'objet d'une modélisation au moins aussi sophistiquée que celle ayant trait aux actions, taux de change ou taux d'intérêt.

Sur le marché des dérivés climatiques, deux mesures, HDD et CDD, ont été élaborées pour décrire l'évolution des températures pendant un mois donné. Elles sont utilisées pour définir les paiements terminaux d'actifs dérivés, aussi bien sur les marchés organisés que sur les marchés de gré à gré. Il ne fait aucun doute que le développement des marchés de dérivés climatiques sera accompagné de la création de nouveaux produits, sur les précipitations, les chutes de neige, ainsi que sur d'autres variables climatiques.

Quant aux dérivés assuranciels, ils émergent comme une alternative aux produits classiques d'assurance et de réassurance pour gérer les risques de catastrophe naturelle comme les cyclones ou les tremblements de terre. Nous verrons certainement apparaître d'autres types d'assurance (assurance-vie ou automobile) titrisés de la même façon, à mesure que le marché se développera.

Les actifs dérivés assuranciels, climatiques ou d'énergie ont pour caractéristique de présenter une corrélation négligeable avec la rentabilité du marché. On peut donc utiliser l'approche actuarielle pour les évaluer. Cette démarche suppose l'emploi de données historiques pour calculer les paiements espérés et une actualisation de ceux-ci au taux sans risque.

Références complémentaires

Sur les dérivés de matières premières

Clewlow L. et C. Strickland, *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima Group, 2000.

Edwards D. W., *Energy, Trading, and Investing: Trading, Risk Management and Structuring Deals in the Energy Markets*. New York, Mc Graw-Hill, 2010.

Eydeland A. et K. Wolyniec *Energy and Power Risk Management*, Wiley, Hoboken, NJ, 2003.

Geman H., *Commodities and Commodity Derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals, and Energy*, Wiley, Chichester, 2005.

Gibson R. et E. S. Schwartz, "Stochastic Convergence Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims", *Journal of Finance*, 45, 1990, 959-976.

Schofield, N. C., *Commodity Derivatives : Markets and Applications*, Wiley, Chichester, 2011.

Sur les dérivés climatiques

Alexandridis A. K. et A. D. Zapranis, *Weather Derivatives : Modeling and Pricing Weather Related Risk*, New York, Springer, 2013.

Cao M. et J. Wei, "Weather Derivatives Valuation and the Market Price of Weather Derivatives", *Journal of Futures Markets*, 24 (11), novembre 2004, 1065-1089.

Sur les dérivés d'énergie

Clewlow L. et C. Strickland, *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*, Lacima Group, 2000.

Eydeland A. et H. Geman, "Pricing Power Derivatives", *RISK*, octobre 1998, 71-73.

Joskow P., "Electricity Sectors in Transition", *The Energy Journal*, 19, 1998, 25-52.

KENDALL R., "Crude Oil: Price Schocking", *RISK, Supplement on Commodity Risk*, mai 1999, p. 6.

Sur les dérivés d'assurance

CANTER M. S., J. B. COLE et R. L. SANDOR, "Insurance Derivatives: A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry", *Journal of Applied Corporate Finance*, automne 1997, 69-83.

FROOT K. A., "The Market for Catastrophe Risk: A Clinical Examination", *Journal of Financial Economics*, 60, 2001, 529-71.

LITZENBERGER R. H., D. R. BEAGLEHOLE et E. C. REYNOLDS, "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class", *Journal of Portfolio Management*, hiver 1996, 76-86.

Problèmes et exercices

35.1 Qu'entend-on par HDD et CDD ?

35.2 Donnez un exemple type de contrat à terme sur le gaz naturel.

35.3 Quelles sont les différences entre approche actuarielle et évaluation risque-neutre ? Dans quels cas les deux démarches donnent-elles les mêmes résultats ?

35.4 Supposez que, pour chaque jour du mois de juillet, la température minimale soit de 68° Fahrenheit et que le maximum soit de 82° Fahrenheit. Quel est le paiement terminal d'une option d'achat sur CDD cumulés avec un prix d'exercice de 250 et un paiement de 5 000 $ par degré-jour ?

35.5 Pourquoi le prix de l'électricité est-il plus volatil que celui des autres sources d'énergie ?

35.6 Pourquoi l'approche fondée sur les données historiques est-elle valide pour évaluer un dérivé climatique ou une obligation CAT ?

35.7 Expliquez la phrase suivante : « Les HDD et CDD pour un jour donné peuvent être vus comme des payoffs d'options sur la température. »

35.8 Supposez que vous disposiez de cinquante années de relevés de température. Expliquez avec précision les analyses que vous mettriez en œuvre pour évaluer un contrat forward sur CDD cumulés pour un mois donné.

35.9 Pensez-vous que la volatilité du prix forward d'un contrat à 1 an sur le pétrole est plus élevée ou plus faible que la volatilité du prix spot ? Justifiez votre réponse.

35.10 Quelles sont les caractéristiques d'une source d'énergie dont le prix a une volatilité et un coefficient de retour à la moyenne élevés ? Donnez un exemple d'une telle source d'énergie.

35.11 Comment un producteur d'énergie peut-il utiliser les marchés d'actifs dérivés pour couvrir ses risques ?

35.12 Expliquez comment fonctionne une option 5×8 pour mai 2018 sur l'électricité, avec un exercice journalier. Et lorsque l'exercice est mensuel ? Lequel de ces deux contrats a la plus grande valeur ?

35.13 Expliquez comment fonctionne une obligation CAT.

35.14 Soit deux obligations ayant le même coupon, la même durée de vie et le même prix ; la première est une obligation de rating B, émise par une entreprise, alors que la seconde est une obligation CAT. Une analyse des données historiques

montre que les pertes annuelles espérées sur les deux obligations sont identiques tout au long de leur durée de vie. Laquelle des deux conseilleriez-vous à un gérant de fonds ?

35.15 Soit une matière première dont le prix a une volatilité constante, σ, et un taux de croissance espéré qui est uniquement fonction du temps. Montrez que, dans l'univers risque-neutre habituel, on a :

$$\ln(S_T) \approx \phi\left(\ln(F(T)) - \frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma\sqrt{T}\right)$$

où S_T est le prix de cette matière première en T, $F(t)$ est le prix futures en date 0 d'un contrat d'échéance t, et $\phi(m,v)$ est une distribution normale de moyenne m et d'écart-type v.

Questions complémentaires

35.15 Les sinistres indemnisés par une compagnie d'assurances pour une police donnée sont approximativement distribués selon une loi gaussienne d'espérance 150 millions et d'écart-type 50 millions (on suppose que ces données sont identiques dans les univers réel et risque-neutre). Le taux sans risque annuel est de 5 %. Quel est le coût des contrats suivants ?

a. Un contrat qui paie 60 % des pertes annuelles sur une base proportionnelle.

b. Un contrat qui paie 100 millions sur l'année si les pertes dépassent 200 millions.

35.16 Comment l'arbre du graphique 35.2 est-il modifié si les prix futures à un et deux ans sont respectivement 21 $ et 22 $ au lieu de 22 $ et 23 $? Comment cela affecte-t-il l'évaluation de l'option de l'exemple 35.3 ?

Chapitre 36
Les options réelles

Jusqu'à présent, nous avons le plus souvent fait référence à l'évaluation de produits dérivés dont le sous-jacent est un actif financier. Nous analysons maintenant comment les idées développées jusqu'ici peuvent être étendues à l'évaluation d'investissements en actifs réels. Ces actifs comprennent les terrains, les bâtiments, les usines, etc. Bien souvent, ces investissements comportent des options, explicites ou non. On parle alors d'« options réelles ». Une méthode spécifique est nécessaire pour les évaluer car les prix de marché ne sont, en général, pas disponibles.

Ce chapitre débute par le rappel de l'approche traditionnelle en matière d'évaluation des investissements en actifs réels et en décrit les limites. Nous expliquons comment les principes d'évaluation risque-neutre peuvent être étendus à l'évaluation d'investissements en actifs réels. Nous décrivons enfin les options incluses dans lesdits actifs et exposons comment l'approche risque-neutre peut faciliter l'évaluation de telles options.

36.1 L'évaluation des investissements

Le critère usuel d'évaluation des projets d'investissement est la valeur actuelle nette ou VAN. La VAN d'un projet est égale à la somme des flux futurs espérés et actualisés, que ces flux soient positifs ou négatifs. Le taux d'actualisation retenu est ajusté pour tenir compte du risque du projet. À titre d'exemple, considérons un investissement de 100 millions d'euros dont la durée de vie est de 5 ans. Les cash-flows futurs espérés sont estimés à 25 millions annuels. Si le taux ajusté pour le risque (continu) est de 12 %, la VAN du projet (en millions) s'écrit :

$$-100 + 25\,\mathrm{e}^{-0,12\times 1} + 25\,\mathrm{e}^{-0,12\times 2} + 25\,\mathrm{e}^{-0,12\times 3} + 25\,\mathrm{e}^{-0,12\times 4} + 25\,\mathrm{e}^{-0,12\times 5} = -11,53$$

Une VAN négative, comme celle qui vient d'être calculée, indique que le projet réduira la valeur de la firme s'il est entrepris ; il devrait donc être abandonné. À l'inverse, une VAN positive signifie que le projet peut accroître la richesse des actionnaires.

Le taux d'actualisation ajusté au risque, retenu dans le calcul, devrait être celui qui est exigé par l'entreprise ou les actionnaires de celle-ci pour cet investissement. Il peut être

évalué de différentes manières. Une approche souvent recommandée consiste à utiliser le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF ou CAPM exposé à l'annexe du chapitre 3), en suivant ces étapes :

1. Sélectionner un échantillon de firmes dont l'activité est proche de celle qui est envisagée dans le projet ;
2. Calculer les bêtas de ces entreprises et en faire une moyenne pour obtenir un proxy du bêta du projet ;
3. Déterminer les taux d'actualisation en multipliant le bêta obtenu par le rendement du portefeuille de marché en excès du taux sans risque, et en ajoutant au résultat obtenu le taux sans risque.

Un des problèmes inhérents à cette démarche usuelle est lié à l'existence d'options incluses dans les projets d'investissement. Considérons par exemple une entreprise qui envisage la construction d'une usine pour la production d'un nouveau produit. Souvent, l'entreprise a l'option d'abandonner le projet si les affaires n'évoluent pas comme prévu. Elle a aussi la possibilité d'étendre l'unité de production si la demande est, au contraire, supérieure aux prévisions. En général, ces options ont des caractéristiques spécifiques en termes de risques, différentes de celles du projet de base, requérant l'utilisation d'un taux d'actualisation distinct.

Pour comprendre le problème posé ici, revenons à l'exemple donné au début du chapitre 13. Il s'agissait d'une action au prix de 20 €. Trois mois plus tard, ce prix pouvait passer à 22 € ou 18 €. L'évaluation risque-neutre d'une option à 3 mois avec un prix d'exercice de 21 € était de 0,545 €. La note de bas de page n° 1 du chapitre 13 montrait que, si le taux de rentabilité requis sur l'action dans l'univers réel est de 10 %, le taux correspondant sur l'option d'achat est de 55,96 %. Une analyse semblable sur un put montre que le taux de rentabilité exigé est de −70,4 %.

En pratique, il serait très délicat d'estimer ces taux de rentabilité pour évaluer les options (nous connaissons ces taux parce que nous disposons d'une méthode alternative d'évaluation des options). Le même raisonnement s'applique aux options réelles. Il n'y a pas de moyen simple pour estimer les taux d'actualisation ajustés pour le risque à appliquer aux cash-flows provenant d'options d'abandon, d'extension ou autres. C'est la raison pour laquelle il est intéressant de savoir si l'évaluation risque-neutre peut être appliquée aux options réelles, comme elle l'est aux options financières.

Un autre problème lié à la VAN est l'estimation du taux d'actualisation à appliquer au projet de base (c'est-à-dire au projet hors options). Les entreprises retenues pour estimer le bêta en trois étapes (voir plus haut) disposent aussi d'options d'abandon et d'expansion. Leurs bêtas reflètent donc l'existence de ces options et ne sont pas forcément bien adaptés à l'estimation du bêta du projet de base.

36.2 Extension du modèle d'évaluation risque-neutre

Dans la section 28.1, le prix de marché du risque pour une variable θ était défini par :

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{36.1}$$

où r est le taux sans risque, μ l'espérance de rentabilité d'un actif échangé dépendant uniquement de θ, et σ la volatilité. Comme nous l'avons montré dans la section 28.1, on obtient le même prix de marché du risque indépendamment de l'actif échangé retenu, dès qu'il ne dépend que de θ.

Supposons maintenant qu'un actif réel dépende de plusieurs variables θ_1,θ_2,...,θ_n caractérisées par les processus suivants :

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i\,dt + s_i\,dz_i$$

pour $i = 1, \ldots, n$, où les z_i sont des processus de Wiener. Notons λ_i le prix de marché du risque de θ_i. On peut étendre la procédure d'évaluation risque-neutre pour montrer que tout actif dépendant des θ_i peut être évalué en :

1. Réduisant le taux de croissance espéré de chaque variable θ_i de m_i à $m_i - \lambda_i s_i$;
2. Actualisant les flux au taux sans risque [1].

■ **Exemple 36.1** Le coût de location d'immeubles de bureaux dans une ville donnée est mesuré par le prix de location annuel au mètre carré dans le cadre d'un bail commercial. Le coût actuel est de 150 € le mètre carré. Le taux de croissance espéré de ce prix est de 12 % par an, sa volatilité de 20 % et le prix de marché du risque est égal à 0,3. Une entreprise a la possibilité de payer immédiatement 200 000 € pour détenir une option de location de 20 000 mètres carrés au prix de 175 € le mètre carré pour une période de cinq ans débutant dans 2 ans. Le taux sans risque est 5 % (supposé constant). Notons V le coût unitaire de location dans deux ans et supposons, pour simplifier, que les loyers sont payés annuellement en début d'année. Le paiement terminal de l'option est de ce fait :

$$20\,000 \times A \times \max(V - 175\,;0)$$

où A est le coefficient d'actualisation défini par :

$$A = 1 + 1 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 1} + 1 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 2} + 1 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 3} + 1 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 4} = 4{,}5355$$

Le paiement espéré dans l'univers risque-neutre est alors :

$$20\,000 \times 4{,}5355 \times \hat{E}\left[\max\left(V - 175\,;0\right)\right] = 90\,710 \times \hat{E}\left[\max\left(V - 175\,;0\right)\right]$$

où $\hat{E}$ est l'opérateur d'espérance dans l'univers risque-neutre. En utilisant le résultat de l'équation (14A.1), on peut écrire :

$$= 90\,710 \times \left(\hat{E}\left[V\right] N\left(d_1\right) - 175 N(d_2)\right)$$

1. Pour voir que ceci est cohérent avec l'évaluation risque-neutre usuelle, supposons que θ_i soit le prix d'une action ne payant pas de dividende. Comme c'est le prix d'un actif échangé, l'équation (36.1) implique que $(m_i - r)/s_i = \lambda_i$, ou encore $m_i - \lambda_i s_i = r$. L'ajustement du taux de croissance espéré revient en quelque sorte à considérer que le taux de rentabilité de l'action est égal au taux sans risque. Pour un résultat général, voir la note technique n° 20 sur le site www.pearson.fr.

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left[\hat{E}\,(V)\,/175\right] + 0{,}2^2 \times 2/2}{0{,}2\sqrt{2}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left[\hat{E}\,(V)\,/175\right] - 0{,}2^2 \times 2/2}{0{,}2\sqrt{2}}$$

Le taux de croissance espéré du coût de location dans l'univers risque-neutre est $m - \lambda s$, où m est le taux de croissance dans l'univers réel, s est la volatilité, et λ le prix de marché du risque. Dans notre exemple, m = 0,2, $s = 0{,}2$ et $\lambda = 0{,}3$, ce qui donne un taux de croissance égal à 6 % dans l'univers risque-neutre. Par conséquent, on a $\hat{E}\,(V) = 150\,\mathrm{e}^{0{,}06\times 2} = 169{,}1$. En remplaçant ce résultat dans l'expression présentée ci-dessus, on aboutit à un paiement espéré de l'option égal à :

$$90\,710 \times (169{,}1 \times N(d_1) - 175N(d_2)) = 303\,000\ €$$

L'actualisation au taux sans risque donne alors $303\,000 \times \mathrm{e}^{-0{,}05\times 2} = 271\,172$ €. Cela montre que la proposition de l'option de location à 200 000 € est intéressante.

36.3 L'estimation du prix de marché du risque

Utiliser la méthode d'évaluation risque-neutre pour évaluer un investissement évite d'avoir à estimer les taux d'actualisation ajustés au risque (voir section 36.1), mais cela nécessite de connaître les prix de marché du risque pour tous les processus θ_i. Quand des données historiques sont disponibles sur une variable spécifique, le prix de marché du risque correspondant peut être estimé en utilisant le CAPM. Pour montrer comment, considérons un investissement dépendant d'une seule variable et adoptons les notations suivantes :

μ : taux de rentabilité espéré de l'actif d'investissement ;

σ : volatilité de la rentabilité de l'actif d'investissement ;

λ : prix de marché du risque de la variable sous-jacente ;

ρ : corrélation instantanée entre le taux de croissance de la variable et la rentabilité d'un indice représentatif du marché ;

μ_m : rentabilité espérée de l'indice de marché ;

σ_m : volatilité de la rentabilité de l'indice ;

r : taux sans risque (de court terme).

Comme le prix de l'actif dépend d'une seule variable, la corrélation instantanée entre la rentabilité de l'actif et celle de l'indice est aussi égale à ρ. La version continue du CAPM implique alors :

$$\mu - r = \frac{\rho\sigma}{\sigma_m}\,(\mu_m - r)$$

Par l'équation (36.1) on sait aussi que $\mu - r = \lambda\sigma$, ce qui implique :

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m}\,(\mu_m - r) \tag{36.2}$$

Cette équation peut alors être utilisée pour estimer λ.

■ **Exemple 36.2** L'analyse de l'historique des ventes d'une entreprise, trimestre par trimestre, révèle que la corrélation entre les variations de cette variable (en pourcentage) et celles de l'indice SBF250 est égale à 0,3. La volatilité historique annuelle du SBF250 est de 20 %, et l'excès de rentabilité de l'indice par rapport au taux sans risque est égal à 5 %. Le prix de marché du risque, déduit de l'équation (36.2), est alors :

$$\lambda = \frac{0{,}3}{0{,}2}\,(0{,}05) = 0{,}075$$

Quand les données historiques ne sont pas disponibles, on peut parfois recourir à une variable proxy. Par exemple, si la construction d'une unité de production est envisagée pour la fabrication d'un nouveau produit, on peut chercher à collecter des données sur les ventes de produits similaires. La corrélation entre les ventes futures du nouveau produit et l'indice de marché peut alors être assimilée à celle qui existe entre les ventes des produits choisis comme proxy et l'indice. Parfois, le coefficient ρ de l'équation (36.2) fait l'objet d'une estimation subjective. Par exemple, si un analyste est persuadé qu'une variable donnée n'est pas reliée à l'indice de marché, le prix de marché du risque de cette variable est supposé égal à zéro.

Dans certains cas, il n'est pas utile d'estimer le prix de marché du risque d'une variable, car le processus qui régit son évolution peut être estimé directement dans l'univers risque-neutre. En effet, si la variable considérée est le prix d'un actif d'investissement, sa rentabilité espérée dans l'univers risque-neutre est égale au taux sans risque. Si la variable est un taux court, nous avons montré au chapitre 32 comment le processus stochastique gouvernant cette variable pouvait être estimé à partir de la structure par termes initiale. Pour les matières premières, les prix futures peuvent être utilisés pour estimer le processus risque-neutre, comme nous l'avons vu au chapitre 35. L'exemple 35.2 donne une application simple de l'approche en termes d'options réelles en utilisant les prix futures pour évaluer un investissement dans le secteur de l'élevage.

36.4 Application à l'évaluation d'une nouvelle activité

Les méthodes d'évaluation traditionnelles comme l'application d'un multiplicateur au PER courant ne sont pas adaptées aux nouvelles activités. Classiquement, les bénéfices sont négatifs pendant les années de démarrage, c'est-à-dire pendant la phase de conquête de parts de marché et d'établissement de relations stables avec les clients. L'évaluation de l'entreprise passe par l'estimation des résultats futurs en envisageant divers scénarios.

Les cash-flows futurs dépendent d'un certain nombre de variables comme les ventes, les coûts variables (exprimés en pourcentage des ventes), les coûts fixes, etc. Des estimations ponctuelles peuvent suffire pour certaines d'entre elles. Mais pour les variables essentielles, il faut estimer le processus risque-neutre qui les gouverne, comme nous l'avons décrit dans les deux sections précédentes. Une simulation de Monte-Carlo peut être utilisée pour engendrer divers scénarios de bénéfices dans l'univers risque-neutre. Il est probable que, dans certains d'entre eux, les bénéfices seront élevés, alors que, dans d'autres, l'entreprise fera faillite et cessera de produire (la simulation doit inclure une règle déterminant la situation de faillite). La valeur de la firme est alors la valeur

actuelle des flux prévisionnels espérés, actualisés au taux sans risque. L'encadré 36.1 donne un exemple de l'application de cette approche à Amazon.com.

Encadré 36.1 L'évaluation d'Amazon.com

Schwartz et Moon ont appliqué la méthodologie risque-neutre à la start-up Internet Amazon.com à la fin de l'année 1999 [2]. Ils ont supposé que le montant des ventes R et le taux de croissance de celles-ci, μ, étaient stochastiques. Leur modèle est spécifié de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= \mu\, dt + \sigma(t)\, dz_1 \\ d\mu &= \kappa\,(\bar{\mu} - \mu)\; dt + \eta(t)\, dz_2 \end{aligned}$$

où les deux processus de Wiener sont supposés indépendants ; les paramètres $\sigma(t)$, $\eta(t)$, κ et $\bar{\mu}$ sont estimés à partir des données disponibles. Ces équations montrent que les ventes ont un taux de croissance μ qui est lui-même un processus stochastique. Celui qui gouverne μ est caractérisé par un retour vers une moyenne de long terme $\bar{\mu}$ à un rythme κ. Schwartz et Moon supposent que le coût des produits vendus représente 75 % du chiffre d'affaires, alors que les autres coûts variables se montent à 19 % du chiffre d'affaires. Les coûts fixes trimestriels sont par ailleurs évalués à 75 millions. Le niveau de départ du chiffre d'affaires trimestriel est de 356 millions de dollars US, le crédit d'impôts est évalué à 559 millions de dollars US, et le taux d'imposition est de 35 %. Le prix de marché du risque de la variable R a été estimé à partir de données historiques, selon la méthode décrite dans la section précédente. Pour μ, le prix de marché du risque est supposé nul. Il a été retenu pour la simulation un horizon de 25 ans et une valeur terminale de 10 fois le bénéfice avant impôts. La position initiale de trésorerie est de 906 millions et il est supposé que la faillite survient dès que la trésorerie devient négative. Divers scénarios ont été construits, s'appuyant sur des simulations de Monte-Carlo, et prenant en compte l'éventuelle conversion des obligations convertibles et le possible exercice des stock-options par les employés. La valeur des actions a alors été obtenue en actualisant au taux sans risque les cash-flows ainsi calculés. La valeur de marché des actions Amazon.com était de 76,125 $ à la fin de 1999 (bien qu'elle ait décliné fortement ensuite). Le prix donné par la simulation, selon les hypothèses établies plus haut, est de 12,42 $. L'avantage de l'approche par les options réelles est d'identifier les hypothèses essentielles. Cependant, Schwartz et Moon précisent qu'un changement relativement faible de la valeur de η peut entraîner une variation conséquente du cours estimé. En effet, si $\eta(0)$ est fixé à 6 % au lieu de 3 %, le cours, calculé par simulation, passe à 100 $. Il s'agit donc d'une importante source de variabilité liée à la valeur optionnelle.

36.5 Évaluation des options incluses dans une opportunité d'investissement

La plupart des projets d'investissement contiennent des options. Celles-ci peuvent augmenter considérablement la valeur d'un projet, mais elles sont le plus souvent soit ignorées, soit mal évaluées. On peut citer les exemples d'options suivants.

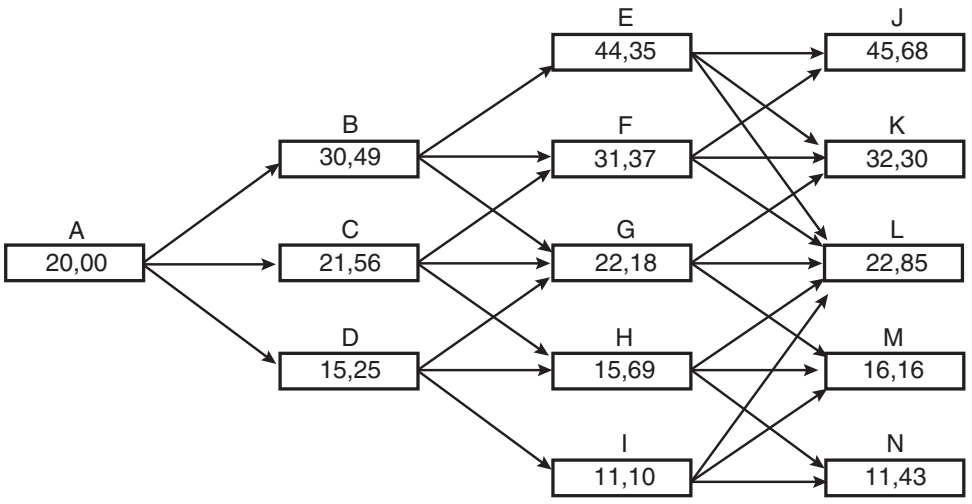
1. *L'option d'abandon* : c'est l'option de vendre ou d'arrêter un projet. Elle peut être analysée comme un put américain sur la valeur du projet. Le prix d'exercice est la valeur de liquidation (ou de revente) de laquelle il faut retrancher les coûts associés à cette liquidation. Quand la valeur de liquidation est faible, le prix d'exercice peut donc être négatif. Les options d'abandon compensent l'existence d'états de la nature dans lesquels le résultat du projet est très faible ; ces options augmentent ainsi la valeur initiale du projet d'investissement.
2. *L'option d'extension* : c'est la possibilité de réaliser des investissements supplémentaires de capacité lorsque les conditions sont favorables. Cette option s'analyse comme un call américain sur la valeur de cette capacité additionnelle. Le prix d'exercice est égal au coût de l'investissement complémentaire, actualisé à la date d'exercice de l'option. Ce prix d'exercice dépend le plus souvent de l'investissement initial ; si dès le départ, il a été décidé de construire des capacités de production supérieures à la demande attendue, le prix d'exercice de l'option d'extension peut être relativement faible.
3. *L'option de réduction* : c'est la possibilité de réduire la capacité de production du projet. C'est un put américain sur la valeur de la capacité perdue. Le prix d'exercice est la valeur actuelle des dépenses futures, ainsi économisées, actualisées à la date d'exercice de l'option.
4. *L'option de différé* : une des options les plus importantes à la disposition de l'entrepreneur est celle qui autorise le report de l'investissement. C'est un call américain sur la valeur du projet.
5. *L'option de prorogation* : dans certains cas, il est possible d'allonger la durée de vie du projet en payant un coût fixe. C'est alors un call américain sur la valeur future de l'investissement.

Exemple

À titre d'exemple d'évaluation d'un projet incluant une option, considérons une entreprise qui peut décider d'investir 15 millions de dollars US pour obtenir 6 millions d'unités d'une matière première à raison de 2 millions d'unités par an pendant trois ans. Les coûts fixes liés à l'équipement se montent à 6 millions de dollars US et les coûts variables sont de 17 $ par unité. Le taux sans risque est supposé constant, égal à 10 %, le prix spot unitaire est à 20 $ et les prix futures pour les maturités de un, deux et trois ans sont respectivement 22 $, 23 $ et 24 $. Le processus stochastique du

2. E. S. Schwartz et M. Moon, "Rational Pricing of Internet Companies", *Financial Analysts Journal*, mai/juin 2000, 62-75.

prix de la matière première est défini par l'équation (36.4) avec a = 0,1 et σ = 0,2. Le graphique 36.1 décrit l'évolution des prix dans l'univers risque-neutre.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 36.1 : Arbre du prix spot de la matière première. Ici p_u, p_m et p_d sont les probabilités respectives d'états « up » « mid » et « down » à partir d'un nœud donné.

Évaluation sans option

Supposons, dans un premier temps, que le projet ne comporte pas d'option. Les prix espérés dans un, deux et trois ans sont respectivement égaux à 22 $, 23 $ et 24 $ dans l'univers risque-neutre. Les paiements espérés du projet (en millions de dollars US) dans ce même univers peuvent être calculés en utilisant les données de coût qui viennent d'être précisées. Ces paiements se montent donc à 4, 6 et 8 millions pour les années 1 à 3. La valeur du projet est alors définie par :

$$-15 + 4 \times \mathrm{e}^{-0,1\times 1} + \times \mathrm{e}^{-0,1\times 2} + 8 \times \mathrm{e}^{-0,1\times 3} = -0{,}54$$

Ce calcul montre que le projet ne devrait pas être entrepris puisqu'il réduit la richesse des actionnaires de 0,54 million.

Utilisation d'un arbre

On suppose maintenant que le processus de prix spot de la matière première s'écrit :

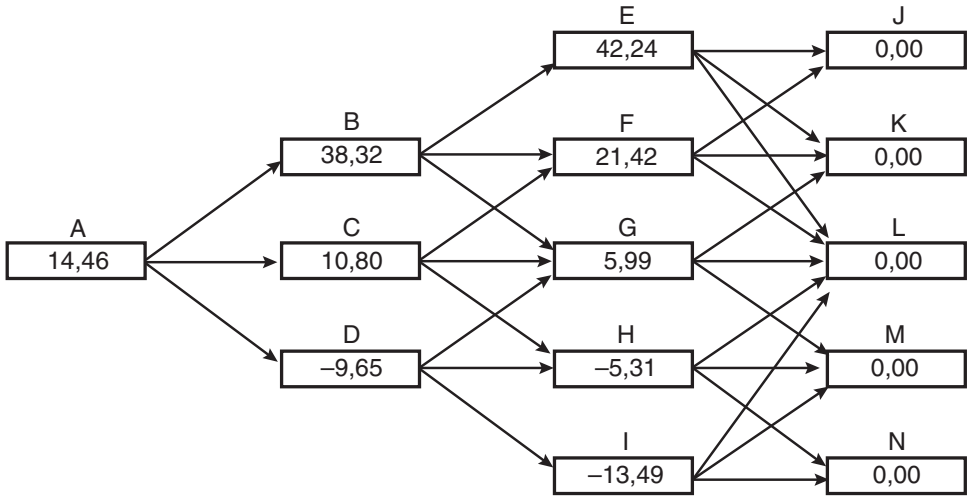
$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S]\, dt + \sigma\, dz \tag{36.3}$$

avec a =0,1 et σ = 0,2. À la section 35.4, nous avons montré comment construire l'arbre de prix avec un exemple analogue à celui traité ici. Cet arbre est représenté au graphique 36.1 (c'est en fait celui du graphique 35.2). Le processus est cohérent avec le

processus de S, avec les valeurs des paramètres et avec les prix futures à un, deux et trois ans.

L'arbre n'est pas vraiment utile quand on ne tient pas compte des options dans l'évaluation mais, à titre d'illustration simple, nous allons évaluer le projet sans option à l'aide de l'arbre de prix, ce qui permettra en outre de vérifier que les deux techniques aboutissent au même résultat.

Le graphique 36.2 montre la valeur du projet à chaque nœud du graphique 36.1 ; elle est calculée à partir des données de ce même graphique 36.1.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 36.2 : Évaluation du projet de base sans option. p_u, p_m et p_d sont les probabilités respectives d'états « up », « mid » et « down » à partir d'un nœud donné.

Considérons par exemple le nœud H. La probabilité que le prix de la matière première soit 22,85 $ à la fin de la troisième année est de 0,2217. Le profit correspondant pour cette troisième année est donc $2 \times 22{,}85 - 2 \times 17 - 6 = 5{,}70$. De même, la probabilité d'un prix à 16,16 $ est 0,6566, et dans cette situation le profit est égal à $-7{,}68$. Enfin, avec une probabilité 0,1217, le prix est à 11,43 $, engendrant un profit de $-17{,}14$ millions. La valeur du projet au nœud H, donnée dans le graphique 36.2, se calcule ainsi :

$$[0{,}2217 \times 5{,}70 + 0{,}6566 \times (-7{,}68) + 0{,}1217 \times (-17{,}14)] \times \mathrm{e}^{-0{,}1 \times 1} = -5{,}31$$

Considérons maintenant le nœud C ; la probabilité de passer au nœud F est 0,1667 et la matière première vaudra alors 31,37 $. Le cash-flow correspondant est alors :

$$2 \times 31{,}37 - 2 \times 17 - 6 = 22{,}74$$

La valeur des cash-flows futurs au nœud F est par ailleurs de 21,42. En cas de réalisation du nœud F, la valeur totale du projet est donc $21{,}42 + 22{,}74 = 44{,}16$. Les mêmes calculs pour les nœuds G et H donnent 10,35 et $-13{,}93$ respectivement. La valeur du projet au

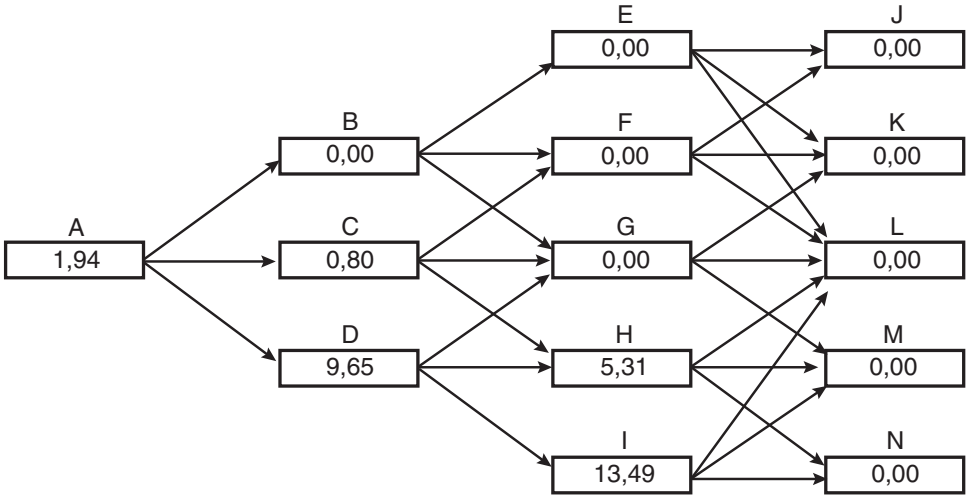
nœud C est donc :

$$[0{,}1667 \times 44{,}16 + 0{,}6666 \times 10{,}35 + 0{,}1667 \times (-13{,}93)] \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 10{,}80$$

Dans le graphique 36.2, on constate que la valeur du projet au nœud initial est égale à 14,46. En tenant compte de l'investissement initial de 15 millions, on retrouve la valeur $-0{,}54$ évaluée précédemment.

Option d'abandon

Supposons maintenant que l'entreprise dispose d'une option d'abandon, qui peut être exercée à n'importe quel moment. Partons aussi de l'hypothèse que l'exercice de cette option n'engendre ni coûts ni revenus supplémentaires. Dans ce cas, il s'agit d'un put américain de prix d'exercice nul et son évaluation est illustrée dans le graphique 36.3. L'option ne devrait pas être exercée aux nœuds E, F et G car la valeur du projet est



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 36.3 : Valorisation de l'option d'abandon. p_u, p_m et p_d sont les probabilités respectives d'états « up », « mid » et « down » à partir d'un nœud donné.

positive à ces nœuds. En revanche, elle devrait l'être aux nœuds H et I. La valeur de l'option y est respectivement de 5,31 et 13,49. Par induction arrière, on obtient la valeur de l'option au nœud D, si elle n'est pas exercée en ce nœud, sous la forme :

$$[0{,}1217 \times 13{,}49 + 0{,}6566 \times 5{,}31 + 0{,}1667 \times 0] \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 4{,}64$$

Mais la valeur intrinsèque de l'option en D est 9,65, valeur supérieure à 4,64. Le put devrait donc être exercé en D. De même au nœud C, on a :

$$[0{,}1667 \times 0 + 0{,}6666 \times 0 + 0{,}1667 \times 5{,}31] \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 0{,}8$$

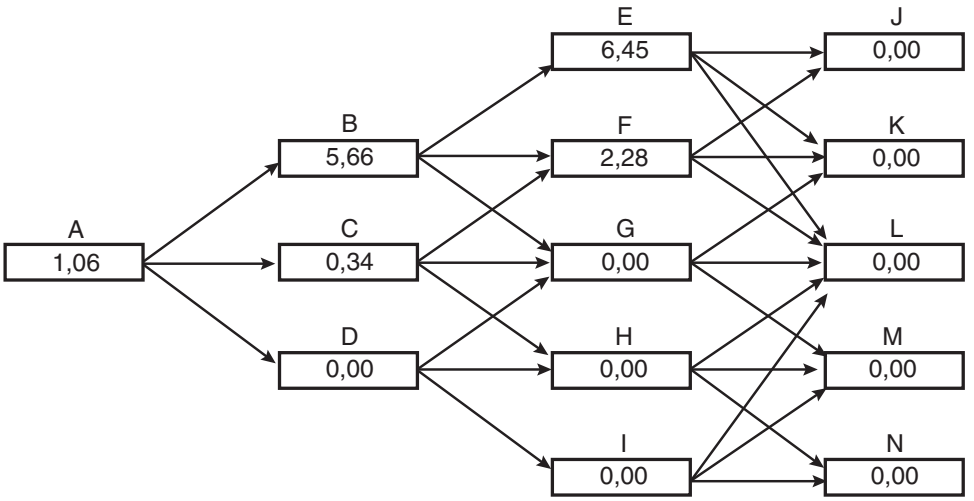
Enfin, la valeur au nœud initial A est obtenue par un calcul identique :

$$[0{,}1667 \times 0 + 0{,}6666 \times 0{,}8 + 0{,}1667 \times 9{,}65] \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 1{,}94$$

L'option d'abandon vaut donc 1,94 million de dollars US. Elle augmente la valeur du projet qui passe de $-0{,}54$ à 1,40 million de dollars US. Ce projet d'investissement qui n'était pas rentable initialement engendre finalement un accroissement de richesse pour les actionnaires lorsqu'on tient compte de l'option d'abandon.

Option d'extension

Supposons maintenant que l'option d'abandon n'existe pas, mais que, en revanche, l'entreprise dispose d'une option d'extension de la capacité de production de 20 %, contre le paiement d'un coût fixe de 2 millions. La production de matière première passera dans ce cas de 2 millions d'unités par an à 2,4 millions. Les coûts variables restent à 17 $ tandis que les coûts fixes augmentent de 20 %, passant de 6 millions à 7,2 millions. Il s'agit d'un call américain portant sur 20 % de la production initiale du projet, tel qu'il est décrit dans le graphique 36.2. Cette option est évaluée sur l'arbre du graphique 36.4.



Nœud :	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266	0,6566	0,6666	0,6566	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Graphique 36.4 : Valorisation de l'option d'extension. p_u, p_m et p_d sont les probabilités respectives d'états « up » « mid » et « down » à partir d'un nœud donné.

Au nœud E, cette option devrait être exercée. Le cash-flow correspondant serait alors de $0{,}2\times 42{,}24-2 = 6{,}45$. De même, au nœud F, le cash-flow est égal à $0{,}2\times 21{,}42-2 = 2{,}28$. En revanche, aux nœuds G, H et I, l'option devrait être abandonnée. En utilisant le même raisonnement, on voit qu'il est préférable d'exercer au nœud B, puisqu'elle vaut alors $0{,}2 \times 38{,}32 - 2 = 5{,}66$, plutôt que de retarder l'exercice. À l'inverse, au nœud C, l'option non exercée vaut :

$$[0{,}1667 \times 2{,}28 + 0{,}6666 \times 0 + 0{,}1667 \times 0] \times \mathrm{e}^{-0{,}1\times 1} = 0{,}34$$

ce qui est supérieur à la valeur de l'option exercée, égale à $0{,}2 \times 10{,}8 - 2 = 0{,}16$. Enfin, au nœud initial A, la valeur de l'option non exercée est :

$$[0{,}1667 \times 5{,}66 + 0{,}6666 \times 0{,}34 + 0{,}1667 \times 0] \times \mathrm{e}^{-0{,}1 \times 1} = 1{,}06$$

Si l'option était exercée en A, elle vaudrait $0{,}2 \times 14{,}46 - 2 = 0{,}89$, et on remarque alors que l'exercice n'est pas optimal.

On constate que l'option accroît la valeur du projet qui passe de $-0{,}54$ à $0{,}52$ million. À nouveau, nous mettons en évidence un cas où la valeur du projet devient positive lorsque la valeur d'une option est prise en compte.

L'option d'extension du graphique 36.4 est facile à évaluer car, une fois qu'elle a été exercée, les cash-flows futurs augmentent proportionnellement de 20 %. Dans le cas où les coûts fixes restent identiques ou augmentent de moins de 20 %, il est nécessaire de tenir compte d'éléments supplémentaires dans le graphique 36.4. En particulier, il faut intégrer :

1. La valeur actuelle des coûts fixes futurs ;
2. La valeur actuelle des revenus futurs, nets de coûts variables. On peut alors calculer les paiements consécutifs à l'exercice de l'option.

Options multiples

Quand un projet comporte deux ou plusieurs options, celles-ci ne sont, en général, pas indépendantes. En d'autres termes, la valeur du couple d'options A et B est différente de la somme des valeurs des options A et B prises séparément. Pour clarifier ce point, supposons que l'entreprise dispose simultanément d'une option d'abandon et d'une option d'extension. La production ne peut être augmentée si le projet a déjà été abandonné à une date antérieure. De plus, la valeur de l'option d'abandon dépend de la décision d'extension éventuellement prise à une date précédente [3].

On peut prendre en compte ces interactions dans la procédure d'évaluation en définissant quatre états à chaque nœud.

1. Non encore abandonné ; non encore étendu.
2. Non encore abandonné ; déjà étendu.
3. Déjà abandonné ; non encore étendu.
4. Déjà abandonné ; déjà étendu.

La méthode d'induction arrière est alors utilisée pour calculer la valeur combinée des options à chaque nœud pour les quatre situations. Cette démarche d'évaluation d'options *path-dependent* a été examinée plus en détail à la section 27.5.

3. Bien sûr, dans notre exemple, les deux options n'interagissent pas, comme nous pouvons le voir dans les graphiques 36.3 et 36.4. Ce serait le cas si l'arbre était plus grand, avec un pas de temps réduit.

Le cas de plusieurs processus stochastiques

Lorsque plusieurs processus stochastiques interviennent, la valeur du projet de base est le plus souvent déterminée par une simulation de Monte Carlo. L'évaluation des options incluses est alors plus délicate car la simulation fonctionne en induction avant. Quand un nœud donné de l'arbre est atteint, on n'a pas d'informations sur la valeur actuelle des cash-flows futurs du projet. Cependant, les techniques mentionnées à la section 27.8 pour l'évaluation des options américaines par simulation de Monte-Carlo peuvent, dans certains cas, être utilisées.

Afin d'illustrer ce problème, Schwartz et Moon (2000) expliquent comment leur analyse d'Amazon.com, esquissée dans l'encadré 36.1, pourrait être étendue pour prendre en compte l'option d'abandon (la déclaration de faillite dans ce cas) lorsque les cash-flows sont négatifs [4]. À chaque date, ils supposent une relation polynomiale entre la valeur du projet non abandonné et des variables comme le chiffre d'affaires actuel, le taux de croissance de celui-ci, les volatilités, la trésorerie et les pertes reportées. Chaque simulation fournit une observation utilisée dans l'estimation de cette relation. C'est en fait l'approche de Longstaff et Schwartz décrite à la section 27.8 [5].

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'application des idées développées dans ce livre à l'évaluation des actifs réels et des options sur ces actifs. Nous avons montré comment la méthodologie d'évaluation en univers risque-neutre peut être utilisée pour évaluer un actif dépendant de plusieurs variables suivant des processus de diffusion. Le terme de tendance de chaque variable est ajusté pour refléter le prix de marché du risque. La valeur de l'actif est alors la valeur actuelle espérée des cash-flows futurs actualisés au taux sans risque.

L'évaluation risque-neutre fournit une approche alternative cohérente pour l'évaluation des projets d'investissement. Elle permet la prise en compte des options incluses dans de nombreux projets rencontrés dans la pratique. Cette démarche a été illustrée par l'évaluation de la société Amazon.com à la fin de l'année 1999 et par celle d'un projet de production de matières premières.

Références complémentaires

Amran M. et N. Kulatilaka, *Real options*, Harvard Business School Press, Boston, MA, 1999.

Copeland T. et V. Antikarov, *Real Options: A Practitioners Guide*, Texere, New York, 2003.

Koller, T., M. Goedhard, et D. Wessels, *Valuation : Measuring and Managing the Value of Companies*, 5th ed., Wiley, New York, 2010.

4. L'analyse exposée à la section 36.4 supposait que la faillite survenait dès que la trésorerie devenait négative, mais ce n'est pas nécessairement un critère optimal dans le cas d'Amazon.com.

5. F. A. Longstaff et E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", *Review of Financial Studies*, 14 (1), 2001, 113-147.

MUN, J., *Real Options Analysis*, Wiley, Hoboken, NJ, 2006.

SCHWARTZ E. S. et M. MOON, "Rational Pricing of Internet Companies", *Financial Analysts Journal*, mai/juin 2000, 62-75.

TRIGEORGIS L., *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

Problèmes et exercices

36.1 Expliquez la différence entre l'approche par la VAN et celle qui est fondée sur la méthodologie risque-neutre dans l'évaluation d'un nouveau projet d'investissement. Quels sont les avantages de l'approche risque-neutre pour l'évaluation des options réelles ?

36.2 Le prix de marché du risque pour le cuivre est de 0,5, la volatilité annuelle des prix du cuivre est égale à 20 %, le prix spot est 80 cents par livre et le prix futures à 6 mois est 75 cents. Quel est le taux de croissance espéré du prix du cuivre dans les six mois à venir ?

36.3 Soit y le rendement d'opportunité d'une matière première et u son coût de stockage ; montrez que dans l'univers risque-neutre classique, le taux de croissance du prix est égal à $r - y + u$, où r est le taux sans risque. En déduire la relation entre le prix de marché du risque de cette matière première, son taux de croissance dans l'univers réel, sa volatilité, y et u.

36.4 La corrélation entre le chiffre d'affaires d'une entreprise et l'indice de marché est égale à 0,2. La rentabilité espérée du marché en excès du taux sans risque est de 6 % et la volatilité de l'indice est de 18 %. Quel est le prix de marché du risque du chiffre d'affaires de cette entreprise ?

36.5 Une entreprise a la possibilité d'acheter une option pour la livraison d'un million d'unités d'une matière première dans trois ans au prix de 25 $ l'unité. Le prix futures à 3 ans est de 24 $. Le taux sans risque continu est égal à 5 % et la volatilité annuelle du prix futures est 20 %. Combien vaut cette option ?

36.6 Un conducteur signe un contrat de location avec option d'achat (crédit-bail) qui lui donne le droit d'acheter le véhicule dans quatre ans pour 10 000 €. La valeur de la voiture est 30 000 € aujourd'hui. Cette valeur S suit le processus $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz$, où $\mu = -0{,}25$ et $\sigma = 0{,}15$, z désignant un processus de Wiener. Le prix de marché du risque du prix de la voiture est $-0{,}1$. Quelle est la valeur de l'option d'achat ? Vous supposerez un taux sans risque égal à 6 % pour toutes les maturités.

Questions complémentaires

36.7 Supposons que les prix spot, futures à 6 et 12 mois du blé soient respectivement de 2,50 $, 2,60 $ et 2,70 $ par boisseau. Le prix du blé suit le processus défini dans l'équation (36.3) avec $a = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}15$. Construisez un arbre à deux périodes pour le prix du blé dans l'univers risque-neutre. Un agriculteur a un projet qui nécessite une dépense initiale de 10 000 $ et une autre de 90 000 $

dans six mois. Cela augmentera la prochaine récolte (dans un an) de 40 000 boisseaux. Quelle est la valeur de ce projet ? Supposons maintenant que cet agriculteur ait la possibilité d'abandonner le projet dans six mois, sans payer les 90 000 $ à cette date. Quelle est la valeur de l'option d'abandon ? Vous considérerez un taux sans risque continu annuel de 5 %.

36.8 Avec les données de l'exemple de la section 36.5, répondez aux questions :

a. quelle est la valeur de l'option d'abandon si cet abandon coûte 3 millions au lieu de 0 ?

b. quelle est la valeur de l'option d'extension si cette extension coûte 5 millions au lieu de 2 millions ?

Chapitre 37

Les mésaventures des marchés d'actifs dérivés t les leçons à en tirer

Depuis trente ans, des pertes spectaculaires ont pu être observées sur les marchés d'actifs dérivés. Les plus importantes sont liées aux marchés des produits titrisés sur les emprunts subprimes, étudiés au chapitre 8. L'encadré 37.1 récapitule certaines des autres pertes importantes subies par les institutions financières, tandis que l'encadré 37.2 se concentre sur les entreprises non financières. Dans bon nombre de cas, ces pertes énormes sont la conséquence des activités d'un seul individu. En 1995, Nick Leeson a mis à genoux la Barings, une banque britannique ayant deux cents ans d'existence. En 1994, Robert Citron a fait perdre 2 milliards de dollars à Orange County, une municipalité californienne. Joseph Jett a perdu 350 millions de dollars sur le compte de Kidder Peabody. Les pertes de John Rusnack, révélées en 2002, se montent à 700 millions de dollars dans le cadre de ses activités pour l'Allied Irish Bank. Le hedge fund (fonds spéculatif) Amaranth a perdu 6 milliards de dollars à cause des risques pris par Brian Hunter en 2006, et la Société Générale a accusé une perte de 7 milliards d'euros du fait des spéculations de Jérôme Kerviel. Les pertes énormes de Daiwa, Shell et Sumitomo furent aussi le résultat des prises de position d'un seul individu.

Ces pertes ne devraient cependant pas jeter l'opprobre sur l'industrie des actifs dérivés. Pris dans leur globalité, ces marchés, représentent des milliers de milliards de dollars de transactions et ont connu un succès exceptionnel en répondant aux besoins de leurs utilisateurs. Les événements décrits dans les encadrés 37.1 et 37.2 représentent une part infime des transactions traitées sur ces marchés (en nombre aussi bien qu'en volume). Cependant, les leçons qui peuvent être tirées de ces situations doivent être analysées avec soin. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce dernier chapitre.

37.1 Leçons pour tous les utilisateurs d'actifs dérivés

Nous exposons tout d'abord les leçons destinées à tous les utilisateurs d'actifs dérivés, qu'il s'agisse d'institutions financières ou d'entreprises non financières.

Définissez les limites de risque

Il est fondamental que les entreprises définissent clairement les limites des risques financiers qui peuvent être pris. Elles devraient donc élaborer des procédures qui assurent que lesdites limites sont respectées. Idéalement, les limites globales doivent être fixées au niveau de la direction. Elles doivent ensuite être répercutées en limites applicables par les responsables de la gestion de risques particuliers. Des rapports quotidiens doivent calculer les gains et pertes susceptibles de survenir pour des variations données de variables de marché pertinentes. Ceux-ci doivent être comparés aux gains et pertes effectivement réalisés, de façon à s'assurer que les modèles d'évaluation utilisés sont pertinents.

Une gestion rigoureuse des risques est cruciale lorsque des actifs dérivés sont employés. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, cela s'explique par le fait que les dérivés peuvent être utilisés pour la couverture, la spéculation et l'arbitrage. Sans une gestion serrée, il est impossible de savoir si un trader, chargé de couvrir les risques de l'entreprise, ne s'est pas transformé en spéculateur ou si, d'arbitragiste, il n'est pas devenu de la même façon spéculateur. La Barings est l'illustration classique de ce qui peut tourner mal. Le travail de Nick Leeson consistait à monter des arbitrages à faible risque entre Singapour et le marché d'Osaka sur le contrat futures sur l'indice Nikkei 225. Sans que ses supérieurs londoniens le sachent, d'arbitragiste il s'est transformé en spéculateur, prenant d'énormes paris sur l'évolution du Nikkei 225. Le système de contrôle interne était si défaillant que personne ne savait ce qu'il faisait en réalité.

Il ne s'agit pas de dire que la prise de risque doit être proscrite. Un trésorier d'entreprise, un trader dans une institution financière, ou encore un gérant de fonds doivent être autorisés à prendre des positions sur l'évolution future de certaines variables de marché. Mais nous voulons insister sur le fait que le volume des positions autorisées doit être limité et sur la nécessité d'un contrôle interne traduisant de manière fiable les risques pris.

Encadré 37.1 Pertes importantes d'institutions financières

Allied Irish Bank
Cette banque a perdu 700 millions de dollars du fait des activités spéculatives d'un trader, John Rusnack, pendant plusieurs années, sur le marché des changes. Celui-ci masquait ses pertes en créant des transactions fictives sur des contrats d'option.

Amaranth
Le fonds a perdu 6 milliards de dollars en 2006, suite à des spéculations directionnelles sur le prix du gaz.

Barings
Cette banque britannique, plus de deux fois centenaire, a fait faillite en 1995 à cause des activités d'un seul trader, Nick Leeson, à Singapour. Celui-ci devait théoriquement arbitrer des contrats à terme sur l'indice Nikkei 225 entre Singapour et Osaka. Au lieu de cela, il réalisait des opérations spéculatives en jouant sur le sens d'évolution du Nikkei 225 à partir de futures et d'options. Ses pertes totales ont avoisiné le milliard de dollars.

Daiwa Bank
Dans les années 1990, un trader opérant à New York pour cette banque japonaise a perdu plus de 1 milliard de dollars.

Les contreparties d'Enron
Certaines contreparties d'Enron, qui avaient aidé cette entreprise à masquer à ses actionnaires la situation réelle de la société, durent payer des dommages et intérêts, avoisinant 1 milliard de dollars, aux actionnaires d'Enron.

Kidder Peabody (voir encadré 5.1)
Les opérations d'un seul trader, Joseph Jett, ont fait perdre à cette firme new-yorkaise 350 millions de dollars sur les obligations du Trésor américain et les strips associés (les strips sont créés quand chaque flux payé par une obligation est traité séparément). La perte trouve son origine dans le calcul erroné des profits par le système informatique de l'entreprise.

Long Term Capital Management (voir encadré 2.2)
Ce hedge fund a perdu environ 4 milliards de dollars en 1998. La stratégie suivie par ce fonds s'appelle « arbitrage de convergence ». Elle consiste à repérer des couples de titres proches (en termes de flux futurs) dont les prix sont momentanément éloignés. Il « suffit » alors d'acheter le moins cher et de vendre le plus cher à découvert, en couvrant les risques résiduels. Pendant l'été 1998, le fonds a été mis sérieusement en difficulté par l'élargissement des spreads, consécutif à l'annonce par la Russie d'un défaut sur sa dette. Le fonds était considéré comme trop important pour faire faillite (le fameux « too big to fail »). La Federal Reserve de New York a dû organiser une recapitalisation de 3,5 milliards de dollars en incitant quatorze banques à investir dans le fonds.

Midland Bank
Au début des années 1990, cette banque britannique a perdu 500 millions de dollars, essentiellement à cause d'une spéculation erronée sur l'évolution des taux d'intérêt. Elle fut ensuite rachetée par la Hong Kong & Shanghai Bank.

Société Générale (voir encadré 1.3)
Jérôme Kerviel a perdu environ 5 milliards de dollars par des spéculations directionnelles sur des futures sur indices en janvier 2008.

Les subprimes (voir chapitre 8)
En 2007, la perte de confiance dans les produits titrisés adossés à des créances immobilières de mauvaise qualité ont entraîné un « credit crunch », qui a engendré des dizaines de milliards de dollars US de pertes pour des institutions financières comme UBS, Merrill Lynch ou Citigroup.

Prenez les limites de risque au sérieux

Qu'arrive-t-il quand un employé dépasse les limites, mais réalise un profit ? C'est une question délicate pour un supérieur hiérarchique. Il est tentant de fermer les yeux sur ces violations de limites quand elles engendrent un profit à la sortie. Pourtant, c'est une vue à court terme. Cela conduit au développement d'une culture dans laquelle les limites de risque ne sont pas prises au sérieux, et ouvre la voie à des lendemains qui déchantent, voire à des désastres. Dans la plupart des situations présentées dans les encadrés 37.1 et 37.2, les entreprises avaient fait preuve de laxisme à l'égard des risques pris, parce qu'ils avaient, les années précédentes, engendré des profits.

Encadré 37.2 Pertes importantes d'entreprises non financières

Allied Lyons
Le service Trésorerie de cette entreprise agroalimentaire a perdu 150 millions de dollars en 1991 en vendant des calls sur devises (dollars US-livres sterling).

Gibson Greetings
Le département Trésorerie de cette entreprise spécialisée dans les cartes de vœux, basée à Cincinnati, a perdu près de 20 millions de dollars en 1994 en négociant auprès de la Bankers Trust des contrats dérivés de taux aux caractéristiques très exotiques. Ils ont ensuite poursuivi la Bankers Trust et le litige a été réglé à l'amiable.

Hammersmith and Fulham (voir encadré 7.2)
Cette collectivité locale britannique a perdu environ 600 millions de dollars sur des swaps et options sur devises en 1988. Tous ces contrats ont ensuite été annulés par les tribunaux britanniques, au détriment des banques qui assuraient la contrepartie.

Metallgesellschaft (voir encadré 3.2)
Cette firme allemande avait conclu des contrats de long terme de fourniture de pétrole et de gaz et avait couvert ces opérations en roulant une position sur des contrats futures court terme. La perte était de 1,8 milliard de dollars lorsque Metallgesellschaft a dû cesser cette activité.

Cette municipalité de Californie a perdu près de 2 milliards de dollars en 1994 à cause des prises de position spéculatives d'un trader, Robert Citron. Il utilisait des dérivés de taux pour spéculer sur la stabilité ou la baisse des taux.

Procter & Gamble (voir encadré 34.4)
Le service Trésorerie de cette grande entreprise américaine a perdu 90 millions de dollars en 1994 en traitant, avec la Bankers Trust, des dérivés de taux aux caractéristiques très exotiques. Procter & Gamble ont ensuite poursuivi la Bankers Trust, mais le litige a pu être réglé à l'amiable.

Shell
Un (unique) employé de la filiale japonaise de Shell a perdu 1 milliard de dollars en opérant sans autorisation sur le marché des futures sur devises.

Sumitomo
Un seul trader employé par cette banque japonaise a perdu près de 2 milliards de dollars dans les années 1990 sur les marchés du cuivre, aussi bien sur le marché spot que sur les marchés de futures et d'options.

UBS
En 2011, Kweku Adoboli a perdu 2,3 milliards de dollars en prenant des positions spéculatives non autorisées sur des indices d'actions.

Le cas typique est celui d'Orange County. Les activités de Robert Citron avaient été très profitables pour la municipalité en 1991-1993, et elle s'était habituée à la source de financement complémentaire ainsi constituée. Les responsables préférèrent ignorer les risques que leur employé prenait, parce qu'il avait jusqu'alors réalisé des profits. Malheureusement, les pertes de 1994 dépassèrent largement les bénéfices des années précédentes.

Les pénalités pour dépassement de limites devraient être indépendantes du résultat des transactions, profits ou pertes. Sinon, les traders qui subissent une perte sont tentés de prendre des positions toujours plus importantes dans l'espoir de sortir du rouge et d'être ainsi pardonnés.

Ne croyez pas que vous pouvez prévoir l'évolution du marché

Certains traders sont sans doute meilleurs que d'autres. Mais aucun ne peut avoir raison constamment. Un trader qui prévoit correctement l'évolution des variables de marché dans 60 % des cas est déjà bon. S'il a des résultats exceptionnels (comme ceux de Robert Citron au début des années 1990), c'est plus probablement un coup de chance que la conséquence de capacités hors du commun.

Supposons qu'une institution financière emploie seize traders et que l'un d'eux réalise des profits quatre trimestres de suite. Doit-il recevoir une gratification ? Doit-on aug-

menter ses limites d'intervention ? La réponse à la première question est évidemment affirmative, mais la réponse à la seconde devrait être négative. La probabilité de réaliser des profits quatre trimestres de suite en opérant au hasard est de $0{,}5^4$, c'est-à-dire une chance sur seize. Par conséquent, un trader sur seize peut réaliser avec de la chance des profits pendant chaque trimestre de l'année. Il ne faut pas supposer que la chance va continuer, mais refuser d'accroître ses limites.

Ne sous-estimez pas les gains de diversification

Lorsqu'un trader semble être doué pour prévoir l'évolution d'une variable de marché, il y a une tentation à accroître ses limites. Nous venons de préciser que ce n'était pas une bonne idée, puisqu'il est probable qu'il ait été chanceux plutôt que clairvoyant. Cependant, supposons que nous soyons réellement convaincus qu'un trader a un talent particulier. Quelle perte de diversification devrions-nous nous accorder pour en tirer parti ? La réponse est que les bénéfices de la diversification peuvent être énormes ; il est peu probable que cela vaille la peine de les sacrifier pour investir massivement sur une seule variable de marché.

Un exemple peut illustrer ce point. Considérons 20 actions ayant chacune une rentabilité espérée égale à 10 % et une variance de rentabilité de 30 %. La corrélation est de 0,2 pour un couple quelconque d'actions. En divisant en parts égales l'investissement, la rentabilité espérée du portefeuille est de 10 % et l'écart-type de rentabilité de 14,7 %. La diversification autorise la division de la volatilité par 2, si on compare le portefeuille à un investissement dans un titre unique. Il faudrait qu'un trader soit exceptionnellement doué dans le choix des titres pour compenser cet effet de diversification.

Faites des analyses de scénarios et des stress tests

Le calcul de mesures de risque comme la VaR devrait systématiquement être accompagné d'analyses de scénarios et de stress tests pour améliorer la compréhension de ce qui peut mal tourner. Ces techniques ont été évoquées au chapitre 22. Elles sont capitales. L'être humain a une fâcheuse tendance à se fixer sur un ou deux scénarios avant de prendre une décision. En 1993 et 1994, par exemple, Procter & Gamble ainsi que Gibson Greetings étaient tellement persuadés que les taux d'intérêt resteraient faibles qu'ils avaient complètement négligé, dans leur processus de prise de décision, la possibilité d'une hausse de 100 points de base.

Il est aussi important d'être créatif dans l'élaboration des scénarios. Une des possibilités consiste à prendre dix ou vingt années de données historiques et à choisir les événements les plus extrêmes de cette période. Parfois, les données sur une variable particulière sont insuffisantes, voire indisponibles. Il est judicieux, dans ce cas, d'utiliser une variable au comportement analogue, mais pour laquelle les données sont disponibles, et d'assimiler les variations en pourcentage de cette variable proxy à celles de la variable étudiée. Par exemple, si peu d'informations chiffrées sont disponibles sur les obligations d'un pays donné, on peut utiliser les historiques de prix d'obligations émises par un pays comparable afin d'élaborer les scénarios.

37.2 Leçons pour les institutions financières

Nous considérons maintenant les leçons plus particulièrement destinées aux institutions financières.

Surveillez attentivement les traders

Dans les salles de marchés, une tendance consiste à considérer que les traders les plus performants sont « intouchables » et à soumettre leur activité à un contrôle moins scrupuleux que celle des autres. Il semble que Joseph Jett, trader vedette de Kidder Peabody, ait été souvent « trop occupé » pour répondre aux questions et discuter de ses positions avec les risk managers de l'entreprise.

Il est essentiel que les opérations de tous les traders – spécialement celles des plus performants – soient contrôlables. En effet, il est capital, pour une institution financière, de savoir si les profits élevés sont réalisés par une prise de risque inconsidérée. De même, il est important de vérifier que les systèmes informatiques et les modèles d'évaluation utilisés sont adéquats et non manipulables.

Séparez le front, le middle et le back office

Le *front office* d'une institution financière est composé des traders qui réalisent les transactions, prennent des positions sur le marché, etc. Le *middle office*, quant à lui, est composé de risk managers chargés de contrôler les risques pris. Le *back office* est le service qui enregistre et comptabilise les opérations. Quelques-uns des désastres les plus spectaculaires résultent de l'absence de séparation (parfois appelée *muraille de Chine*) de ces différentes fonctions. Nick Leeson contrôlait à la fois le front et le back office à Singapour ; il était donc à même de masquer la nature désastreuse de ses opérations, au moins provisoirement, à ses supérieurs londoniens.

De même, bien que tous les détails ne soient pas de notoriété publique, il semble que le manque de séparation entre le front et le back office soit, du moins partiellement, à l'origine des pertes énormes subies par Sumitomo sur le marché du cuivre.

Ne vous fiez pas aveuglément aux modèles

Une partie des pertes récapitulées dans l'encadré 37.1 est due aux insuffisances des systèmes informatiques et des modèles d'évaluation utilisés.

L'exemple le plus fameux est sans doute celui de Kidder Peabody, déjà discuté (voir encadré 5.1).

Si des profits importants s'appuient sur des stratégies relativement élémentaires, il y a lieu de s'interroger sur la pertinence des modèles utilisés pour calculer lesdits profits. Il existe une probabilité non négligeable que ces modèles ne soient pas pertinents. De même, si une institution financière est particulièrement compétitive sur certaines cotations, il y a une bonne chance qu'elle utilise un modèle différent de celui qui est employé par les autres intervenants. Un examen scrupuleux du modèle est alors nécessaire. Le

directeur d'une salle de marchés doit autant s'inquiéter d'un volume d'affaires trop important sur certains types de transactions que d'un volume trop faible sur d'autres.

Soyez conservateur dans la constatation des profits

Lorsqu'une institution vend un produit fortement exotique à une entreprise non financière, l'évaluation de celui-ci peut être largement contingente au modèle utilisé. Par exemple, les produits de long terme incluant des options de taux peuvent être très dépendants du modèle d'évolution des taux retenu pour l'évaluation. Dans une telle situation, on parle parfois de *marking to model* pour qualifier le marking to market quotidien. Cette appellation est due à l'absence de prix de marché qui pourraient servir de référence pour l'évaluation du produit considéré.

Supposons qu'une institution s'apprête à vendre un produit à un client pour un montant supérieur de 10 millions à sa valeur, ou du moins de 10 millions supérieur à l'évaluation fournie par le modèle. Ces 10 millions sont qualifiés de « profit initial ».

Quand ce profit doit-il être constaté ? Les pratiques en la matière diffèrent d'une banque à l'autre. Certaines le constatent immédiatement, d'autres préfèrent étaler la constatation dans le temps, sur toute la durée de vie du contrat, adoptant ainsi une attitude plus conservatrice.

Reconnaître ce type de profit immédiatement peut être très dangereux. En effet, cela encourage les traders à utiliser des modèles agressifs, à empocher leurs gratifications et à quitter la société avant que la valeur réelle de la transaction puisse être reconnue. Il est largement préférable de constater ce profit progressivement, de façon à inciter les traders à comparer divers modèles d'évaluation et à tester différents jeux d'hypothèses avant de finaliser la transaction.

Ne vendez pas à vos clients des produits inadaptés

Il peut être tentant de vendre à ses clients des produits inadaptés, en particulier lorsque ces derniers manifestent de l'attrait pour un certain type de risque. Mais c'est une vision de court terme. L'exemple le plus frappant est probablement celui de la Bankers Trust dans la période précédant le printemps 1994.

De nombreux clients de la BT furent convaincus par la banque d'acheter des produits très risqués et tout à fait inadaptés. Un de ces produits (le swap 5/30 analysé dans l'encadré 34.4) donnait au client la possibilité d'économiser quelques points de base sur les taux d'emprunt, avec en contrepartie une faible probabilité de supporter des pertes importantes. Ces produits ont fonctionné à l'avantage des clients de la BT en 1992 et 1993, mais la situation s'est considérablement dégradée en 1994 à la suite d'une forte remontée des taux. La mauvaise publicité qui en a résulté a eu un impact considérable sur la BT. La réputation, patiemment construite au fil des ans, et la confiance accordée par les clients aux produits dérivés innovants de la BT ont été annihilées à cause du comportement de quelques vendeurs pratiquant une politique commerciale agressive. La BT dut payer des montants considérables à ses clients pour régler ces litiges à l'amiable. Elle a été rachetée par la Deutsche Bank en 1999.

Méfiez vous des profits faciles

Enron est l'exemple type des dégâts que peuvent causer des vendeurs trop agressifs. Faire des affaires avec Enron paraissait très profitable, et les banques se battaient pour avoir cette entreprise comme client. Mais cette concurrence n'est pas forcément le signe que ces affaires engendreront du profit à terme. Les affaires d'Enron avec ces banques ont conduit à des procès qui ont finalement coûté énormément d'argent à ces établissements. En général, les transactions supposées dégager des profits importants doivent être analysées avec beaucoup de prudence, car elle peuvent être le siège de risques cachés. Investir dans des tranches d'ABS-CDO créées à partir de la titrisation de prêts subprimes et notées AAA paraissait une opportunité fantastique (voir chapitre 8). Les rentabilités promises étaient bien plus élevées que celles des autres instruments notés AAA. De nombreux investisseurs ont oublié de se demander si ces rendements excédentaires n'étaient pas dus à des risques non pris en compte par les agences de notation.

N'ignorez pas le risque de liquidité

Les spécialistes en ingénierie financière fondent souvent l'évaluation de produits exotiques ou de produits peu liquides sur les prix d'actifs faisant l'objet d'importants volumes de transactions. Les pratiques suivantes sont courantes.

1. Calcul d'une courbe zéro-coupon à partir d'obligations d'État très liquides (obligations dites on-the-run) et utilisation de la courbe obtenue pour évaluer des obligations bien moins liquides (dites off-the-run).
2. Calcul d'une volatilité implicite à partir de contrats d'options liquides et application du résultat obtenu à l'évaluation d'options peu échangées.
3. Estimation des paramètres d'un processus de taux à partir de caps et de swaptions largement échangés, et introduction de ces estimations dans le modèle d'évaluation de produits structurés.

À première vue, cette manière de procéder peut paraître sensée. Cependant, il est dangereux de supposer que l'on pourra toujours échanger des titres ou contrats peu liquides à des prix voisins de leur valeur théorique. Quand les marchés subissent un choc, de quelque nature que ce soit, on observe une « fuite vers la qualité ». La liquidité devient essentielle pour les investisseurs, et les titres peu liquides sont, dans une certaine mesure, « bradés » par rapport à leur valeur théorique. Par conséquent, les stratégies qui supposent que de grandes quantités de titres pourront être vendues rapidement à un prix proche de leur valeur théorique sont dangereuses. C'est ce qui est arrivé en 2007, quand les intervenants ont perdu confiance sur le marché du crédit, notamment vis-à-vis des produits titrisés adossés à des créances immobilières.

Une autre illustration de ce risque de liquidité est fournie par Long Term Capital Management (LTCM) dont le cas a été décrit dans l'encadré 2.2. Ce hedge fund suivait une stratégie dite d'arbitrage de convergence. Il tentait donc de repérer des couples de titres (ou de portefeuilles) qui, d'un point de vue théorique, devaient s'échanger à des prix voisins. Si l'un des titres cotait à un prix inférieur à l'autre, il était acheté pendant que l'autre était vendu à découvert. Cette stratégie était fondée sur l'idée que des prix théoriques identiques devaient résulter tôt ou tard en des prix de marché égaux.

Pendant l'été 1998, LTCM a subi une perte énorme. Elle était consécutive à l'annonce, par la Russie, d'un défaut sur sa dette souveraine, ce qui a entraîné une fuite vers la qualité. LTCM n'avait pas, à proprement parler, une forte exposition au risque de la dette russe, mais son portefeuille était constitué d'une position longue en obligations peu liquides et d'une position courte en obligations liquides (c'est-à-dire une position longue sur les titres off-the-run et courte sur les on-the-run). Les spreads entre les deux catégories de titres s'élargirent brutalement après l'annonce russe. Les spreads de crédit suivirent le même mouvement, alors que la position de LTCM traduisait un fort effet de levier. Au final, cela se transforma en une perte colossale pour LTCM, et en l'obligation d'apporter des garanties que le fonds n'était pas capable de fournir.

La saga LTCM illustre la nécessité de procéder à des analyses de scénarios et à des stress tests pour envisager des cas extrêmes. LTCM aurait dû, pour quantifier son risque de liquidité, se référer à d'autres périodes de l'histoire financière ayant conduit à des réactions brutales de fuite vers la qualité.

Méfiez-vous quand tout le monde adopte la même stratégie

Il arrive parfois qu'une majorité d'intervenants suive la même stratégie. Cela rend l'environnement dangereux, et de forts mouvements de marché, accompagnés d'instabilité, sont susceptibles de survenir, ayant pour conséquence des pertes importantes pour les intervenants. Un exemple de cette situation a été donné au chapitre 19 dans notre analyse de l'assurance de portefeuille et du krach d'octobre 1987. Dans les mois qui ont précédé le krach, de nombreux gérants ont essayé d'assurer leur portefeuille en créant des options de vente synthétiques. Après une hausse du marché, ils achetaient des actions ou des futures sur indices et revendaient après une baisse. Cette stratégie a engendré de l'instabilité sur le marché. En effet, une faible baisse des cours pouvait entraîner une vague de ventes par les assureurs de portefeuille. Cette réaction conduisait à une poursuite de la baisse qui, elle-même, entraînait des ventes supplémentaires, et ainsi de suite. Il est aujourd'hui à peu près certain que, sans assurance de portefeuille, le krach de 1987 aurait été bien moins sévère.

LTCM fournit un second exemple de ce problème. En 1998, la situation du fonds a encore été aggravée car de nombreux autres fonds suivaient la même stratégie d'arbitrage de convergence. À la suite du défaut russe et de la fuite vers la qualité, LTCM a tenté de dénouer une partie de ses positions afin de faire face aux besoins de liquidité. Malheureusement, les autres fonds étaient confrontés aux mêmes difficultés et tentaient de réaliser les mêmes opérations. Le problème en fut aggravé et les spreads s'élargirent encore, renforçant la fuite vers la qualité.

Considérons par exemple la position de LTCM en obligations du Trésor US ; le fonds détenait une position longue sur les obligations peu liquides et courte sur les titres on-the-run. Quand la fuite vers la qualité augmenta les spreads de taux entre les deux types d'obligations, LTCM dut liquider ses positions en vendant ses titres off-the-run et en rachetant les obligations on-the-run. D'autres fonds importants firent de même. Il s'ensuivit une augmentation des prix relatifs des obligations liquides par rapport aux autres, élargissant encore les spreads entre les deux catégories de titres.

Nous pouvons prendre comme exemple complémentaire le cas des compagnies d'assurances britanniques à la fin des années 1990. Ces compagnies avaient vendu de nombreux contrats promettant, sur les annuités que devaient recevoir les futurs retraités, un taux calculé comme le maximum d'un taux de marché et d'un taux garanti. Les compagnies décidèrent de couvrir le risque associé à ces contrats en négociant des swaps de long terme avec de grandes institutions financières. Ces dernières, souhaitant elles aussi couvrir le risque, achetèrent d'énormes quantités d'obligations à long terme (en livres sterling). Il s'ensuivit une augmentation du prix de ces obligations et donc une baisse des taux correspondants. Il fallait donc acheter encore plus d'obligations pour maintenir la couverture dynamique, entraînant une baisse supplémentaire des taux, et ainsi de suite. Les institutions financières perdirent de l'argent à cause de la baisse des taux, et la position des compagnies d'assurances fut dégradée sur les risques qu'elles avaient choisi de ne pas couvrir.

Ce qu'il faut retenir de ces quelques exemples est la nécessité d'avoir une vision globale des marchés financiers et de comprendre les risques inhérents aux situations dans lesquelles les intervenants du marché adoptent tous la même stratégie.

Le financement de court terme peut être source de problèmes

Les risques de taux liés au financement d'engagements de long terme par des ressources courtes sont aujourd'hui bien compris. Les banques gèrent en général ces risques prudemment en utilisant des swaps et des dérivés de taux.

En revanche, les risques de liquidité associés à ce type de financement sont plus sérieux que les risques de taux, mais ont fait l'objet d'une attention moindre jusqu'à la crise de 2007. Les problèmes surviennent quand le marché perd confiance dans une institution financière (à tort ou à raison) ; il devient alors très difficile pour celle-ci de renouveler ses financements de court terme. En temps normal, une institution financière peut émettre du papier commercial à un mois le 1er juillet, le rembourser le 1^{er} août avec une nouvelle émission qu'elle remboursera le 1^{er} septembre, et ainsi de suite. Mais quand les potentiels acheteurs du papier n'ont plus confiance, les émissions deviennent délicates, voire impossibles.

C'est ce qui est arrivé à de nombreuses institutions (Lehman Brothers, Northern Rock) lors de la crise financière, en particulier à celles qui détenaient des positions importantes en tranches de produits dérivés subprimes. Quand les investisseurs ont perdu confiance dans le marché immobilier, il est devenu impossible de renouveler le papier commercial. De nombreuses autres institutions qui traitaient les produits titrisés décrits au chapitre 8 ont subi les mêmes problèmes de liquidité. Une conséquence de la crise du crédit a été de faire prendre conscience aux régulateurs de l'importance de ce type de difficultés, conduisant à contrôler à la fois les capitaux des banques et leur liquidité.

La transparence du marché est importante

Une des leçons de la crise du crédit de 2007 concerne l'importance de la transparence du marché. Avant le déclenchement de cette crise, les traders traitaient des produits structurés sophistiqués sans avoir une information très précise sur ce qu'étaient les sous-jacents

des contrats. Ils se fondaient essentiellement sur le rating du produit qu'ils échangeaient. Rétrospectivement (c'est toujours plus facile !), il apparaît que ces investisseurs auraient dû être beaucoup plus exigeants quant à l'information donnée sur les produits traités et notamment sur les sous-jacents.

La crise des subprimes d'août 2007 a eu un effet dévastateur sur la confiance accordée par les investisseurs à pratiquement tous les produits structurés. Ils ont alors cherché à sortir du marché… à tout prix. Bien sûr, cela a entraîné une quasi-rupture et certaines tranches de produits titrisés ne trouvaient plus preneurs, sauf à des prix très en deçà de la valeur théorique. Cette fuite vers la qualité a engendré un élargissement important des spreads de crédit. Si les marchés avaient été un peu plus transparents et si les investisseurs avaient su exactement ce qu'ils achetaient, il y aurait quand même eu des pertes, mais probablement pas ce phénomène de quasi-disparition (même temporaire) du marché.

Gérez soigneusement les incitations

Une autre leçon essentielle de la crise de 2007-2008 concerne les incitations. Les systèmes de bonus ont favorisé très largement la performance à court terme et donc la prise de risques. Certaines institutions ont aujourd'hui adopté des systèmes d'étalement des bonus dans le temps (par exemple sur cinq ans). Cela a des avantages évidents, puisque les incitations à produire un bon résultat à tout prix sur le court terme (au détriment du risque à long terme) sont réduites.

Quand des prêts sont titrisés, il est important que ceux qui les accordent et ceux qui achètent les produits titrisés adossés à ces prêts « regardent dans la même direction », c'est-à-dire qu'ils aient les mêmes intérêts. Une façon de s'assurer que c'est bien le cas consiste à imposer à l'émetteur du prêt de conserver en portefeuille une partie de celui-ci ou une part de chaque tranche du produit structuré adossé à ce prêt.

N'ignorez jamais le management du risque

Quand les temps sont favorables (ou apparaissent comme tels), il y a une tendance naturelle à supposer que cela va continuer ainsi et à négliger les résultats des stress tests ou d'autres analyses entreprises par les cellules de gestion des risques. Les exemples de risk managers dont la voix n'a pas été entendue (ou plutôt écoutée) avant le début de la crise de 2007 sont nombreux. Le commentaire de Chuck Prince, CEO de Citigroup, en juillet 2007, est un exemple parfait de ce qu'il ne faut pas faire :

« Quand la musique s'arrête, en termes de liquidité, les choses deviennent compliquées. Mais tant que la musique joue, nous devons rester debout et danser. Et, pour l'instant, la musique joue encore. »

M. Prince a été remercié un peu plus tard dans l'année et les pertes de Citigroup consécutives à la crise du crédit avoisinent les 50 milliards de dollars.

37.3 Leçons pour les entreprises non financières

Nous abordons maintenant les recommandations destinées aux entreprises non financières.

Soyez sûr de comprendre ce que vous faites

Les entreprises ne devraient jamais réaliser des transactions ou adopter une stratégie dont elles ne comprennent pas tous les tenants et aboutissants. C'est une évidence, mais il est surprenant de constater à quel point il est courant qu'un trader employé par une entreprise non financière avoue, après avoir subi une perte importante, qu'il n'avait pas bien compris ce qui se passait, ou clame qu'il a été « roulé » par les banques d'investissement. C'est ce que firent les traders d'Hammersmith et Fulham qui, en dépit des positions énormes qu'ils détenaient, étaient, de manière surprenante, mal informés sur le fonctionnement réel des swaps et autres dérivés de taux qu'ils traitaient régulièrement.

Lorsqu'un directeur financier ne comprend pas la transaction proposée par un de ses collaborateurs, celle-ci ne devrait pas être avalisée. Une règle de bon sens est que si une opération (ou sa justification) est si compliquée qu'elle ne peut être comprise par le directeur, elle est presque sûrement inadaptée aux besoins de l'entreprise. Les transactions de Procter & Gamble et Gibson Greetings n'auraient pas été réalisées si ce critère avait été appliqué.

Si vous voulez vous assurer que vous avez bien compris le fonctionnement d'un produit, évaluez-le ! Lorsqu'une entreprise n'a pas, en interne, les ressources suffisantes pour cette évaluation, elle ne devrait pas utiliser le produit en question. En pratique, les entreprises se fient le plus souvent aux banques d'investissement pour les questions d'évaluation. C'est dangereux, comme ont pu le constater les sociétés Procter & Gamble et Gibson Greetings quand elles ont voulu déboucler leurs positions. Elles étaient confrontées aux prix élaborés par les modèles internes de la Bankers Trust, qu'elles n'avaient pas la possibilité de vérifier.

Attention : un opérateur en couverture peut devenir un un spéculateur

Une constatation banale est que la couverture est ennuyeuse, alors que la spéculation est excitante. Quand une firme recrute un trader pour gérer le risque de change ou de taux, le scénario qui suit est susceptible de se produire. Au début, le trader fait consciencieusement son travail et gagne la confiance de ses supérieurs. Il évalue correctement les risques et les couvre. Au fur et à mesure que le temps passe, il se persuade qu'il peut prévoir l'évolution du marché. Lentement, il se transforme en spéculateur. Au début, tout se passe bien, puis une perte survient. Pour se refaire, le trader double la mise. De nouvelles pertes interviennent. Cette évolution peut conduire au désastre.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, des limites claires doivent être posées par rapport aux risques qui sont susceptibles d'être pris. Des procédures de contrôle doivent être mises en œuvre pour s'assurer que les limites sont respectées. L'élaboration de la stratégie d'une entreprise devrait débuter par une analyse des risques auxquels

la société fait face sur les marchés des changes, des taux, des matières premières, etc. Une décision devrait ensuite être prise concernant les moyens de ramener ces risques à un niveau acceptable. C'est un signe clair de dysfonctionnement quand la stratégie ne découle pas directement de l'exposition aux risques de la firme.

Ne considérez pas le service Trésorerie comme un centre de profits

Il y a eu, dans les deux décennies qui viennent de s'écouler, une tendance à considérer le département Trésorerie comme un centre de profits. Cela peut paraître tout à fait recommandable. Le trésorier est motivé pour réduire les coûts de financement et gérer les risques de la manière la plus profitable. Le problème est que les possibilités de réaliser des profits sont très limitées pour un trésorier. Lorsqu'il collecte des fonds et replace le surplus, il le fait sur un marché efficient. Il ne peut donc accroître le résultat net qu'en prenant des risques supplémentaires. Le programme de couverture des risques de l'entreprise laisse néanmoins de la marge au trésorier pour prendre des décisions judicieuses permettant d'augmenter les profits. Mais il faut garder à l'esprit qu'une stratégie de couverture a, avant tout, comme objectif de réduire les risques, pas d'augmenter les profits espérés. Comme nous l'avons montré au chapitre 3, la décision de couvrir une position conduit à un résultat inférieur à celui qui aurait été obtenu sans couvrir environ une fois sur deux. Le danger consistant à considérer la Trésorerie comme un centre de profits se traduit par l'incitation, pour le trésorier, à se transformer en spéculateur. Un résultat identique à celui qui a été observé pour le comté d'Orange en Californie, Procter & Gamble ou Gibson Greetings est alors possible.

Résumé

Les pertes énormes subies à la suite de l'utilisation d'actifs dérivés ont conduit bon nombre de trésoriers d'entreprises à la plus grande circonspection. Depuis la série de problèmes survenus en 1994 et 1995, certaines entreprises non financières ont élaboré des plans de réduction, voire d'élimination, de l'utilisation des dérivés. C'est regrettable car ces instruments financiers procurent des moyens très efficaces de gestion des risques.

La genèse des catastrophes évoquées dans ce chapitre, déjà mentionnée au chapitre 1, réside dans la possibilité d'utiliser les actifs dérivés non seulement pour réduire les risques, mais aussi pour en prendre. La plupart des pertes se sont concrétisées à cause d'une utilisation inappropriée de ces actifs. Des employés dont la mission consistait à couvrir les risques de leur entreprise se sont transformés en spéculateurs.

La leçon essentielle à tirer de ces désastres est l'importance du **contrôle interne**. La direction d'une entreprise devrait donc élaborer une politique claire et dénuée d'ambiguïté quant à l'utilisation des actifs dérivés. Elle devrait aussi transmettre des directives explicites aux employés à propos des possibilités qu'ils ont de prendre des positions sur le sens d'évolution de certaines variables de marché. De même, la direction devrait instituer des procédures de contrôle de façon à s'assurer que les directives annoncées sont bien appliquées. Donner aux individus la possibilité de traiter des actifs dérivés sans une surveillance scrupuleuse des risques qui sont pris est un passeport pour la catastrophe.

Références complémentaires

DUNBAR N., *Inventing Money: The Story of Long-Term Capital Management and The Legends Behind It*, Wiley, Chichester, 2000.

JORION P., *Big Bets Gone Bad: Derivatives and Bankruptcy in Orange County*, Academic Press, New York, 1995.

JORION P., "How Long-Term Lost Its Capital", *RISK*, septembre 1999.

PERSAUD A. D. (ed.), *Liquidity Black Holes: Understanding, Quantifying and Managing Financial Liquidity Risk*, Risk Books, London, 2003.

SORKIN A. R., *Too Big to Fail*, Penguin, New York, 2009.

TETT, G., *Fool's Gold : How the Bold Dream of a Small Tribe at J. P. Morgan Was Corrupted by Wall Street Greed and Unleashed a Catastrophe,* Free Press, New York, 2009.

Glossaire

Accord de taux futur. Voir *Forward Rate Agreement.*

Actif d'investissement. Actif considéré par une majorité d'investisseurs comme un moyen d'investir.

Actif de consommation. Actif détenu à des fins de consommation plutôt qu'à des fins d'investissement.

Ajustement de convexité. Terme qui peut faire référence à l'ajustement nécessaire à la conversion d'un taux d'intérêt futures en taux d'intérêt forward.

AMF (Autorité des marchés financiers). Autorité française de régulation des marchés financiers. Elle est l'équivalent de la SEC américaine.

Analyse de scénario. Analyse des effets des différentes possibilités de variation des caractéristiques du marché sur la valeur d'un portefeuille.

Appel de marge. Demande de reconstitution du compte de marge.

Approximation de Black. Procédure d'approximation développée par Fisher Black pour l'évaluation des options américaines sur des actions versant des dividendes.

Arbitrage. Stratégie profitant d'incohérences momentanées entre les prix de plusieurs actifs ou contrats.

Arbitrage sur indice. Opération d'arbitrage impliquant une position sur des actions composant un indice et une position sur un contrat futures ou des options portant sur cet indice.

Arbitragiste. Investissseur spécialisé dans les opérations d'arbitrage.

Arbre binomial. Arbre réprésentant les évolutions possibles du prix d'un actif dans un modèle binomial.

Assurance de portefeuille. Utilisation d'options ou de stratégies d'achat-vente, notamment sur indices, pour couvrir le risque de perte de valeur d'un portefeuille.

Asymétrie de volatilité. Terme qui décrit un smile de volatilité non symétrique.

Automate. Procédure grâce à laquelle les négociations sur le marché sont automatiquement générées et transmises par ordinateur.

Back-testing. Test d'un modèle à l'aide de données historiques.

Bâle II. Procédures rénovées de calcul des capitaux propres requis de la part des banques, instaurées à partir de 2004.

Base. Différence entre le prix spot et le prix futures.

Bêta. Mesure du risque systématique (non diversifiable) d'un actif.

Bid-ask spread. Voir *Fourchette de prix.*

Billet de trésorerie. À court terme, bon au porteur sans coupon émis par les entreprises pour financer sa dette.

Bons du Trésor. Bons émis par le gouvernement pour financer sa dette.

Bootstrap. Méthode permettant le calcul de la courbe des taux zéro-coupon à partir des données de marché de produits couponnés.

Broker. Prestataire de services d'investissement qui exécute les ordres d'investisseurs en échange d'une commission.

Butterlfy spread. Combinaison constituée d'une position longue sur un call de prix d'exercice faible et un call de prix d'exercice élevé et d'une position courte sur deux calls de prix d'exercice intermédiaire.

Calendrier des jours fériés. Calendrier définissant les jours fériés afin de préciser les dates de paiement d'un swap.

Calibration. Méthode consistant à extraire la valeur des paramètres d'un modèle du prix des options activement traitées sur le marché.

Call. Contrat donnant le droit d'acheter un actif à une date future donnée et à un prix convenu.

Call asset-or-nothing. Option digitale délivrant un montant égal au prix de l'actif sous-jacent si celui-ci est supérieur au prix d'exercice à l'échéance et rien sinon.

Call cash-or-nothing. Option délivrant un payoff prédéterminé d'un montant fixe dans le cas où le prix du sous-jacent termine au-dessus du prix d'exercice et zéro autrement.

Call couvert. Combinaison constituée d'une position courte sur un call et d'une position longue sur le sous-jacent.

Call sur moyenne de prix. Option dont le payoff est le maximum entre zéro et la différence entre le prix d'exercice et le prix moyen de l'actif sous-jacent.

Callable bond. Obligation intégrant une clause de remboursement anticipé à des conditions prédéterminées.

Cap de taux d'intérêt. Option qui délivre un payoff lorsqu'un taux d'intérêt spécifié dépasse un certain seuil. Ce taux d'intérêt est un taux variable régulièrement modifié.

Caplet. Une des options composant un cap de taux d'intérêt.

CAPM. Voir *MEDAF.*

Cash-flow mapping. Voir *Procédure d'ajustement des flux.*

Cash-settlement. Voir *Dénouement en cash.*

CAT bond. Voir *Obligation catastrophe.*

CDD (Cooling Degree Days). Voir *Degrés-jour de climatisation.*

CDO. Voir *Collateralized Debt Obligation.*

CDO synthétique. CDO créé à partir d'un portefeuille de CDS.

CDS. Voir *Swap de défaut.*

CDS sur panier d'obligations. CDS avec plusieurs entités de référence.

Chambre de compensation. Institution qui garantit la bonne fin des opérations pour les produits dérivés négociés sur les marchés organisés.

Cheapest. Voir *Moins chère à livrer.*

Classe d'options. Toutes les options du même type (call ou put) portant sur le même sous-jacent.

CMO. Voir *Collateralized Mortgage Obligation.*

Collar. Voir *Collar de taux d'intérêt.*

Collar de taux d'intérêt. Combinaison d'un cap et d'un floor.

Collateralized Debt Obligation (CDO). Moyen de gestion du risque de crédit. Plusieurs tranches sont créées à partir d'un portefeuille de créances avec des règles définissant comment les défauts sont supportés par les différentes tranches.

Collateralized Mortgage Obligation. Type de créance hypothécaire pour laquelle les investisseurs sont divisés en classes ayant chacune des règles de paiement différentes.

Combinaison. Stratégie nécessitant différentes positions sur des calls et des puts de même sous-jacent.

Composition continue. Façon de coter les taux d'intérêt correspondant à la situation limite où la fréquence de composition tend vers l'infini.

Confirmation. Document confirmant les termes d'un accord verbal d'échange entre deux contreparties sur un marché de gré à gré.

Contango. Voir *Report.*

Contrat forward. Engagement ferme à acheter ou à vendre le sous-jacent à une date future donnée pour un prix convenu.

Contrat futures. Contrat faisant l'objet d'un mark to market quotidien, engageant son détenteur à acheter ou à vendre le sous-jacent au cours d'une période future donnée pour un prix convenu.

Contrat range-forward. Combinaison constituée par la vente d'un put et l'achat d'un call ou bien par la vente d'un call et l'achat d'un put de prix d'exercice différents.

Contreparties. Parties contractantes dans une transaction financière.

Contrôle de la différence. Technique permettant d'améliorer la performance de procédures numériques dans certaines situations.

Convexité. Dans le cadre des produits de taux d'intérêt, mesure de la courbure de la relation entre les prix d'obligations et les taux actuariels.

Corrélation des défauts. Mesure de la tendance pour deux entreprises distinctes à faire toutes deux défaut dans un intervalle de temps réduit.

Cotation électronique. Système d'échange organisé par ordinateur.

Coupon. Montant des intérêts payés à chaque échéance par une obligation.

Coupon couru. Intérêt accumulé depuis le dernier détachement de coupon.

Courbe des taux. Voir *Structure par terme des taux d'intérêt.*

Courbe LIBOR. Courbe des taux d'intérêt LIBOR en fonction de la maturité.

Coût de portage. Somme des coûts de stockage et des coûts de financement d'un actif diminuée des revenus qu'il génère.

Coûts de stockage. Coûts liés au stockage des matières premières.

Coûts de transaction. Coûts de réalisation d'une transaction (commission plus la différence entre le prix obtenu et le milieu du spread entre le prix offert et le prix demandé).

Couverture. Opération visant à réduire une exposition au risque.

Couverture courte. Couverture consistant à prendre une position courte sur un futures.

Couverture croisée. Couverture de l'exposition au prix d'un actif avec un contrat portant sur un autre actif.

Couverture delta-neutre. Technique de couverture visant à rendre un portefeuille insensible à des petites variations du prix du sous-jacent.

Couverture dynamique. Procédure de couverture d'une position en options à l'aide de sous-jacent, consistant à modifier régulièrement la position détenue en sous-jacent, de sorte à maintenir une position delta-neutre.

Couverture longue. Adoption d'une position longue sur futures (afin de couvrir une position courte sur le marché du sous-jacent).

Couverture statique. À l'opposé de la couverture dynamique, la couverture est définie dès le départ et n'est plus jamais ajustée.

Covariance. Mesure de la dépendance linéaire entre deux variables (égale à la corrélation entre les variables *multipliée* par le produit de leurs écart-types).

Covered call. Voir *Call couvert.*

Créance hypothécaire. Titre qui donne, à son détenteur, droit à une part des flux de trésorerie produits par un pool de prêts hypothécaires.

Credit Default Swap. Voir *Swap de défaut.*

C-VaR. Voir *Expected Shortfall.*

Date de maturité. Date de la fin de vie du contrat.

Date ex-dividende. La date ex-dividende est fixée en même temps que le montant du dividende. Les investisseurs détenant des actions immédiatement avant la date ex-dividende toucheront le dividende.

Décompte des jours. Convention nécessaire à la définition des contrats de swap et des produits de taux.

Degrés-jour de climatisation. Mesure de température égale au maximum entre zéro et la différence entre 65° Fahrenheit et la température moyenne de la journée.

Delta. Sensibilité de la valeur d'une option aux variations de prix du sous-jacent.

Dénouement en cash. Procédure de dénouement des contrats par échange monétaire plutôt que par la livraison de l'actif sous-jacent.

Déport. Marché dans lequel les prix futures augmentent avec la maturité.

Déport normal. Lorsque le prix futures est inférieur au prix spot futur espéré (situation symétrique d'un *contango*).

Deposit. Marge initiale ou dépôt de garantie : somme d'argent exigée d'un trader de futures au moment de sa prise de position.

DerivaGem. Logiciel d'évaluation de produits dérivés sous Excel accompagnant l'ouvrage.

Dérivé. Voir *Produit dérivé*.

Dérivé climatique. Produit dérivé dont le payoff dépend des conditions climatiques.

Dérivé de crédit. Actif dérivé dont le payoff dépend de la solvabilité d'une ou plusieurs entités de référence.

Dérivé de taux d'intérêt. Produit dérivé dont le payoff dépend de l'évolution des taux d'intérêt.

Distribution implicite. Distribution de probabilité de la valeur d'un actif déduite de façon implicite de la valeur constatée des options sur le marché.

Distribution log-normale. Voir *Loi log-normale*.

Distribution normale. Loi normale ou gaussienne dont la densité est une courbe en cloche.

Dividende. Paiement effectué au détenteur d'une action, généralement monétaire, mais se faisant parfois en actions.

Dividende en actions. Dividende payé par attribution d'actions.

Division de titres. Conversion de chaque action existante en plusieurs actions nouvelles. La valeur de chaque action est alors plus faible, mais la capitalisation boursière reste inchangée.

Droit de souscription. Titre permettant aux anciens actionnaires d'acheter des actions nouvellement émises à un certain prix.

Duration. Mesure de la durée moyenne d'attente pour percevoir les flux d'une obligation.

Duration matching. Voir *Immunisation de portefeuille*.

Duration modifiée. Dérivée de la duration, elle mesure la sensibilité d'une obligation aux variations des taux d'intérêt. Cette modification du calcul de la duration permet de prendre en compte la fréquence de capitalisation du taux.

Échéance. Fin de vie d'un contrat.

Entité de référence. Désigne, dans un CDS, l'entreprise pour laquelle le risque de défaut est couvert.

Espérance. Valeur moyenne d'une variable aléatoire obtenue, dans le cas discret, par la somme des valeurs possibles pondérées par leurs probabilités.

EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate). Taux offert par les banques pour les eurodevises sur le marché de la zone euro, c'est-à-dire le taux auquel une banque est disposée à prêter à d'autres banques.

Eurodollar. Dollar déposé dans une banque américaine ou étrangère en dehors des États-Unis.

Évaluation risque-neutre. Évaluation d'une option ou d'un produit dérivé en supposant que l'on se trouve dans un univers risque-neutre.

EWMA. Voir *Moyenne mobile à pondération exponentielle* (*Exponentially Weighted Moving Average*).

Exercice anticipé. Exercice d'une option avant son échéance.

Expected Shortfall. Mesure de l'espérance de perte conditionnellement à une réalisation de la perte supérieure à un percentile donné de la distribution.

Exposition. Perte maximale liée au défaut d'une contrepartie.

Facial. Voir *Nominal.*

Facteur de concordance. Facteur permettant de déterminer le prix reçu par le vendeur d'un contrat futures sur obligations au dénouement en échange de la livraison de l'obligation.

FAS. Norme comptable.

Floor de taux d'intérêt. Option qui délivre un payoff lorsqu'un taux d'intérêt spécifié devient inférieur à un certain niveau. Ce taux d'intérêt est un taux variable régulièrement modifié.

Floorlet. Une des options composant un floor de taux d'intérêt.

Fonction de remboursement par anticipation. Fonction estimant le rythme de remboursement par anticipation du principal d'un portefeuille de créances hypothécaires à partir d'autres variables.

Fonction de répartition. Fonction qui associe à $x$la probabilité qu'une variable suivant une loi donnée soit inférieure ou égale à x.

Forward. Voir *Contrat forward.*

Forward Rate Agreement. Accord négocié sur le marché OTC, selon lequel une des deux parties paiera à l'autre un taux d'intérêt convenu sur un principal donné, pendant une période future spécifiée.

Forward start option. Voir *Option à déclenchement différé.*

Fourchette de prix. Écart entre le prix offert le plus élevé (prix bid) et le prix demandé le plus faible (prix ask).

FRA. Voir *Forward Rate Agreement.*

Fréquence de composition des intérêts. Définit la façon dont le taux d'intérêt est mesuré.

Futures. Voir *Contrat futures.*

Futures sur bons du Trésor. Contrat futures reposant sur des bons du Trésor.

Futures sur Eurodollar. Contrat futures portant sur un taux Eurodollar.

Futures sur indice. Contrat futures dont le sous-jacent est un indice de marché.

Futures sur indice d'actions. Futures dont le sous-jacent est un indice d'actions.

Gamma. Sensibilité du delta d'un portefeuille aux variations de prix du sous-jacent.

Grecques. Voir *Lettres grecques.*

HDD (Heating Degree Days). Voir *Degrés-jour de chauffage.*

Hedger. Voir *Opérateur en couverture.*

Hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Hypothèse selon laquelle il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur le marché.

Hypothèse d'efficience des marchés. Hypothèse selon laquelle les prix des actifs reflètent l'information disponible.

Immunisation de portefeuille. Procédure consistant à faire coïncider la duration moyenne des actifs et des passifs du portefeuille d'une institution financière.

Inception profit. Voir *Profit initial.*

Indice d'actions. Indice reproduisant la valeur d'un portefeuille d'actions.

Induction arrière. Procédé consistant à commencer par la date terminale d'un arbre, puis à revenir vers la date initiale pour l'évaluation d'options.

Instrument dérivé. Voir *Produit dérivé.*

Interest Only. Crédit hypothécaire (MBS) démembré, dont le porteur ne perçoit que les intérêts.

Intermédiaire financier. Banque ou toute autre institution financière qui sert d'intermédiaire aux différents acteurs de l'économie pour leurs échanges de capitaux.

IO. Voir *Interest Only.*

Kurtosis. Mesure d'applatissement de la distribution d'une variable aléatoire. Par exemple, si sa valeur est élevée, la courbe peut être plus pointue et les queues de distribution plus épaisses que celles d'une loi normale.

LEAPS (Long-term Equity Anticipation Securities). Options, dites « longues », portant sur des actions ou un indice, c'est-à-dire dont l'échéance est éloignée.

Lettres grecques. Paramètres de couverture dont font partie le delta, le gamma, le thêta, le rhô ou le vega (qui n'est pas une lettre grecque).

LIBID (London Interbank Bid Rate). Taux demandé par les banques sur les eurodevises, c'est-à-dire taux auquel une banque est disposée à emprunter auprès d'autres banques (au contraire du LIBOR qui est le taux offert).

LIBOR (London Interbank Offered Rate). Taux offert par les banques pour les eurodevises, c'est-à-dire taux auquel une banque est disposée à prêter à d'autres banques.

LIBOR in arrears swap. Voir *Swap à flux décalés.*

Limite de position. Position maximale qu'un opérateur de marché (ou un groupe d'opérateurs agissant ensemble) est autorisé à prendre.

Limite d'exercice. Nombre maximal de contrats qui peuvent être exercés par un individu (ou un groupe d'individus opérant ensemble) pendant une période de cinq jours consécutifs.

Limites de variations. Variations maximales journalières des cours fixées par les autorités de marché.

Locals. Terme anglo-saxon qui désigne, sur le marché, des négociateurs individuels qui opèrent pour leur propre compte (au contraire des courtiers).

Loi log-normale. Une variable suit une distribution de probabilité log-normale lorsque le logarithme de cette variable suit une loi normale.

Marché à terme inversé. Marché où les prix des futures décroissent avec la maturité, c'est-à-dire où les futures à échéance proche sont plus chers que ceux dont l'échéance est plus éloignée.

Marché de gré à gré. Marché ou les transactions s'effectuent de gré à gré, en interaction bilatérale, c'est-à-dire directement entre le vendeur et l'acheteur, à l'opposé du marché organisé.

Marché organisé. Marché où les transactions sont organisées en interaction multilatérale, à l'aide d'un carnet d'ordres, et où les contrats sont standardisés.

Marché OTC. Marché *over-the-counter* ; voir *Marché de gré à gré.*

Marge. Voir *Deposit.*

Marge à maintenir. L'investisseur ne fait l'objet d'un appel de marge qu'à partir du moment où le montant sur le compte passe sous le niveau requis de la marge de maintenance.

Marge initiale. Voir *Deposit.*

Market-maker (ou teneur de marché). Opérateur de marché qui fournit à tout instant des prix à l'achat et à la vente pour un actif.

Marking to market. Pratique de réévaluation permanente (ou quotidienne) d'un instrument financier. Il permet notamment de calculer les appels de marge.

Matrice variance-covariance. Matrice présentant les variances de nombreuses variables de marché ainsi que leurs covariances.

MBS (Mortgage Backed Security). Voir *Créances hypothécaires.*

MEDAF. Modèle d'évaluation des actifs financiers (CAPM ou *Capital Asset Pricing Model* en anglais). Modèle qui lie la rentabilité espérée d'un actif à son bêta.

Modèle binomial. Modèle d'évolution du prix des actifs, dans lequel le prix est observé à des dates successives. Entre deux dates, seuls deux mouvements sont susceptibles de se produire.

Modèle de Black. Extension du modèle de Black-Scholes à l'évaluation des options européennes sur contrats futures.

Modèle de Black-Scholes. Modèle en temps continu d'évaluation des options européennes sur actions développé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton.

Moins chère à livrer. Obligation du gisement la moins chère à livrer dans le cas d'un contrat futures sur obligations.

Mortgage Backed Security. Voir *Créances hypothécaires.*

Moyenne géométrique. Racine n-ième du produit de $n$nombres.

Moyenne mobile à pondération exponentielle. Modèle de prévision de la valeur d'une variable fondé sur des données historiques et un schéma de pondération exponentiel. Modèle parfois appliqué à la variance quotidienne dans le calcul de la VaR.

Négociation à la criée. Système où les négociateurs échangent par la voix et des signes dans un lieu physique.

Niveau de retour à la moyenne. Niveau vers lequel la valeur d'une variable de marché (telle qu'un taux d'intérêt) tend à revenir.

Nominal. Valeur à partir de laquelle on calcule les intérêts pour une obligation. On parle aussi de valeur *faciale* ou de valeur *au pair.*

Notation. Mesure de la solvabilité d'une entreprise calculée par une agence de rating.

Notionnel. Montant à partir duquel on calcule les règlements périodiques dans un swap de taux d'intérêt. Ce montant est « notionnel » car il ne s'échange jamais entre les parties du swap.

Obligation à coupon zéro. Obligation ne délivrant aucun coupon.

Obligation catastrophe. Obligation pour laquelle les intérêts et éventuellement le principal sont réduits dans le cas où les pertes liées à des sinistres dépassent un certain montant.

Obligation convertible. Obligation émise par une entreprise pouvant être convertie en actions pendant certaines périodes, à une parité déterminée.

OCC (Options Clearing Compensation). Voir *Chambre de compensation.*

Opérateurs en couverture. Individu effectuant des opérations visant à réduire une exposition au risque.

Option. Droit d'acheter ou de vendre un actif.

Option à déclenchement différé. Option n'entrant en activité qu'à une date ultérieure.

Option à la monnaie. Option dont le prix d'exercice est égal au (ou proche du) prix de l'actif sous-jacent.

Option à prix d'exercice moyen. Option dont le payoff est déterminé par la différence entre le prix final et le prix moyen du sous-jacent.

Option américaine. Option qui peut être exercée à tout moment jusqu'à la date d'échéance.

Option asiatique. Option dont le payoff dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent observé sur une période déterminée.

Option au choix. Option pour laquelle le détenteur peut, après un certain délai initialement spécifié, choisir si c'est un call ou un put.

Option barrière. Option dont le payoff dépend du franchissement d'un certain seuil (la barrière) par le prix du sous-jacent pendant la vie de l'option.

Option bermudienne. Option américaine dont l'exercice anticipé est limité à certaines dates.

Option composée. Option sur option.

Option d'achat. Voir *Call.*

Option dans la monnaie. Option dont la valeur intrinsèque est positive : pour un call, lorsque le sous-jacent est supérieur au prix d'exercice ; pour un put, lorsqu'il est inférieur.

Option de taux d'intérêt. Option dont le payoff dépend du niveau des taux d'intérêt.

Option de vente. Voir *Put.*

Option d'échange. Option d'échange d'un actif contre un autre.

Option digitale. Option présentant un payoff discontinu, comme les options asset-or-nothing ou cash-or-nothing.

Option down-and-in. Option qui ne commence son existence qu'une fois que le prix du sous-jacent descend jusqu'à un prix déterminé.

Option down-and-out. Option qui cesse d'exister dès que le prix du sous-jacent descend jusqu'à un prix déterminé.

Option en dehors de la monnaie. Option dont la valeur intrinsèque est nulle et qui n'est pas à la monnaie : pour un call, lorsque le sous-jacent est inférieur au prix d'exercice ; pour un put, lorsqu'il est supérieur.

Option européenne. Option ne pouvant être exercée qu'à l'échéance du contrat.

Option exotique. Option disposant de caractéristiques spécifiques la distinguant des contrats vanille.

Option Flex. Option échangée sur un marché, mais dont certaines des caractéristiques diffèrent de celles des contrats standardisés.

Option lookback. Option dont on calcule le payoff en retenant un prix d'exercice égal au cours maximum (pour un put) ou minimum (pour un call) atteint par un actif au cours de la vie de l'option.

Option path-dependent. Option dont le payoff dépend de la trajectoire suivie par le sous-jacent, et non de sa valeur finale uniquement.

Option rainbow. Option dont le payoff dépend d'au moins deux variables sous-jacentes.

Option réelle. Option impliquant des actifs réels (et non financiers), par exemple des terrains, machines, etc.

Option shout. Option européenne pour laquelle le détenteur de l'option peut « appeler » une fois sa contrepartie pendant la durée de vie du contrat. À la date d'échéance, le détenteur reçoit la valeur la plus élevée entre le payoff classique d'une option européenne et la valeur intrinsèque de l'instant de l'appel.

Option sur action. Option dont le sous-jacent est une action.

Option sur devises. Option portant sur un taux de change.

Option sur futures Option dont le sous-jacent est un contrat future.

Option sur indice. Option dont le sous-jacent est un indice de marché.

Option sur obligation. Option dont le sous-jacent est une obligation.

Option sur panier. Option dont le payoff dépend de la valeur d'un portefeuille d'actifs.

Option swing. Option d'énergie pour laquelle le niveau de consommation est compris entre un minimum et un maximum. En général, il existe un nombre maximal de changements de régime autorisés pendant la période de livraison.

Option synthétique. Option créée par la vente ou l'achat de l'actif sous-jacent au fur et à mesure de l'évolution de sa valeur.

Option take-and-pay. Voir *Option swing*.

Option up-and-in. Option qui ne devient active que lorsque l'actif sous-jacent atteint un niveau prédéfini.

Option up-and-out. Option qui cesse d'exister dès que l'actif sous-jacent atteint un niveau prédéfini.

Ordre à cours limité. Ordre de Bourse fixant le prix maximal (minimal) qu'un acheteur est disposé à payer (recevoir) pour acheter (vendre).

Package. Portefeuille constitué de calls européens classiques, de puts européens classiques, de contrats forward, de liquidités et de l'actif sous-jacent.

Parité call-put. Relation entre la valeur d'un call européen et celle d'un put européen dont les sous-jacent, prix d'exercice et échéance sont identiques.

Payoff. Gain réalisé par le détenteur d'une option ou d'un produit dérivé à la date d'échéance.

Plain vanilla. Terme utilisé pour décrire des produits classiques.

PO. Voir *Principal Only*.

Point de base. Généralement utilisé dans le cadre des taux d'intérêt, un point de base équivaut à 1 centième de pour-cent (0,01 %).

Pondération exponentielle. Schéma de pondération dans lequel les pondérations diminuent exponentiellement à mesure qu'on remonte dans le temps.

Portefeuille delta-neutre. Portefeuille dont le delta est nul et dont la valeur ne varie donc pas en cas de petites variations de prix du sous-jacent.

Portefeuille gamma-neutre. Portefeuille dont le gamma est nul.

Portefeuille vega-neutre. Portefeuille dont le vega est nul.

Position courte. Position impliquant la vente d'un actif.

Position liée. Voir *Package*.

Position longue. Position impliquant l'achat d'un actif.

Position ouverte. Nombre total de positions longues (ou courtes) sur un contrat (*open interest* en anglais).

Position nue. Position non couverte, par exemple une position courte sur un call non combinée avec une position longue sur le sous-jacent.

Premium. Prix d'une option.

Principal. Valeur nominale d'un emprunt.

Principal Only. Crédit hypothécaire (*MBS*) démembré dont le porteur ne perçoit que le principal.

Prix ask. Voir *Prix offert*.

Prix bid. Voir *Prix demandé*.

Prix d'exercice. Prix auquel on peut acheter ou vendre l'actif sous-jacent en exerçant une option.

Prix de compensation. Cours calculé après chaque séance de Bourse sur la base des cours cotés en fin de séance. Il sert pour les appels de marge des contrats futures.

Prix de livraison. Prix sur lequel les contreparties se sont entendues pour échanger à l'échéance d'un contrat forward.

Prix demandé. Prix demandé le plus faible (auquel il est possible d'acheter un actif sur le marché).

Prix d'exercice. Prix convenu auquel le sous-jacent peut être acheté ou vendu dans un contrat d'option.

Prix forward. Prix de livraison d'un contrat forward pour lequel la valeur du contrat est nulle.

Prix futures. Prix de livraison actuellement applicable dans le cas d'un contrat futures.

Prix offert. Prix offert le plus élevé (auquel il est possible de vendre un actif sur le marché).

Prix pied de coupon. Prix coté d'une obligation. Pour déterminer le prix d'échange de l'obligation, il faut ajouter le coupon couru.

Prix spot. Prix pour une livraison immédiate.

Probabilité de défaut. Mesure de la probabilité de défaut d'une entreprise au cours d'une période future, conditionnelle ou non à l'absence de défaut antérieur.

Procédure d'ajustement des flux. Procédure consistant à représenter un instrument sous la forme d'un portefeuille d'obligations zéro-coupon en vue du calcul de sa VaR.

Procédure numérique. Méthode d'évaluation d'options lorsqu'aucune formule analytique n'est disponible.

Produit dérivé. Instrument financier dont le prix dépend d'une autre variable qui peut être le prix d'un actif (appelé alors sous-jacent).

Profit initial. Profit créé en vendant un produit dérivé plus cher que sa valeur théorique. On utilise aussi le terme anglo-saxon *inception profit*.

Protective put. Voir *Put de protection*.

Put. Contrat donnant le droit de vendre un actif à une date future donnée et à un prix convenu.

Put asset-or-nothing. Option digitale délivrant un montant égal au prix de l'actif sous-jacent si celui-ci est inférieur au prix d'exercice à l'échéance et rien sinon.

Put cash-or-nothing. Option délivrant un payoff prédéterminé d'un montant fixe dans le cas où le prix du sous-jacent termine en dessous du prix d'exercice et rien autrement.

Put de protection. Stratégie consistant à acheter des puts pour couvrir une position longue sur le sous-jacent.

Put sur moyenne de prix. Option dont le payoff est le maximum entre zéro et la différence entre le prix moyen de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice.

Puttable bond. Obligation permettant à son détenteur d'en obtenir le remboursement anticipé à des conditions prédéterminées.

Puttable swap. Swap dans lequel l'une des parties peut l'annuler par anticipation.

Quanto. Produit dérivé dans lequel le payoff est défini par des variables associées à une devise, mais payé dans une autre devise.

Ratio de couverture. Rapport entre le volume de la position à prendre sur un instrument de couverture et le volume de la position sur l'actif à couvrir.

Réajustement. Processus d'ajustement périodique de ses positions. On l'utilise notamment pour conserver une position delta-neutre.

Rendement d'opportunité. Mesure des bénéfices procurés par la détention réelle d'un actif, que n'offre pas la détention du contrat futures sur ce même actif.

Repo. Contraction de *repurchase agreement* ; accords de rachat. Procédure d'emprunt par un contrat spécifiant la vente de certains titres avec une promesse de rachat à une date future et à un prix plus élevé. En français, on nomme aussi cette procédure « pension livrée ».

Report. Situation dans laquelle le prix futures décroît avec la maturité.

Retour à la moyenne. Tendance pour une variable de marché (telle qu'un taux d'intérêt) à revenir à une moyenne à long terme.

Rhô. Sensibilité de la valeur d'un produit dérivé au taux d'intérêt.

Risque de base. Risque de couverture provenant de l'incertitude quant au niveau de la base à une date future.

Risque de crédit. Risque de perte financière causée par le défaut d'une contrepartie d'une transaction de produit dérivé.

Risque de liquidité. Risque de ne pouvoir vendre un instrument financier à son prix théorique.

Risque non systématique. Risque diversifiable ; il s'agit de la part du risque que l'on peut réduire par diversification.

Risque systématique. Part du risque non diversifiable.

Scalper. Trader qui ne conserve ses positions que très peu de temps (quelques minutes).

SEC (Securities and Exchange Commission). Organisme fédéral américain de réglementation et de contrôle des marchés financiers. C'est l'équivalent de l'AMF française.

Série d'options. Toutes les options d'une même classe (voir *Classe d'options*) dont le prix d'exercice et la date d'échéance sont identiques.

Simulation de Monte-Carlo. Procédure d'échantillonnage au hasard des variations des variables du marché afin d'évaluer un produit dérivé.

Simulation historique. Simulation fondée sur des données historiques.

Smile de volatilité. Variation de la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice.

Solution analytique. Solution se présentant sous la forme d'une équation.

Sous-jacent. Actif ou variable dont dépend la valeur d'une option ou d'un produit dérivé.

Spéculateur. Investisseur qui prend une position risquée sur un actif du marché en pariant sur la hausse ou la baisse de cet actif (hausse ou baisse).

Spread calendaire. Combinaison constituée d'une position longue sur un call d'une certaine maturité et d'une position courte sur un call d'une autre maturité. (Cette combinaison peut aussi être obtenue à partir de puts).

Spread diagonal. Combinaison constituée de deux calls de prix d'exercice et de maturité différents (Cette combinaison peut aussi être obtenue à partir de puts).

Spread papillon. Voir *Butterfly spread.*

Spread vertical baissier. Combinaison constituée d'une position courte sur un put de prix d'exercice faible et d'une position longue sur un put de prix d'exercice élevé. (Cette combinaison peut aussi être obtenue à partir de calls.).

Spread vertical haussier. Combinaison constituée d'une position longue sur un call de prix d'exercice faible et d'une position courte sur un call de prix d'exercice élevé. (Cette combinaison peut aussi être obtenue à partir de puts.)

Stock-option. Option sur action émise par une entreprise sur ses propres actions généralement attribuée aux dirigeants et aux cadres à titre d'incitation et/ou pour compléter leur rémunération.

Straddle. Position longue dans un call et un put de même prix d'exercice.

Strangle. Position longue dans un call et un put de prix d'exercice différents.

Strap. Position longue dans deux calls et un put de même prix d'exercice.

Stress test. Test de l'impact de variations extrêmes du marché sur la valeur d'un portefeuille.

Strike. Voir *Prix d'exercice.*

Strip. Position longue dans un call et deux puts de même prix d'exercice.

Structure par terme de volatilité. Variation de la volatilité implicite en fonction de la maturité.

Structure par terme des taux d'intérêt. Relation entre taux d'intérêt et maturité.

Surface de volatilité. Tableau représentant la variation de la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice et de la maturité.

Swap. Accord d'échange de flux de trésorerie futurs conformément à une formule prédéfinie.

Swap à amortissement indexé. Swap dont le principal peut être amorti en fonction de l'évolution des taux d'intérêt.

Swap à échéance reportable. Swap pour lequel une partie a l'option de prolonger la durée de vie du swap au-delà de la période spécifiée.

Swap à flux décalés. Swap pour lequel le taux LIBOR observé sur une date de paiement est utilisé pour calculer le paiement à cette date (et non à une période ultérieure).

Swap à maturité constante. Swap dans lequel le taux variable est le taux de swap pour un swap d'une maturité donnée.

Swap à principal dégressif. Voir *Swap à amortissement indexé.*

Swap annulable. Swap auquel l'une des contreparties peut mettre fin à une ou plusieurs dates.

Swap croissant. Swap dont le principal augmente avec le temps.

Swap de base. Swap consistant à échanger des flux calculés avec deux taux variables différents.

Swap de défaut. Instrument donnant droit à son détenteur de vendre une obligation à sa valeur faciale en cas d'aléa de crédit de son émetteur.

Swap de défaut digital. Instrument payant un montant fixe, déterminé initalement, en cas de défaut de l'entité de référence.

Swap de devises. Swap impliquant l'échange de principal et d'intérêts dans une devise contre un principal et des intérêts dans une autre.

Swap de rentabilité totale. Swap dans lequel la rentabilité d'un actif tel qu'une obligation est échangé contre le LIBOR plus un spread. La rentabilité de l'actif comprend les coupons et les gains ou pertes en capital.

Swap de taux d'intérêt. Échange d'un taux d'intérêt fixe contre un taux variable portant sur un principal notionnel identique.

Swap de volatilité. Swap dans lequel la volatilité réalisée au cours d'une période est échangée contre une volatilité prédéfinie.

Swap décroissant. Swap dont le principal diminue avec le temps de façon déterministe.

Swap différé. Engagement à conclure un swap à une date future. Aussi appelé *forward swap*.

Swap différentiel. Swap dans lequel le taux variable observé dans une devise donnée est appliqué à un principal exprimé dans une autre devise.

Swap step-up. Voir *Swap croissant*.

Swap sur actions. Swap consistant à échanger la rentabilité d'un portefeuille d'action contre un taux d'intérêt fixe ou variable.

Swap sur matière première. Swap dont les montants échangés dépendent du prix d'une matière première.

Swaption. Option qui donne le droit de prendre part à un swap de taux dans lequel on échange un taux fixe contre un taux variable.

Taux actuariel. Taux d'actualisation qui, appliqué à tous les flux, donne le prix de marché de l'obligation.

Taux au pair. Taux de coupon d'une obligation qui égalise sa valeur avec son nominal.

Taux court. Taux d'intérêt s'appliquant à une courte période.

Taux d'intérêt à coupon zéro. Taux d'intérêt procuré par une obligation qui ne verse pas de coupons.

Taux d'intérêt spot. Voir *Taux d'intérêt à coupon zéro*.

Taux de cap. Taux déterminant les payoffs dans un cap de taux d'intérêt.

Taux de change forward. Prix forward d'une unité de devise étrangère.

Taux de Repo. Taux d'intérêt d'une transaction de Repo, provenant de la différence entre le prix de vente et le prix de rachat des titres.

Taux de swap. Taux fixe d'un swap de taux tel que la valeur du swap est nulle.

Taux de versement des dividendes. Dividende exprimé en pourcentage du prix de l'action.

Taux d'intérêt forward. Taux d'emprunt ou de placement, pour une période future, implicite dans les taux d'intérêt en vigueur aujourd'hui.

Taux Eurodollar. Taux d'intérêt versé sur un dépôt en Eurodollars.

Taux fixe. Taux d'intérêt dont la valeur est fixée et non susceptible d'être modifiée.

Taux sans risque. Taux d'intérêt qui peut être perçu en l'absence de risque.

Taux variable. Taux d'intérêt dont la valeur varie au cours du temps.

Théorie de la préférence pour la liquidité. Théorie qui conduit à conclure qu'un taux forward est supérieur à l'espérance du taux spot futur correspondant. Les taux longs sont donc supérieurs à la moyenne des anticipations de taux courts.

Théorie de la segmentation du marché. Théorie selon laquelle les taux à court terme sont déterminés par le marché indépendamment des taux à long terme.

Théorie des anticipations. Théorie selon laquelle le taux forward pour une période future donnée est l'espérance du taux spot qui prévaudra à cette période.

Thêta. Sensibilité de la valeur d'un produit dérivé au passage du temps.

Tranche. Partie d'un produit titrisé comme un CDO dont les payoffs sont en général déterminés par des principes de priorité.

Transaction de spread. Achat d'un contrat d'une maturité donnée et vente d'un contrat d'une autre maturité.

Univers risque-neutre. Dans un tel univers, les investisseurs sont indifférents au risque ; ils sont donc supposés n'exiger aucune rentabilité supplémentaire pour un actif plus risqué.

Valeur intrinsèque. Valeur de l'option si on l'exerçait immédiatement. Pour un call, c'est la différence, si elle est positive, entre la valeur du sous-jacent et le prix d'exercice, et 0 sinon. Pour un put, c'est la différence, si elle est positive, entre le prix d'exercice et la valeur du sous-jacent, et 0 sinon.

Valeur temps. Part de la valeur de l'option s'expliquant par l'incertitude sur l'évolution du prix du sous-jacent jusqu'à l'échéance et par l'éloignement de celle-ci. Se calcule par la différence entre la valeur de l'option et sa valeur intrinsèque.

Value at Risk. Perte potentielle maximale dans un certain intervalle de confiance.

Vanille. Voir *Plain vanilla.*

VaR conditionnelle. Voir *Expected Shortfall.*

Variance. Volatilité (écart-type) au carré.

Vega. Sensibilité de la valeur d'un produit dérivé aux variations de volatilité du sous-jacent.

Vendre à découvert. Vendre sur le marché des actions que l'on a empruntées à un autre investisseur.

Volatilité. Mesure de l'incertitude sur la rentabilité future d'un actif.

Volatilité implicite. Volatilité déduite de la valeur d'une option en utilisant le modèle de Black et Scholes ou un modèle analogue.

Volatilité plate. Nom donné à la volatilité utilisée pour l'évaluation d'un cap quand la même volatilité est employée pour tous les caplets.

Volatilité spot. Volatilité utilisée pour évaluer un cap lorsqu'on emploie une volatilité différente pour chaque caplet.

Warrant. Option émise par un établissement financier ou une société.

Le logiciel DerivaGem

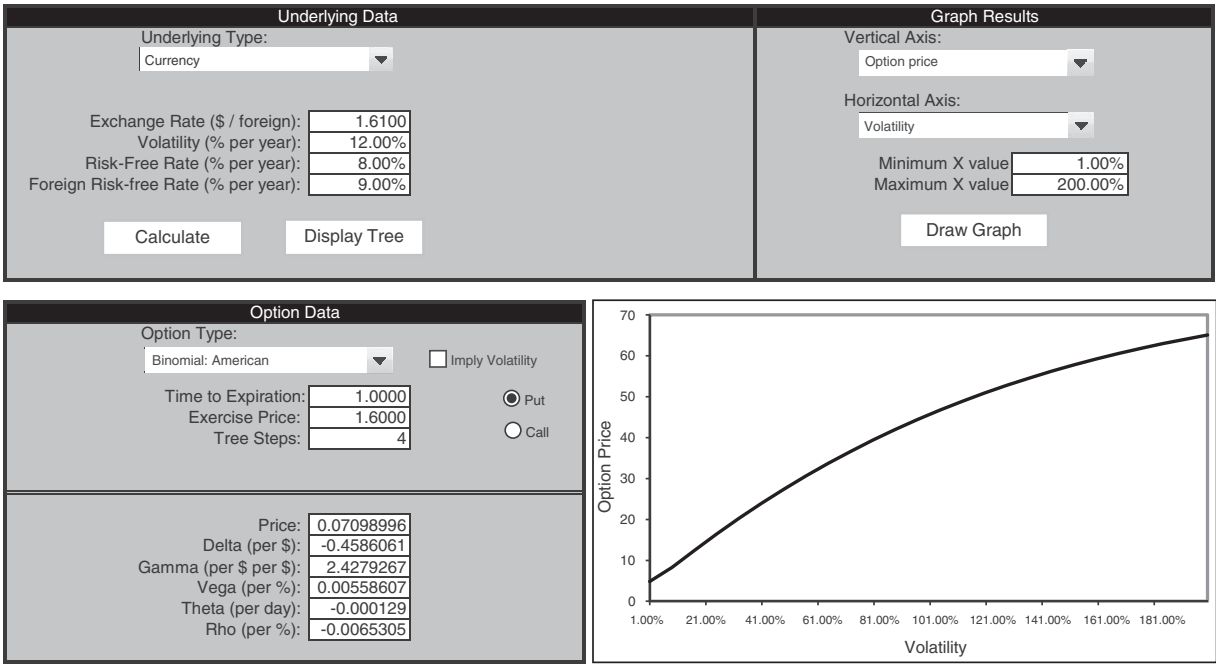
Le logiciel qui accompagne ce livre s'appelle DerivaGem 4.00 et permet l'évaluation de nombreux produits dérivés.

Cette version contient de nouvelles fonctionnalités. Les options européennes peuvent être évaluées selon les modèles CEV, le modèle de diffusion à sauts de Merton ou les modèles variance-gamma discutés dans le chapitre 27. Des simulations de Monte-Carlo peuvent être lancées. On peut aussi construire les courbes de taux LIBOR et OIS à partir de données de marché, ainsi que procéder à l'évaluation de swaps et d'obligations. Enfin, lors de l'évaluation de swaps, swaptions et caps, on peut choisir d'actualiser les flux aux taux OIS ou LIBOR.

Démarrage

La mise en route est sans doute la partie la plus difficile de l'utilisation du logiciel. Les étapes ci-dessous vous permettent d'utiliser la version 4.00 de DerivaGem.

1. Utilisez le code d'accès personnel fourni à la fin de cet ouvrage et téléchargez sur www.pearsonhighered.com/hull le dossier compressé. Celui-ci contient trois fichiers, DG400.xls, DG400 functions.xls et DG400 applications.xls. Ouvrez le premier de ces trois fichiers dans Excel.
2. Assurez-vous que le niveau de sécurité permet l'utilisation des macrocommandes.
3. Cliquez sur l'onglet Equity_FX_Indx_Fut_Opts_Calcs situé en bas de la feuille de calcul.
4. Choisissez Currency comme Underlying Type et Binomial American comme type d'option. Cochez Put et laissez décoché le bouton Implied Volatility.
5. Vous êtes maintenant en mesure d'évaluer une option sur devise. Il y a sept paramètres en entrée : le taux de change, la volatilité, le taux domestique, le taux étranger, la durée de vie (en années), le prix d'exercice et le nombre de pas du modèle binomial. Introduisez dans les cellules D5, D6, D7, D8, D13, D14 et D15 les valeurs 1,61 ; 12 % ; 8 % ; 9 % ; 1,0 ; 1,60 et 4.
6. Appuyez sur entrée et cliquez sur Calculate. Le prix apparaît dans la cellule D20 (0,07099) et les grecques sont données dans les cellules D21 à D25. L'écran que vous devriez obtenir est représenté ci-après.
7. Cliquez sur Display Tree. L'arbre binomial est représenté dans une seconde feuille de calcul. C'est celui du graphique 21.6 du chapitre 21.



Étapes suivantes

Vous ne devriez pas avoir de difficultés à évaluer d'autres types d'options dans la même feuille de calcul. Si vous souhaitez obtenir la volatilité implicite, cochez le bouton *Imply volatility* et entrez le prix coté de l'option en D20. La volatilité implicite apparaîtra dans la cellule D6.

De nombreux graphes peuvent être représentés. Il faut d'abord choisir les variables que vous souhaitez sur les axes ainsi que l'intervalle de valeurs pour lequel vous voulez une représentation graphique. Tapez « Entrée » et cliquez sur *Draw Graph*.

Les autres éléments à mentionner à propos de cette feuille de calcul sont les suivants.

1. Pour les options sur actions, 7 dividendes au plus peuvent être pris en compte. Il faut saisir la date à laquelle ils seront payés (en années par rapport à la date d'évaluation) dans la première colonne, puis les montants de dividendes dans la seconde. Les dividendes doivent être saisis dans l'ordre chronologique.
2. 500 pas peuvent être considérés pour l'évaluation des options en temps discret, mais les arbres binomiaux ne peuvent être représentés que pour 10 dates au plus.
3. En dehors des options classiques, les grecques sont calculées par des taux de variation (en faisant varier les inputs) plutôt que par des formules analytiques.
4. Pour une option asiatique, Current Average est la moyenne de cours depuis la création du contrat. Pour un nouveau contrat, ce paramètre n'est pas pertinent.
5. Pour une option lookback, Minimum to Date est utilisé pour l'évaluation d'un call et Maximum to Date pour un put. Pour un nouveau contrat, ces variables sont égales au prix actuel du sous-jacent.
6. Les taux d'intérêt sont des taux continus calculés en base Exact/Exact pour ce qui est de la convention de décompte des jours.

L'onglet Alternative Models fonctionne comme *Equity _FX_Indx_Fut_Opts_Calcs*, mais on peut y utiliser les modèles CEV, de diffusion à sauts, variance-gamma, Heston et SABR. Les graphes apparaissent sur la même feuille de calcul. On peut choisir la volatilité implicite sur l'axe vertical et le prix d'exercice sur l'axe horizontal pour faire apparaître le smile de volatilité.

La simulation de Monte-Carlo

Dans cet onglet, l'utilisateur peut voir comment sont évaluées un certain nombre d'options dans les modèles lognormal, de diffusion à sauts, et variance-gamma. Les résultats complets d'au plus dix tirages peuvent être affichés, même si on peut aller jusqu'à 10 000 simulations. Quand on coche la case *Do AntiThetic*, on ne voit que cinq tirages, puisque ceux-ci sont associés par paires. S'affiche aussi l'écart-type pour la simulation complète ou pour les dix tirages.

Courbes zéro-coupon

La courbe zéro-coupon *Zero_Curve* permet de calculer la courbe des taux OIS et celles des obligations d'État. La courbe OIS est construite à partir des taux OIS. Pour des raisons pédagogiques, on suppose que les périodes d'accumulation d'intérêt sont des fractions d'années (1 an ; 0,75 an ; 0,5 an ou 0,25 an) et la convention de décompte des jours est Exact/Exact.

Obligations et swaps

La feuille *Swap_Price* permet d'évaluer les swaps en actualisant aux taux OIS. Pour actualiser avec des taux OIS, il faut introduire une courbe zéro-coupon OIS (en composition continue) obtenue à l'aide de la feuille *Zero_Curve*. Les taux forward LIBOR sont aussi un input du programme. Ce sont des taux à l'horizon d'une période correspondant à la périodicité des paiements du swap. Ces taux forward sont exprimés en composition semestrielle si les paiements sont semestriels, trimestrielle si les paiements sont trimestriels, etc. Ainsi, dans l'exemple 7.1, le taux forward à la date 0,25 (3 mois) est égal à 3,329 % ; à la date 0,75 (9 mois), il est égal à 3,734 %. Les taux zéro-coupon OIS pour les horizons 0,25, 0,75 et 1,25 sont respectivement 2,8 %, 3,2 % et 3,4 %. La fin du swap (Swap End) est 1,25 et le taux de swap (Swap Rate) est de 3 %. Le dernier réajustement (Last Reset) est de 2,9 %. Le logiciel utilise une interpolation linéaire pour déterminer les taux à des horizons ou sur des périodes non spécifiés.

Les options sur obligations

La feuille *Bond_Options* fonctionne sur le même principe que les précédentes. Elle permet d'évaluer des options européennes et américaines sur obligations. Les modèles utilisables ici sont le modèle de Black (voir section 29.1) et les modèles gaussien et log-normal de taux court (équations (32.4) et (32.9)). Le premier modèle s'applique aux options européennes uniquement ; les deux autres peuvent être utilisés pour les options aussi bien européennes qu'américaines. Le taux de coupon est annuel, mais la

fréquence des paiements peut être trimestrielle, semestrielle ou annuelle. On saisit aussi la structure par termes des taux (*Term Structure*) ; les maturités apparaissent dans la première colonne et les taux continus dans la seconde. Ici encore, les maturités doivent être saisies dans l'ordre chronologique. DerivaGem suppose une structure linéaire par morceaux comme celle représentée au graphique 4.1. Le prix d'exercice peut être pied de coupon ou coupon couru (voir section 29.1). Le prix coté de l'obligation, calculé par le programme, ainsi que le prix d'exercice, sont donnés pour 100 unités de principal.

Caps et options de swap

La feuille de calcul (Caps_and_Swap_Options) évalue les caps/floors et les swaptions et fonctionne comme les précédentes. Vous devez d'abord choisir l'instrument considéré (cap/floor ou swaption) et le modèle d'évaluation. Le modèle de Black est expliqué à la section 29.2 pour les caps et floors et à la section 29.3 pour les swaptions. Vient ensuite la saisie des données concernant le contrat. La structure par termes des taux est entrée comme dans les feuilles précédentes. La fréquence des paiements a quatre modalités possibles (*Annual, Semi-Annual, Quaterly, Monthly*). Le programme calcule ensuite les dates de paiement en partant de la fin. La durée de la première période de capitalisation des intérêts peut alors varier entre 0,5 fois et 1,5 fois la durée des autres périodes.

Les CDS

Cette feuille permet de calculer les taux d'intensité de défaut à partir des spreads de CDS et réciproquement. Il est nécessaire de saisir une structure par termes des taux et une structure par termes, soit des spreads, soit des taux d'intensité de défaut. L'intensité de défaut initiale s'applique de la date 0 à la date spécifiée, la deuxième à l'intervalle jusqu'à la date suivante, et ainsi de suite. Les taux d'intensité de défaut sont composés en continu, de sorte que $h(t)$ à la date t signifie que la probabilité de défaut entre t et $t + \Delta t$ est égale à $h(t)\Delta t$, conditionnellement à l'absence de défaut préalable. Les calculs sont réalisés en supposant que les défauts surviennent au milieu des périodes séparant deux dates de paiement. Cela correspond au choix retenu dans l'exemple de la section 25.2.

Les CDO

La feuille CDO calcule les prix des tranches de CDO à partir des données de corrélation utilisées comme inputs. Les points d'attachement et de détachement sont également des données saisies par l'utilisateur. Les cotations peuvent être en points de base ou entraîner un décaissement immédiat. Dans ce dernier cas, le spread en points de base est fixé et le décaissement calculé en pourcentage du principal est soit une donnée, soit calculé de manière implicite (par exemple, le spread fixé pour la tranche equity des indices iTraxx Europe et CDX NA IG est de 500 bp). Le nombre de points d'intégration (voir équation (25.12)) définit la précision des calculs et peut être laissé à 10 dans la plupart des cas (le maximum autorisé est 30). Le programme donne la perte espérée en pourcentage du principal de la tranche (ExpLoss) et la valeur actuelle des paiements espérés (PVPmts) au taux de 10 000 bp par an.

Le spread et le décaissement immédiat sont respectivement égaux à :

ExpLoss * 10 000/PVPmts et ExpLoss – (Spread*PVPmts/10 000)

Cette feuille de calcul peut être utilisée pour calculer des corrélations composées implicites ou des corrélations de base à partir de prix de marché entrés par l'utilisateur. Pour obtenir les corrélations de base, il est nécessaire que le premier point d'attachement soit 0 % et que chaque point de détachement soit le point d'attachement de la tranche suivante.

Les grecques

Dans la feuille Equity_FX_Index_Futures, les grecques sont calculées comme suit :

Delta : changement du prix de l'option quand le prix du sous-jacent augmente d'une unité ;

Gamma : changement du delta de l'option quand le prix du sous-jacent augmente d'une unité ;

Vega : changement du prix de l'option quand la volatilité du sous-jacent augmente de 1 % (et passe par exemple de 20 % à 21 %) ;

Rho : changement du prix de l'option quand le taux sans risque augmente de 1 % (et passe par exemple de 5 % à 6 %) ;

Theta : changement du prix de l'option quand un jour s'écoule.

Pour les instruments de taux, les grecques sont calculées comme suit :

DV01 : changement du prix de l'option quand la courbe des taux est translatée à la hausse d'un point de base ;

Gamma01 : changement de DV01 (multiplié par 100) quand la courbe des taux est translatée à la hausse d'un point de base ;

Vega : changement du prix de l'option quand la volatilité du sous-jacent augmente de 1 % (c'est-à-dire passe par exemple de 20 % à 21 %).

Le développeur d'applications

Le développeur d'applications se situe dans la feuille DG300 functions.xls. Ce développeur contient les fonctions du calculateur d'options et sept exemples sur lesquels les utilisateurs peuvent s'appuyer afin de développer leurs propres applications (voir ci-dessous).

A. Convergence du modèle binomial, telle qu'elle a été évoquée aux chapitres 13 et 21.

B. Les grecques. Cette application fournit divers graphiques à propos des grecques présentées au chapitre 19.

C. La couverture en delta. Cet exemple analyse la performance d'une couverture en delta (voir tableaux 19.2 et 19.3).

D. Couverture en delta et gamma. Cet exemple analyse la performance d'une couverture en delta et gamma pour une position longue sur une option digitale.

E. Value at Risk. Cette application calcule la VaR d'un portefeuille contenant trois options sur une action ; ce calcul est réalisé avec trois approches différentes.

F. Option à barrière. Cette application correspond à l'exemple de la section 26.16 de réplication statique d'une option à barrière.

G. Convergence du modèle trinomial. Cette application analyse la convergence du modèle trinomial.

Les principaux marchés organisés de futures et d'options dans le monde

Australian Securities Exchange	ASX	www.asx.com.au
BM&FBOVESPA	BMF	www.bmfbovespa.com.br
Bombay Stock Exchange	BSE	www.bseindia.com
Boston Options Exchange	BOX	www.bostonoptions.com
Bursa Malaysia	BM	www.bursamalaysia.com
Chicago Board Options Exchange	CBOE	www.cboe.com
China Financial futures Exchange	CFFEX	www.cffex.com.cn
CME Group	CME	www.cmegroup.com
Dalian Commodity Exchange	DCE	www.dce.com.cn
Eurex	EUREX	www.eurexchange.com
Hong Kong Futures Exchange	HKFE	www.hkex.com.hk
Intercontinental Exchange	ICE	www.theice.com
International Securities Exchange	ISE	www.iseoptions.com
Japan Exchange Group		www.jpx.co.jp
Kansas City Board of Trade	KCBT	www.kcbt.com
London Metal Exchange	LME	www.lme.co.uk
MEFF Renta Fija and Variable, Spain	MEFF	www.meff.es
Mexican Derivatives Exchange	MEXDER	www.mexder.com
Minneapolis Grain Exchange	MGE	www.mgex.com
Montreal Exchange	ME	www.m-x.ca
NASDAQ OMX	OMX	www.nasdaqomx.com
National Stock Exchange	NSE	www.nseindia.com
NYSE Euronext		www.nyse.com
Shanghai Futures Exchange	SHFE	www.shfe.com.cn
Singapore Exchange	SGX	www.sgx.com
Tokyo Financial Exchange	TFX	www.tfx.or.jp
Tokyo Grain Exchange	TGE	www.tge.or.jp
Zhengzhou Commodity Exchange	ZCE	www.zce.cn

Tableau pour $N(x)$ quand x négatif

Ce tableau donne les valeurs de $N(x)$ quand x est négatif ou nul. Il doit être utilisé avec une interpolation si nécessaire. Par exemple :

$$\begin{aligned} N(-0{,}1234) &= N(-0{,}12) - 0{,}34\,[N(-0{,}12) - N(-0{,}13)] \\ &= 0{,}4522 - 0{,}34\,(0{,}4522 - 0{,}4483) \\ &= 0{,}4509 \end{aligned}$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
–0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
–0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
–0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
–0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
–0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
–0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
–0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
–0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
–0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
–0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
–1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
–1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
–1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
–1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
–1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
–1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
–1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
–1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
–1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
–1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
–2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
–2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
–2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
–2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
–2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
–2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
–2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
–2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
–2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
–2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
–3,0	0,0014	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
–3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
–3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
–3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
–3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
–3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
–3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
–3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
–3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
–3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
–4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tableau pour $N(x)$ quand x positif

Ce tableau donne les valeurs de $N(x)$ quand x est positif ou nul. Il doit être utilisé avec une interpolation si nécessaire. Par exemple :

$$\begin{aligned} N(0{,}6278) &= N(0{,}62) + 0{,}78\,[N(0{,}63) - N(0{,}62)] \\ &= 0{,}7324 + 0{,}78 \times (0{,}7357 - 0{,}7324) \\ &= 0{,}7350 \end{aligned}$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Index

A

ABS, 182
  CDO, 184
ACP, 728
  allongement maximal, 540
  composantes principales, 540
  facteurs, 538
  inertie, 540
  loadings, 538
Actif
  de consommation, 107
    matières premières, 125
  d'investissement, 107
Action, volatilité, 446
Adjustable Rate Mortgages, 186
Ajustement
  de convexité, 146, 733
    démonstration, 746
    taux de swap, 736
    taux d'intérêt, 735
  quanto, 739
  temporel, 737
Analyse
  en composantes principales, 538
  scénario, 439
Appel de marge, 30
Arbitrage, 16
  raisonnement, 283
  sur indices, 120
Arbitragiste, 16
Arbre
  binomial, 408
    deux périodes, 284
    put, 287
  construction générale, 770
  de taux, 768
  log-normal, 776
  non rectangulaire, 681
  non standard, 769
  option américaine, 779
  tridimensionnel, 681
  trinomial, 490
ARMS, 186
Asset swap, 579
Asset-Liability Management, 149
Assurance de portefeuille, 382, 442
Avantage comparatif, 163

B

Backdating, 375
Base, 55
  glissante, 68
BGM
  calibrage, 798
  multi-facteurs, 794
Bid-ask spread, 219
Bid-offer spread, 219
Bon de souscription, 225
Bootstrap, 86
Borne
  inférieure, 237, 387
  supérieure, 236
Broker, 39

C

Calibrage, 780
Call, 9, 208
  achat, 210
  delta, 289
  vente, 210
Call-put, 387
Cap
  caplet, 719, 793
  de taux, 718
  évaluation, 720
  flexi, 796
  non standard, 795
  option de taux, 719
  ratchet, 795
  sticky, 795

Cash-settlement, 39
CDO, 614
  évaluation, 616
  synthétique, 614
  tranches isolées, 615
CDS
  add-up, 612
  évaluation, 606
  first-to-default, 612
  forward, 612
  marking-to-market, 608
  spread, 606
  taux actuariel, 605
Chambre de compensation, 33, 223
Collar, 720
Combinaison, 269
  straddle, 269
  strangle, 271
  strap, 271
  strip, 271
Compte de deposit, 221
Contrat
  forward, 6
    delta, 441
  futures, 8
    de taux, 135
    delta, 441
    Eurodollar, 143
    sur obligations, 137
  range forward, 384, 630
Contrôle, 863
  de la différence, 487, 500
  interne, 870
Convenience yield, 125
Convexité, 97
Copule gaussienne, 591
  date de défaut, 617
Corrélation
  des défauts, 590
  estimation, 563
  facteurs communs, 592
Courbe zéro-coupon, 146
Courtier, 39
Coûts
  d'agence, 190
  de financement, 199
  de portage, 126
  de stockage, 124
  de transaction, 428
Couverture
  action, 66
  actionnaires, 52
  bêta, 66
  concurrence, 52
  coût, 427
  croisée, 58
  danger, 68
  duration matching, 149
  dynamique, 424, 438
  en duration, 148
  forward, 13
  futures, 49
  glissante, 67
  immunisation, 149
  options, 14, 418
  pertes, 53
  portefeuille, 64
  profits, 53
  ratio, 58
  variance minimale, 58
Créance hypothécaire, 802
Crédit, notation, 573
CreditMetrics, 594
CVA, 197

D

Day trader, 40
Décompte des jours, 723, 727
Défaut
  copula, 591
  corrélation, 590, 592
  intensité, 574, 575
  probabilité, 574
Delta, 289
  couverture, 421
  hedging, 289
  portefeuille, 427
Deposit, 31
DerivaGem, 294
Dérivé
  climatique, 823, 833
    CDD, 833
    HDD, 833
  danger, 17, 857
  d'assurance, 823, 834
    obligation CAT, 835
  de crédit, 601
  de taux
    ACP, 728
    couverture, 728
    DV01, 728
    modèle de taux court, 747

d'énergie, 823
British Thermal Units, 826
couverture, 837
électricité, 826
gaz naturel, 826
pétrole, 825
limite de risque, 858
Diversification, 862
Dividende
connu, 484
proportionnel, 483
Downgrade trigger, 588
Drift, 310
Duration, 94
modifiée, 96, 717
DVA, 197

E
Échantillon
aléatoire, 496
par importance, 500
stratifié, 501
EDP
Black et Scholes, 337
application, 343
formule, 344
propriétés, 346
conditions aux bornes, 340
Efficience faible, 308
Évaluation risque-neutre, 281, 342, 388
Exercice
anticipé, 288
prématuré, 209, 243, 289

F
Facteur de concordance, 139
Floor, 719, 720
évaluation, 720
floorlet, 721
Fonction d'actualisation, 762
Formule de Black et Scholes, 363
Forward, 1, 2, 6–10, 12–14, 17, 19–22
couverture, 13
delta, 441
évaluation, 116
flux, 7
prix, 8
sur devises, 121
valeur du contrat, 116
FRA, 92
évaluation, 93
Futures, 6, 8, 9, 12, 19
actif
de consommation, 107
d'investissement, 107
appels de marge, 30
base, 55
compensation, 37
contrôle, 40
convergence, 29
cotation, 29
couverture, 49
de taux, 135
décompte des jours, 135
delta, 441
dénouement, 26
deposit, 31
Eurodollar, 143
fonctionnement, 25
livraison, 26, 28
position
courte, 50
longue, 50
risque, 128
de base, 54
sous-jacent, 27
spéculation, 15
sur devises, 42, 121
sur indices, 62, 118, 444
sur matières premières, 124
sur obligations, 137
cotation, 139
taille du contrat, 28
Wild Card, 142

G
Gamma, 430
GNMA, 181
Government National Mortgage Association, 181
Grecques
relations, 434
volatilité, 462

H
HJM
multi-facteurs, 790
taux forward, 788

I
In arrears, 811
Indice de crédit, 610
Induction arrière, 476
Instrument monétaire, 137

J
Jour
calendaire, 334, 336, 429
de Bourse, 334
de cotation, 429
ouvrable, 336

L
Lemme d'Itô, 307, 317, 318
application, 319
énoncé, 318
lettres grecques, 421
LIBOR, 156
Limite
de position, 218
de risque, 858, 860
Livraison, 28, 39
période, 39
Local, 39
Loi
asymétrie, 666
de Khi^2 décentrée, 663
de la rentabilité, 330
gamma, 666
log-normale, 319, 328
déviation, 463
normale
bivariée, 635
fonction de répartition, 344, 346
skewness, 666

M
Marché
de gré à gré, 3, 226
électronique, 3
futures, 2
market-makers, 4
options, 2
organisé, 2
OTC, 3, 6, 226
garantie, 34
prévision, 861
trading, 3
volumes, 5
Marge
de maintenance, 31
initiale, 31, 32
Market-maker, 4, 219
Marking to market, 31, 32
Martingale, 698
mesure équivalente, 699
MBS, 181
MEDAF, 842
bêta, 842
Méthode
changement de variable, 508
de Newton-Raphson, 350
des moments, 501
différences finies, 502
autres, 512
explicite, 506
implicite, 504
maximum de vraisemblance, 554
moindres carrés, 683
Modèle
à sauts de Merton, 663
binomial, 277
Black et Karasinski, 765
Black et Scholes, 704
hypothèses, 338
Brace, Gatarek, Musiela, 791
CEV, 662
Cox-Ingersoll-Ross, 749, 751
Cox-Ross-Rubinstein, 277
de Black, 407
de marché LIBOR, 791
de taux
calibrage, 780
court, 747
couverture, 782
élasticité constante, 662
équilibre, 749
EWMA, 551
pondérations, 549
GARCH(1,1), 334, 551
estimation, 555
pondérations, 553
prévision, 559
qualité, 558
retour à la moyenne, 553
Heath, Jarrow, Morton, 788
Ho et Lee, 762
Hull et White
deux facteurs, 765
un facteur, 763
log-normal, 456, 776
maximum de vraisemblance, 554
moyenne mobile, 549
précautions, 863
Rendleman et Bartter, 749
sans arbitrage, 761
temps discret, 314
variance-gamma, 665
Vasicek, 749, 750
volatilité stochastique, 668

Mortgage, 800, 803, 804
CMO, 803
décomposition, 802
FNMA, 802
GNMA, 802
interest only, 803
pass-through, 803
principal only, 803
Mortgage Backed Securities, 181
Mouvement brownien, 309
géométrique, 314
Moyenne
arithmétique, 332
géométrique, 332

N
Netting, 587
Notation, 573
Numéraire, 699
annuité, 702
changement, 706
compte d'épargne, 700
zéro-coupon, 701

O
Obligation
callable, 714
cheapest, 141
clause optionnelle, 714
convexité, 97
cotation, 137
coupon couru, 715
d'État, 135, 137
duration, 94
modifiée, 96
évaluation, 84
la moins chère à livrer, 141, 605
pied de coupon, 715
prix, 85
puttable, 714
taux actuariel, 85
taux au pair, 85
Office
back, 863
front, 863
middle, 863
Option, 9
à la monnaie, 215
à parité, 215
ajustement des contrats, 216
américaine, 9, 208, 411, 682
approximation de Black, 355
arbre, 779
dividende, 353
évaluation, 288
exercice prématuré, 685
frontière, 685
non standard, 631
appel de marge, 221
arbitrage, 12
asiatique, 643
assurance de portefeuille, 382
barrière, 636, 677
knock-in, 636
knock-out, 636
basket, 646
binary, 639
borne
inférieure, 237, 387
supérieure, 236
call, 9, 208
down-and-in, 636, 638
down-and-out, 636, 638
up-and-in, 637
up-and-out, 637
cap de taux, 719
chooser, 635
classe, 215
climatique, 833
combinaison, 269
straddle, 269
strangle, 271
strap, 271
strip, 271
compensation, 223
composée, 634
compte de deposit, 221
convertible, 224, 225
coûts de transaction, 220
couverture, 14
cylindre, 384, 630
d'abandon, 847, 850
dans la monnaie, 215, 346
de change, 384
volatilité, 455
de différé, 847
de livraison, 126
de prorogation, 847
de réduction, 847
de swap, 724
évaluation, 725
d'échange, 645
delta, 289, 421, 480

dénouement, 219
d'extension, 847, 851
digitale, 639
  asset-or-nothing, 639
  cash-or-nothing, 639
dividende, 235, 248, 295, 386
droit, 9
écart, 259
  vertical, 260
échange, 705
échéance, 9, 213, 232
en dedans, 215
en dehors, 215
européenne, 9, 208
  delta, 423
  dividende, 352
évaluation, 388
exercice, 223
  anticipé, 249
  prématuré, 209, 243, 354
exotique, 629
fence, 384, 630
Flex, 215
gamma, 430, 480
grecque, 417
hedging, 12
LEAPS, 214
limite de position, 218
livraison, 402
longue, 214
lookback, 640
marché OTC, 226
market-maker, 219
maturité, 9
min-max, 384, 630
nue, 221
obligation, 713
package, 630
panier, 646
  arc-en-ciel, 646
parité call-put, 239, 249, 387, 403
payoff, 211
position
  nue, 418
  couverte, 418
premium, 208, 231
prix d'exercice, 9–11, 14, 15, 19–23, 232
projet d'investissement, 345
put, 209
quotité, 9
range forward, 384, 630
réelle, 841
  évaluation, 842
réplication, 650
rhô, 437
série, 215
shout, 642
sous-jacent, 211, 232
spéculation, 12, 15
spread, 259
  bear, 262
  box, 263
  bull, 260
  butterfly, 265
  calendar, 267
  diagonal, 269
stock-option, 633
strike price, 9
sur actifs corrélés, 679
sur action, 9, 212
  volatilité, 458
sur devise, 212, 296, 381, 384
  évaluation, 391
  volatilité, 455
sur ETP, 212
sur futures, 213, 297, 399
  bornes, 405
  cash-settlement, 402
  de taux, 401
  échéances, 401
  EDP, 406
  livraison, 402
sur indice, 212, 295, 381
sur moyenne, 643
sur obligations, 766
  à coupons, 766
synthétique, 443
taux sans risque, 235
thêta, 428, 480
Value at Risk, 533, 534
vega, 435, 480
volatilité, 234
warrant, 347
Wild Card, 142
zero-cost collar, 384, 630
Ordre
à prix touché, 40
à tout prix, 40
au prix du marché, 40
jour, 40
limite, 40
ouvert, 40
stop, 40
tout-ou-rien, 40

P
Paradoxe de Siegel, 742
Parité call-put, 249, 403, 453
  option américaine, 243
  option européenne, 239
Portefeuille
  assurance, 442
    krach, 445
  d'arbitrage, 278
  delta, 427
  gamma-neutre, 431
  sans risque, 279, 695
  vega, 437
Position
  courte, 12, 50
  longue, 12, 50
  ouverte, 37
Premium, 208
  déterminants, 231
Prix
  au comptant, 29
  de compensation, 37
  de marché du risque, 694, 695, 844
  d'exercice, 208
  forward, 8, 107
    actif d'investissement, 110
    flux connu, 113
    rendement connu, 115
  futures, 29, 107, 127
    sur indices, 118
    théorique, 142
  matières premières, 827
  spot, 8
    futur, 127
Probabilité
  de défaut, 606
    estimation, 583, 608
    historique, 574
  de survie, 606
  de transition, 595
Processus
  brownien, 664
  de cours, 313
  de Levy, 662
  de Markov, 308
  de Poisson, 664
  de rentabilité, 313
  de Wiener, 309, 694
    général, 312
    standard, 318
  d'Itô, 313
  drift, 310
  échantillon, 315
  espace d'états, 307
  itératif, 350
  lemme d'Itô, 317, 318
  mean reversion, 829
  racine carrée, 751
  retour à la moyenne, 829
  sans mémoire, 308
  stochastique, 307
  temps
    continu, 307, 308
    discret, 307
  tendance, 310
Put, 209
  achat, 210
  delta, 289
  vente, 210

Q
Quanto, 739

R
Rating, 573
Ratio de couverture, 58
Rendement d'opportunité, 125
Rentabilité, espérance, 281, 331
Réplication, 650
Repo, 613
Rhô, 437
Risque
  de base, 54
  de crédit, 33
    ajustement, 588
    collateralization, 587
    copula, 591
    CreditMetrics, 594
    CVA et DVA, 197
    dégradation, 588
    dérivés, 585
    downgrade trigger, 588
    nantissement, 587
    netting, 587
    réduction, 587
  futures, 128
  liquidité, 865
Risque-neutre, 281

S
Scénario, 439
Seuil de déclenchement, 418, 420
Short hedge, 50

Simulation
historique, 522
Monte-Carlo, 315, 420, 491, 537, 682
trajectoires, 497
Smile, 453
Sous-jacent, 27, 211
Special Purpose Vehicle, 182
Spéculation, 14, 869
futures, 15
options, 15
Spread, 259
bear, 262
box, 263
bull, 260
butterfly, 265, 440
calendar, 267
diagonal, 269
horizontal, 267
Stock-option, 225, 365
Straddle, 269
Strangle, 271
Strap, 271
Stratégie stop-loss, 418
Strip, 271
Structure par termes, 98
Suite quasi aléatoire, 502
Swap, 155
accrual, 816
action, 814
amortizing, 807
index, 818
annulable, 817
composé, 817
arrérages, 811
avantage comparatif, 163
basket, 612
cancelable, 817
CMS, 812
composé, 809
confirmation, 161
d'actifs, 579
de base, 808
de défaut, 602
digital, 609
sur panier, 612
de devises, 168, 810
évaluation, 171
de taux, 156
décroissant, 807
equity, 814
évaluation, 165
fixe-fixe, 810
flux décalés, 811
intermédiaire, 160
LIBOR, 811
maturité constante, 812
portefeuille de FRA, 165
principal indexé, 818
rentabilité totale, 612
risque de crédit, 173
step-up, 807
total return, 612
vanille, 807
Swaption, 724
bermudienne, 800
européenne, 797
évaluation, 725

T
Taux
actuariel, 85
annuel, 82
arbre, 768
au pair, 85
bootstrap, 86
cap, 718
collar, 720
commercial paper, 808
continu, 83
court, 762
court instantané, 748
de change
EUR-USD, 7
spot et forward, 7
de défaut, 575
de recouvrement, 575, 609
de swap forward, 725
d'État, 78
domestique, 121
étranger, 121
floor, 720
forward, 89, 145
FRA, 92
futures, 145
LIBOR, 78, 156
mean reversion, 750
mesure, 82
OIS, 80
plafond, 718
plancher, 720
Repo, 79
retour à la moyenne, 750
sans risque, 578
semestriel, 82
structure par termes, 98
zéro-coupon, 84

Théorème de Girsanov, 292
Thêta, 428
Titrisation, 181
Tranche, 182
    equity, 182
    mezzanine, 182
    senior, 182

U
Univers
    forward-neutre, 699
        glissant, 792
    réel, 284
        défaut, 581, 582
    risque-neutre, 284, 696
        défaut, 581, 582

V
Value at Risk, 519
    ACP, 538
    de crédit, 593
    horizon, 521
    modèle linéaire, 529
        options, 533
    modèle quadratique, 534
    Monte-Carlo, 537
    régulateur, 520
    simulation historique, 522
    stress test, 862
    variance-covariance, 526
VAN, 841
Variable antithétique, 500
Variance, réduction, 499
Vega, 435
Vente à découvert, 108
    short-squeeze, 108
Volatilité
    actions, 446
    asymétrie, 799
    courbe, 453
    estimation, 291, 332, 547
        schéma de pondération, 549
    extrême, 463
    flat, 721
    grecques, 462
    implicite, 350, 454
        fonction de, 670
    IVF, 670
    jour ouvrable, 336
    origine, 335
    plate, 721
    smile, 453
    spot, 721, 792
    structure, 766, 767
        par termes, 561
    taux
        de variance, 547
        forward, 792
    vega, 435
    week-end, 336

W
Warrant, 225
    dilution, 348
Wild Card, 142